SIGNATURE D'UN CHEMIN C^{1-var}

I - Mécanique centrale

Pour $x : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ C^{1-var} et $V : \mathbb{R}^e \to L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e)$ de classe C^∞, on considère l'EDO

$$dy = V(y)\, dx,$$

d'inconnue $y : [0,T] \to \mathbb{R}^e$. On cherche à expliciter y sous forme d'intégrales itérées.

<u>Notation</u> Pour $f : \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}$ et $V = (V^1 | \cdots | V^d) : \mathbb{R}^e \to L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e)$,

on définit $Vf = (V^1 f | \cdots | V^d f) : \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}$

où $\forall 1 \leq i \leq d$, $\forall y \in \mathbb{R}^e$,
$$V^i f(y) \hat{=} \langle V_i(y), \nabla f(y) \rangle_{\mathbb{R}^e} = \sum_{k=1}^{e} V_i^k(y) \frac{\partial f}{\partial y_k}(y)$$

Si bien que lorsque $dy = V(y)\, dx$, pour $s < t$

$$f(y_t) - f(y_s) = \int_s^t Vf(y_u)\, dx_u$$

Pour $s < t$

$$y_t - y_s = \int_s^t V(y_u)\, dx_u = \sum_{i=1}^{d} \int_s^t V^i(y_u)\, dx_u^i$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \int_s^t \left\{ V^i(y_s) + \sum_{j=1}^{d} \int_s^u V^j V^i(y_v)\, dx_v^j \right\} dx_u^i$$

$$= \sum_{i=1}^{d} V^i(y_s) \int_s^t dx_u^i + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \int_s^t \int_s^u V^j V^i(y_v)\, dx_v^j\, dx_u^i$$

$= \cdots$ on itère $n \geq 1$ fois

$$= \sum_{i=1}^{d} V^i(y_s) \int_s^t dx_u^i + \cdots + \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_n \leq d} V^{i_1} \cdots V^{i_n}(y_s) \int_s^t \int_s^{u_1} \cdots \int_s^{u_{n-1}} dx_{u_n}^{i_n} \cdots dx_{u_1}^{i_1}$$

$$+ \text{Reste}$$

Pour connaître y, on doit connaître les intégrales itérées de x, ie pour $n \geq 1$, connaître

$$\left(\int_s^t \int_s^{u_1} \cdots \int_s^{u_{n-1}} dx_{u_n}^{i_n} \cdots dx_{u_1}^{i_1} \right)_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d}.$$

On note cette famille (vu comme vecteur)

$$\int_s^t \int_s^{u_1} \cdots \int_s^{u_{n-1}} dx_{u_n} \otimes \cdots \otimes dx_{u_1}$$

Définition Pour $N \geq 1$ et $x \in C^{1\text{-var}}([0,T] \to \mathbb{R}^d)$, sa signature entre s et t $(s<t)$ est

$$\boxed{S_N(x)_{s,t} \triangleq \left(1, \int_{s<u<t} dx_u, \dots, \int_{s<u_1<\cdots<u_N<t} dx_{u_1} \otimes \cdots \otimes dx_{u_N}\right)}$$

On appelle relèvement de x à l'ordre N l'application

$$\boxed{t \mapsto S_N(x)_{0,t}}$$

On constate que

$$S_n(x)_{s,t} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^{\otimes 2} \times \cdots \times (\mathbb{R}^d)^{\otimes N}$$

Notation On notera $A \oplus B$ pour désigner $A \times B$. Un élément de $A \oplus B$ sera noté $a+b$ (au lieu de (a,b))

On note enfin

$$T^N(\mathbb{R}^d) \triangleq \bigoplus_{n=0}^{N} (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$$

II – Algèbre tensorielle d'ordre n

On définit sur $T^N(\mathbb{R}^d)$ un produit noté $\otimes$ (dépendant de N).

Le produit tensoriel usuel entre deux vecteurs est donné comme suit : si $e_1, \dots, e_d$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$, si

$$a = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d} a_{i_1, \dots, i_k} \bigotimes_{\alpha=1}^{k} e_{i_\alpha} \quad \text{et} \quad b = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_\ell \leq d} b_{j_1, \dots, j_\ell} \bigotimes_{\beta=1}^{\ell} e_{i_\beta}$$

alors $$a \otimes b = \sum_{\substack{1 \le i_1, \dots, i_k \le d \\ 1 \le j_1, \dots, j_\ell \le d}} a_{i_1, \dots, i_k} \, b_{j_1, \dots, j_\ell} \bigotimes_{\alpha=1}^{k} e_{i_\alpha} \otimes \bigotimes_{\beta=1}^{\ell} e_{i_\beta}$$

Exemple Sur $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$$

On définit désormais $\otimes$ sur $T^N(\mathbb{R}^d)$.

