Partitions non croisées dans les groupes de Coxeter finis

Jad Abou Yassin

Encadrants : Thomas Gobet et Cédric Lecouvey
Institut Denis Poisson

27 juin 2023

Sommaire

Partitions non croisées combinatoires

Définition

Une partition $P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_r = [\![1, n]\!]$ est non croisée

$\Leftrightarrow$

il n'existe pas $i < j < k < l \in [\![1, n]\!]$ tel que $i, k \in P_s$, $j, l \in P_t$ et $s \neq t$.

Représentation géométrique :

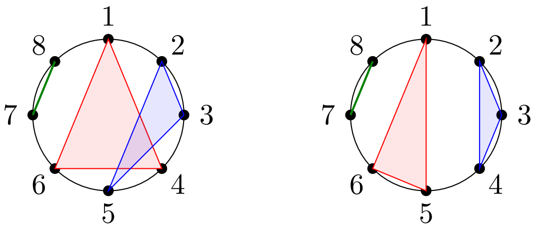


Figure – Une partition croisée et une partition non croisée de $[\![1, 8]\!]$

Dénombrement

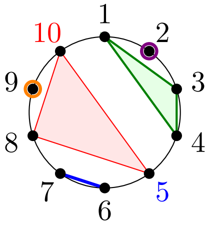
Théorème

Le nombre de partitions non croisées de $[\![1, n]\!]$ *est égal au nombre de* Catalan

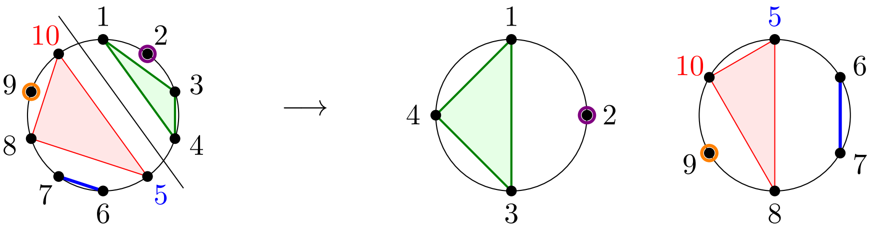
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Preuve. Dans une partition non croisée $P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_r$ de $[\![1, n]\!]$ on considère

$$k = \min(P_i) \qquad \text{où} \qquad n \in P_i$$



Alors toutes les parties contenant des éléments $< k$ forment une partition non-croisée de $[\![1, k-1]\!]$, et les autres forment une partition non-croisée de $[\![k, n]\!]$ telle que k et n appartiennent à la même partie.



En retirant n, ceci donne une partition non-croisée de $[\![k, n-1]\!]$.

Réciproquement, à partir de deux partitions non-croisées de $[\![1,k-1]\!]$ et $[\![k,n-1]\!]$, on construit une partition non croisée de $[\![1,n]\!]$ en faisant le cheminement inverse.

Récurrence : $P_n =$ nombre de partitions non-croisées de $[\![1,n]\!]$.

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} P_{k-1}P_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} P_k P_{n-1-k} \qquad \text{et} \qquad P_0 = 1$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = C_n}$$

$\square$

1. Partitions non croisées
   - Partitions non croisées combinatoires
   - Bijection avec les chemins de Dyck et structure de treillis
   - Partitions non croisées algébriques

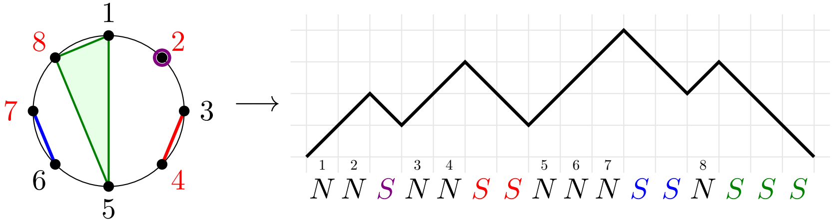
2. Groupes de Coxeter
   - Définition des groupes de Coxeter
   - Partitions non croisées (généralisées)

Bijection avec les chemins de Dyck

Bijection avec les chemins de Dyck de longueur $2n$:

$$P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_k = [\![1, n]\!] \text{ non croisée } \mapsto NS^{\alpha_1} NS^{\alpha_2} \ldots NS^{\alpha_{n-1}} NS^{\alpha_n}$$

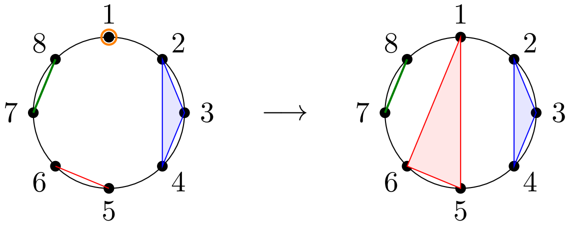
où $\alpha_i = |P_k|$ si $i = \max(P_k)$ et $\alpha_i = 0$ sinon.



