Théorème de convergence de LÉVY et application au TLC

Le théorème de convergence de LÉVY (nommé d'après Paul LÉVY) est un argument important dans la preuve du théorème limite central qui n'a plus besoin d'être présenté tellement son importance est central au domaines des probabilités et statistiques.

Avant de procéder à la preuve de théorème de convergence de LÉVY, attelons nous de montrer le lemme suivant :

LEMME Soit $(X_n)_n$ une suite de VAR et soit X_∞ une VAR.
On a :
$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X_\infty \iff \forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}), \mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)].$$

PREUVE Par définition, $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X_\infty \iff \forall f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}), \mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$.
Le sens direct est donc clair car $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$. De plus, si pour tout $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$, alors pour $g \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, $g_A = g \times$  $\in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ pour $A > 0$ et

alors
$$\left|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]\right| \leq \left|\mathbb{E}[(g-g_A)(X_n)]\right| + \left|\mathbb{E}[g_A(X_n) - g_A(X)]\right| + \left|\mathbb{E}[(g_A - g)(X)]\right|$$

Et le terme de droite peut être arbitrairement petit donc
$$\mathbb{E}[g(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[g(X)] \text{ i.e. } X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X_\infty \qquad \square$$

Théorème (de Lévy) Soit $(X_n)_n$ une suite de VAR et soit X_∞ un VAR. On a alors :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X_\infty \iff \varphi_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} \varphi_{X_\infty}.$$

Preuve

$\underline{\Rightarrow}$ clair car pour $t\in\mathbb{R}$, $x\mapsto e^{itx} \in \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$ d'où le résultat

$\underline{\Leftarrow}$ Pour $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $f=\hat{\varphi}\in\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$, alors

$$\mathbb{E}\left[f(X_n)\right] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)\,dt\,d\mathbb{P}_{X_n}(x) \overset{FL}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{X_n}(-t)\,\varphi(t)\,dt$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{CVD} \mathbb{E}\left[f(X_\infty)\right].$$

Ainsi pour l'image de $L^1(\mathbb{R})$ par la transformée de Fourier, le résultat est obtenu, or celle-ci contient $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui est dense dans $\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $f\in\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$, pour $\varepsilon>0$ il existe $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon' = \varepsilon/3$, ainsi

$$|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq |\mathbb{E}[(f-g)(X_n)]| + |\mathbb{E}[g(X_n)-g(X)]|$$
$$+ |\mathbb{E}[(g-f)(X)]| \overset{APCR}{\leq} 3\varepsilon' = \varepsilon.$$

Ainsi $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ $\square$

Avant de montrer le TLC, montrons le résultat suivant :

Lemme Soit $z\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $z_\infty\in\mathbb{C}$, alors

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{z_\infty}.$$

PREUVE Soit $R>0$, montrons que $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ converge uniformément vers exp sur $\overline{\mathcal{B}}(0,R)$.

Soient $a,b \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|a^k - b^k| \leq |a-b|\,|a^{k-1}+ba^{k-2}+\dots+b^{k-1}| \leq |a-b|\,k\,(|a| \wedge |b|)^{k-1}.$$

De plus, pour $u \in \mathbb{C}$,

$$|e^u - (1+u)| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|u|^k}{k!} \leq |u|^2 \sum_{k\geq 0} \frac{|u|^k}{k!} = |u|^2 e^{|u|}.$$

Ainsi avec $a=e^u$ et $b=1+u$, on a

$$(|e^u| \wedge |1+u|) \leq ((e^{|u|}) \wedge (1+|u|)) = e^{|u|}.$$

et donc pour $k\geq 1$

$$|e^{ku} - (1+u)^k| \leq |e^u - (1+u)|\,k\,e^{|u|(k-1)}$$
$$\leq k|u|^2 e^{k|u|} = \frac{|ku|^2 e^{|ku|}}{k}$$

Soit $z \in \overline{\mathcal{B}}(0,R)$ et soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a alors

$$\left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{n} \leq \frac{R^2 e^R}{n}$$

ie $\sup\limits_{z\in\overline{\mathcal{B}}(0,R)} \left|e^z - \left(1-\frac{z}{n}\right)^n\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où la conclusion $\square$

Montrons le TLC.

THÉORÈME (limite central) Soit $(X_n)_n$ une suite de VAR iid telle que $X_0 \in L^2(\mathbb{P})$ de moyenne μ et de variance σ^2, on a alors

$$\sqrt{n}\left(\frac{X_0+\dots+X_{n-1}}{n} - \mu\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

PREUVE Quitte à remplacer X par $\frac{X-\mu}{\sigma}$, on peut supposer sans perte de généralité que $\mu=0$ et $\sigma=1$.

Comme les X_n sont iid et $L^2(\mathbb{P})$, $\phi_{X_n} \hat{=} \phi$ est $\mathcal{C}^2$ et on a

$$\phi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Et

$$\phi_{\frac{X_0+\dots+X_n}{\sqrt{n}}}(t) = \phi_{X_0+\dots+X_n}(t/\sqrt{n}) = \phi(t/\sqrt{n})^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2)\right)^n$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{CVS} e^{-t^2/2} = \phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t)$$

et on conclut avec le théorème de LÉVY. $\square$

REMARQUE On a utilisé le fait que $X \in L^2(\mathbb{P})$ implique $\phi_X \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. En effet, c'est une conséquence de théorème de dérivation sous le signe somme. Le résultat donne même que si est $L^k(\mathbb{P})$, $\phi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$. Cependant, on n'a pas une réciproque totale. On a si $\phi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, $\phi \in L^{2\lfloor k/2 \rfloor}(\mathbb{P})$. En effet, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

- Si $k=0,1$: le résultat est claire.
- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que si $\phi_X \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, $X \in L^{2\lfloor k/2 \rfloor}(\mathbb{P})$.
  - Si $k \in 1+2\mathbb{N}$, on a le résultat voulu
  - Si $k = 2l \in 2\mathbb{N}$, soit X tel que.