Si $\underline{a} = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{a_0}} + \underset{\mathbb{R}^d}{\underset{\cap}{a_1}} + \underset{(\mathbb{R}^d)^{\otimes 2}}{\underset{\cap}{a_2}} + \cdots + \underset{(\mathbb{R}^d)^{\otimes N}}{\underset{\cap}{a_N}} \in T^N(\mathbb{R}^d)$

noté /mathbf{a} dans le livre

on note $\pi_k(\underline{a}) = a_k \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$. Pour $\underline{a}, \underline{b} \in T^N(\mathbb{R}^d)$,

$\underline{a} \otimes \underline{b} \in T^N(\mathbb{R}^d)$ est défini comme suit :

$\otimes$ usuel pour les vecteurs

pour $0 \le n \le N$, $\pi_n(\underline{a} \otimes \underline{b}) \hat{=} \sum_{i+j=k} \pi_i(\underline{a}) \otimes \pi_j(\underline{b})$

et pour $n \geq N+1$, $\pi_n(\underline{a} \otimes \underline{b}) = 0$ ⚠

(Penser $\otimes$ comme un développement limité).

Exemple Sur $T^2(\mathbb{R}^2)$

$$\underline{a} = 2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = 3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = \underbrace{6}_{\text{ordre } 0} + \underbrace{2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ordre } 1} + \underbrace{2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ordre } 2}$$

et pas d'ordres supérieurs !

Proposition $(T^N(\mathbb{R}^d), +, \cdot, \otimes)$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$ (non-commutative) dont l'élément neutre pour $\otimes$ est donné par

$$\underline{1} \hat{=} \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{1}} + \underset{\mathbb{R}^d}{\underset{\cap}{0}} + \underset{(\mathbb{R}^d)^{\otimes 2}}{\underset{\cap}{0}} + \cdots + \underset{(\mathbb{R}^d)^{\otimes N}}{\underset{\cap}{0}}$$

Remarque algébrique. Si on définit $T^\infty(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{R}^d)^{\otimes n}$

alors $T^N(\mathbb{R}^d) \underset{\text{iso algèbre}}{\simeq} T^\infty(\mathbb{R}^d) / \bigcap_{i=0}^{n} \ker(\pi_i)$

III – Groupes et algèbres de Lie sous-jacents. Exponentielle.

Définition On note

$$\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d) \triangleq \{ \underline{g} \in T^N(\mathbb{R}^d) \mid \pi_0(\underline{g}) = 0 \}$$

et

$$1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d) \triangleq \{ \underline{g} \in T^N(\mathbb{R}^d) \mid \pi_1(\underline{g}) = 1 \}$$

/mathfrak{t}

Proposition $(1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d), \otimes)$ est un groupe. En particulier,

pour $\underline{g} = 1 + \underline{a} \in 1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$,

$$\underline{g}^{-1} = (1 + \underline{a})^{-1} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \, \underline{a}^{\otimes n}$$

Dém Il suffit de développer $(1 + \underline{a}) \otimes \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \underline{a}^{\otimes n}$,

sachant que $\underline{a}^{\otimes(N+1)} = 0$. ☒

Définition Pour $\underline{a} \in \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$, on définit

$$\exp_N(\underline{a}) \triangleq \underline{1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\underline{a}^{\otimes n}}{n!} \in 1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$$

Exemple Pour $v \in \mathbb{R}^d$ et $\forall t \in [0,1]$, $x_t = tv$ alors

$$S_N(x)_{0,t} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \int_{0<u_1<\cdots<u_n<t} dx_{u_1} \otimes \cdots \otimes dx_{u_n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{t^n}{n!} v^{\otimes n} = \exp_N(tv)$$

(où v est identifié à $0 + v + 0 + \cdots + 0 \in T^N(\mathbb{R}^d)$).