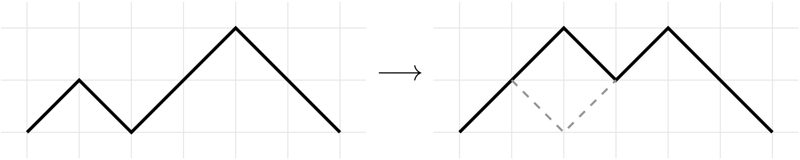
C'est une bijection entre les partitions non croisées de $[\![1, n]\!]$ et les chemins de Dyck de longueur $2n$

Structure de treillis

Treillis naturel sur les partitions non croisées par raffinement.

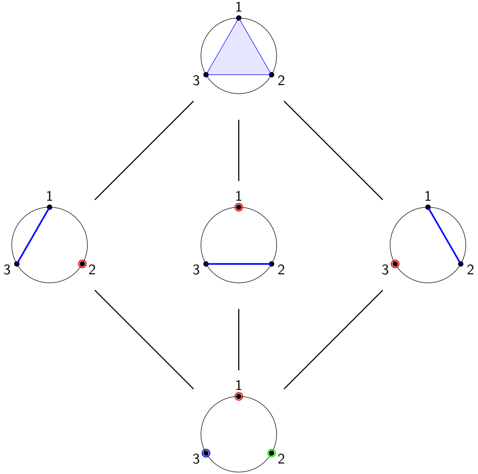


Treillis naturel sur les chemins de Dyck par recouvrement.

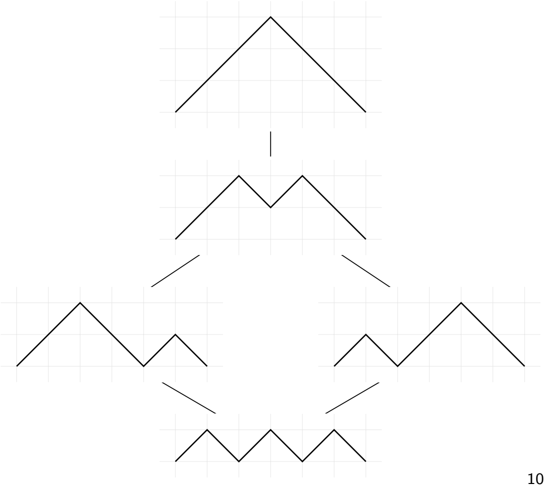


Différents treillis ($n = 3$)

Treillis de Kreweras : par raffinement



Trellis de Stanley : par recouvrement



1. Partitions non croisées
   - Partitions non croisées combinatoires
   - Bijection avec les chemins de Dyck et structure de treillis
   - Partitions non croisées algébriques

2. Groupes de Coxeter
   - Définition des groupes de Coxeter
   - Partitions non croisées (généralisées)

Partitions non croisées algébriques : cas de $\mathfrak{S}_n$

Soit $T = \{(i \quad j)\ ;\ 1 \leq i < j \leq n\}$ et $S = \{(i \quad i{+}1)\ ;\ 1 \leq i \leq n{-}1\}$
On a $\mathfrak{S}_n = \langle T \rangle = \langle S \rangle$

Définition

Longueur de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$l(\sigma) = \min\{k \in \mathbb{N}\ ;\ \exists s_1, \ldots, s_k \in S,\ \sigma = s_1 \ldots s_k\}$$

Longueur de réflexion de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$l_T(\sigma) = \min\{k \in \mathbb{N}\ ;\ \exists s_1, \ldots, s_k \in T,\ \sigma = s_1 \ldots s_k\}$$

Exemple : $l((1 \quad 4)) = 5$ et $l_T((1 \quad 4)) = 1$

Ordre absolu, partitions non croisées

Définition (Ordre absolu)

$$\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma \leq_T \tau \Leftrightarrow l_T(\sigma) + l_T(\sigma^{-1}\tau) = l_T(\tau)$$

On note c le produit des transpositions élémentaires $c = s_1 \dots s_{n-1}$

Définition (partition non croisée)

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une partition non croisée si $\sigma \leq_T c$.

