Prouvons le théorème de RADON-NIKODYM dans le cadre de mesures σ-finies.

Pour ce faire, nous allons commencer par étudier le cas de mesures finie puis étendre au cas des mesures σ-finies si le temps nous le permet.

Dans le cas de mesures finies, la preuve va se faire en trois temps : tout d'abord nous allons durcir l'hypothèse en supposant qu'une inégalité entre les deux mesures, puis étendre au cas général et finalement prouver l'unicité de la densité de RADON-NIKODYM dans le cas de mesures finies.

1) Supposons que $\nu \leq \mu$, on a alors $L^2(\nu) \supset L^2(\mu)$ et on peut donc considérer la forme linéaire :

$$\Phi : f \in L^2(\mu) \longmapsto \int_X f \, d\nu \in \mathbb{R}.$$

Φ est continue car :

$$\forall f \in L^2(\mu), \quad |\Phi(f)| = \left|\int_X f \, d\nu\right| \overset{CS}{\leq} \left|\int_X f^2 \, d\nu\right|^{1/2} \times \left|\int_X 1^2 \, d\nu\right|^{1/2}$$

$$\leq \|f\|_{2,\mu} \times \nu(X)^{1/2}$$

Ainsi, comme $L^2(\mu)$ est un espace de HILBERT, par théorème de représentation de RIESZ, il existe $\delta \in L^2(\mu)$ telle que pour $f \in L^2(\mu)$,

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \delta \, d\mu.$$

$\delta \in L^2(\mu) \subset L^1(\mu)$ donc $\delta \in L^1(\mu)$ et de plus δ est à valeurs dans $[0,1]$ μ-presque partout.

En effet :

- $0 \leq \mu(\{\delta < 0\}) = \int \frac{\delta}{\delta} \mathbb{1}_{\{\delta<0\}} d\mu = \int \frac{\mathbb{1}_{\{\delta<0\}}}{\delta} d\nu \leq 0.$

- $0 \leq \mu(\{\delta > 1\}) = \int \frac{1-\delta}{1-\delta} \mathbb{1}_{\{\delta>1\}} d\mu = \int \frac{\mathbb{1}_{\{\delta>1\}}}{1-\delta} d\mu - \int \frac{\mathbb{1}_{\{\delta>1\}}}{1-\delta} d\nu$

$$= \int \frac{\mathbb{1}_{\{\delta>1\}}}{1-\delta} d(\mu - \nu) \leq 0.$$

2) Revenons au cas général. On remarque que $\mu \leq \mu + \nu$. Ainsi d'après le point précédent, il existe $\delta \in L^1(\mu+\nu)$ tel que : $d\mu = \delta\, d(\mu+\nu)$

ie : $(1-\delta)\, d\mu = \delta\, d\nu$.

Ainsi pour $A \in \mathcal{A}$, avec $N = \{\delta = 1\}$

$$\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A d\nu = \nu(A \cap N) + \int_X \frac{1-\delta}{1-\delta} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{N^c} d\nu$$

$$= 0 + \int_X \frac{\delta}{1-\delta} \mathbb{1}_{N^c} \mathbb{1}_A d\mu.$$

En effet, $\nu(N) = \int_X \delta \mathbb{1}_N d\nu = \int_X (1-\delta) \mathbb{1}_N d\mu = 0.$

Ainsi, $\frac{\delta}{1-\delta}$ est la dérivée de RADON-NIKODYM de ν pour μ.

3) Traitons de l'unicité de la dérivée de RADON-NIKODYM.

Supposons qu'il existe $f_1, f_2 \in L^1(\mu)$ tels que :
$\forall A \in \mathcal{A}$, $\int_A f_1 \, d\mu = \int_A f_2 \, d\mu = 0$ ie $\int_A (f_1 - f_2) \, d\mu = 0$

Alors pour $A^+ = \{ f_1 - f_2 > 0 \}$ et $A^- = \{ f_1 - f_2 < 0 \}$, on a
$\int_{A^\pm} (f_1 - f_2) \, d\mu = 0$ donc $\mu(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$.
Ainsi $f_1 = f_2$ μ-pp.

4) Cas σ-fini. Il existe une partition $X = \bigsqcup_n A_n$ de X telle que pour tout n, $\mu(A_n) < +\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\delta_n \in L^1(\mu)$ telle que $\delta_n(A_n^c) = 0$ et pour $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A \cap A_n) = \int_X \mathbb{1}_{A \cap A_n} \delta_n \, d\mu$.

Ainsi pour $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \nu\left(\bigsqcup_n (A \cap A_n)\right) = \sum_n \nu(A \cap A_n)$

$$= \sum_n \int_X \mathbb{1}_{A \cap A_n} \delta_n \, d\mu$$

$$= \int_X \left(\sum_n \mathbb{1}_{A \cap A_n} \delta_n \right) d\mu.$$

D'où l'unicité d'une dérivée de RADON-NIKODYM.