Proposition $\exp_N : t^N(\mathbb{R}^d) \longrightarrow 1 + t^N(\mathbb{R}^d)$

est bijective, d'inverse donnée par

$\forall \underline{g} = 1 + \underline{a} \in 1 + t^N(\mathbb{R}^d)$,

$$\ln_N(\underline{g}) = \ln_N(1+\underline{a}) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \underline{a}^{\otimes n}$$

Dém Il « suffit de mq » les polynômes $\exp_N \circ \ln_N$ et $\ln_N \circ \exp_N$ se réduisent à l'identité (calcul faussement facile) □

Théorème (Campbell-Baker-Hausdorff) Soient $\underline{a}, \underline{b} \in t^N(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\ln_N\left(\exp_N(\underline{a}) \otimes \exp_N(\underline{b})\right) = \underline{b} + \int_0^1 H\left(e^{t\, ad(\underline{a})} \circ e^{ad(\underline{b})}\right) \underline{a} \, dt$$

où

$$ad(\underline{a}) : \left(\begin{array}{ccc} t^N(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & t^N(\mathbb{R}^d) \\ \underline{d} & \longmapsto & [\underline{a}, \underline{d}] \triangleq \underline{a} \otimes \underline{d} - \underline{d} \otimes \underline{a} \end{array} \right)$$

et

$$H(z) = \frac{\ln z}{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^n$$

Théorème à l'énoncé peu lisible. Autrement dit,

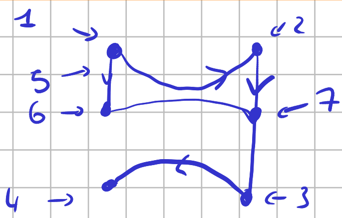
$$\exp(\underline{a}) \otimes \exp(\underline{b}) = \exp(\underline{a} + \underline{b} + \text{somme de composées de } [\underline{a}, \underline{b}])$$

Définition On définit la N^e algèbre de Lie nilpotente

$$\mathfrak{g}^N \triangleq \left\{ \underline{a} \in t^N(\mathbb{R}^d) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall 1 \leq n \leq N, \; \exists v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d, \\ \pi_n(\underline{a}) = [v_1, [v_2, [\dots, [v_{n-1}, v_n]] \dots] \end{array} \right\}$$

$$= 0 \oplus \mathbb{R}^d \oplus [\mathbb{R}^d ; \mathbb{R}^d] \oplus \cdots \oplus \underbrace{[\mathbb{R}^d, [\mathbb{R}^d, \dots, [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d]] \dots]}_{N-1 \text{ crochets de Lie}}$$

mathfrak{g}



(tuto $\mathfrak{g}$).

NB : $\mathfrak{g}^N$ est l'unique sous-ensemble de $t^N(\mathbb{R}^d)$ tel que

① $\mathfrak{g}^N$ sev de $(t^N(\mathbb{R}^d), +, \cdot)$

② $\mathfrak{g}^N$ stable par crochet : $\forall \underline{a}, \underline{b} \in \mathfrak{g}^N$, $[\underline{a}, \underline{b}] \in \mathfrak{g}^N$.

③ $\forall v \in \mathbb{R}^d$, $0 + v + 0 + \cdots + 0 \in \mathfrak{g}^N$

Corollaire (du thm CBH) $\exp(\mathfrak{g}^N)$ est un sous-groupe de $1 + t^N(\mathbb{R}^d)$.

Définition On appelle groupe libre nilpotent d'ordre N sur $\mathbb{R}^d$

$$G^N(\mathbb{R}^d) \triangleq \exp(\mathfrak{g}^N) \underset{\text{sous-groupe.}}{<} 1 + t^N(\mathbb{R}^d)$$

Théorème

$$G^N(\mathbb{R}^d) = \left\{ S_N(x)_{0,1} \;\middle|\; x \in C^{1-var}([0,1] \to \mathbb{R}^d) \right\}$$

Schéma de démonstration On utilise le thm de Chow.

Thm (Chow) $\forall \underline{g} \in \exp(\mathfrak{g}^N)$, $\exists\, m \geq 1$, $\exists\, v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^d$,

$$\underline{g} = e^{v_1} \otimes \cdots \otimes e^{v_m}$$

Interprétation : on verra que si γ, η sont deux chemins alors

$$S_N(\gamma \cup \eta) = S_N(\gamma) \otimes S_N(\eta).$$

Tout élément de $\exp(\mathfrak{g}^N)$ peut être vu comme signature d'une ligne brisée.

→ La dém du thm de Chow requiert de la géo diff, on la passe.

→ On a alors $\exp(\mathfrak{g}^N) = \langle \exp(\mathbb{R}^d) \rangle \left(\triangleq \bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^d} \{ e^{v_1} \otimes \cdots \otimes e^{v_m} \} \right)$

Reste à mq $\quad \{ S_N(x)_{0,1} \mid x \; C^{1-var} \} = \langle \exp(\mathbb{R}^d) \rangle$

① mq $\langle \exp(\mathbb{R}^d) \rangle$ est fermé pour la distance $\rho(\underline{g}, \underline{h}) = \max_{0 \leq i \leq N} |\pi_i(\underline{g}) - \pi_i(\underline{h})|_A$

② On approche $S_N(x)$ via une approx de x en lignes brisées. $\square$