On note $NC(\mathfrak{S}_n)$ l'ensemble des partitions non croisées de $\mathfrak{S}_n$.

Théorème (Biane, 1997)

L'application qui à $\sigma \in NC(\mathfrak{S}_n)$ associe la partition donnée par son support est à valeurs dans l'ensemble des partitions non croisées combinatoires de $[\![1, n]\!]$, et il s'agit d'un isomorphisme de treillis.

1. Partitions non croisées
   - Partitions non croisées combinatoires
   - Bijection avec les chemins de Dyck et structure de treillis
   - Partitions non croisées algébriques

2. Groupes de Coxeter
   - Définition des groupes de Coxeter
   - Partitions non croisées (généralisées)

Groupes de Coxeter

Soit $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ un ensemble fini et $(m(s,s'))_{(s,s')\in S^2} \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})^{S^2}$ tel que

$$\forall s \neq s' \in S, \quad m(s,s') = m(s',s) \geq 2 \quad \text{et} \quad m(s,s) = 1$$

Définition (Groupe de Coxeter)

On pose W le groupe défini par la présentation :

$$\langle s_1, \dots, s_n \mid \forall s_i, s_j \in S,\ m(s_i,s_j) < +\infty \Rightarrow (s_i s_j)^{m(s_i,s_j)} = 1 \rangle$$

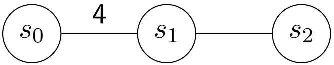
On dit que (W, S) est un système de Coxeter, et que W est un groupe de Coxeter

Matrice de Coxeter, diagramme de Coxeter

Définition

La matrice $(m(s,s'))_{s,s'\in S}$ est appelée matrice de Coxeter. Le diagramme de Coxeter est le graphe obtenu à partir du graphe complet non orienté dont les sommets sont étiquetés par les éléments de S et l'arête $s - s'$ est de poids $m(s,s')$, en retirant les arêtes de poids 2 et en ne marquant pas le poids des arêtes de poids 3.

Exemple :



$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Figure – Un diagramme de Coxeter et une matrice de Coxeter de type B_3

Exemples

$W = \mathfrak{S}_n$, $S = \{(i \quad i{+}1)\ ;\ 1 \leq i \leq n{-}1\}$.

$\forall i, j \in [\![1, n-1]\!]$, on a les relations :

$$\begin{cases} s_i^2 = 1 & & (m(s_i, s_i) = 1) \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{si } |i-j| > 1 & (m(s_i, s_j) = 2) \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{si } |i-j| = 1 & (m(s_i, s_j) = 3) \end{cases}$$

Alors (W, S) est un système de Coxeter (de type A_{n-1}).

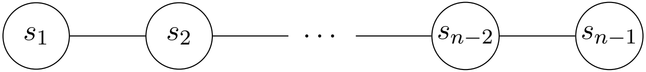


Figure – Un diagramme de Coxeter de type A_{n-1}

Autre exemple : les groupes diédraux (groupe des isométries vectorielles du plan préservant les polygones réguliers). Le groupe D_{2n} est un groupe de Coxeter car

$$D_{2n} = \langle s, t \mid s^2 = 1,\ t^2 = 1,\ (st)^n = 1 \rangle$$

Son diagramme de Coxeter est alors de type $I_2(n)$

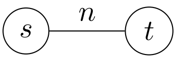


Figure – Un diagramme de Coxeter de type $I_2(n)$

Nombres de Coxeter-Catalan

En énumérant les partitions non croisées pour les groupes de Coxeter finis, on généralise les nombres de Catalan

A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2	H_3	H_4	$I_2(m)$
$\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}$	$\binom{2n}{n}$	$\frac{3n-2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$	833	4160	25080	105	8	32	280	$m+2$

1. Partitions non croisées
   - Partitions non croisées combinatoires
   - Bijection avec les chemins de Dyck et structure de treillis
   - Partitions non croisées algébriques

2. Groupes de Coxeter
   - Définition des groupes de Coxeter
   - Partitions non croisées (généralisées)

Partitions non croisées

(W, S) un système de Coxeter fini.

$T = \bigcup_{w \in W} wSw^{-1}$ est l'ensemble des réflexions de W.

Un produit de tous les éléments de S est appelé un élément de Coxeter, noté c.

Définition (Partition non croisée)

Une partition non croisée (relativement à c) est un élément $w \in W$ tel que $w \leq_T c$.

On note $NC(W, c)$ l'ensemble des partitions non croisées de W relativement à c.

Merci pour votre attention !