SIGNATURE D'UN CHEMIN C^{1-var} II (analyse)

Rappels

- Pour $x \in C^{1-var}([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ et $N \geq 1$, $s < t$

$$S_N(x)_{s,t} \triangleq 1 + \sum_{n=1}^{N} \left(\int_{s<u_n<\cdots<u_1<t} dx_{u_1} \otimes \cdots \otimes dx_{u_n} \right) \in T^N(\mathbb{R}^d)$$

- $t^N(\mathbb{R}^d) = \{ \underline{a} \in T^N(\mathbb{R}^d) \mid \pi_0(\underline{a}) = 0 \}$

- $\exp_N : \underset{\mathbb{R}\text{-ev}}{t^N(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow \underset{\text{groupe pour } \otimes}{1 + t^N(\mathbb{R}^d)}$ est bijective, avec

$$\exp_N(\underline{a}) \otimes \exp_N(\underline{b}) = \exp_N(\underline{a} + \underline{b} + \text{somme de composées de } [a,b])$$

- $\mathfrak{g}^N \triangleq \{0\} \oplus \mathbb{R}^d \oplus [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d] \oplus \cdots \oplus [\mathbb{R}^d, [\mathbb{R}^d, \ldots, [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d]] \cdots]$

  ss-algèbre de Lie de $t^N(\mathbb{R}^d)$ (stable par $+$ et $[\cdot,\cdot]$)

alors $\exp(\mathfrak{g}^N) < (1 + t^N(\mathbb{R}^d), \otimes)$ et

$$G^N \triangleq \exp(\mathfrak{g}^N) = \{ S_N(x)_{0,1} \mid x \; C^{1-var} \}$$

I - Étude pour N = 2

Utile pour étudier le relèvement du mouvement brownien

$$\underline{B} \triangleq (1, B, \mathbb{B}) \in T^2(\mathbb{R}^d) \quad \mathbb{P}\text{-ps}$$

(cf exposé Christophe !)

Soit $x \in C^{1-var}([0,T], \mathbb{R}^d)$ où $x_0 = 0$.

$$\log_2(S_2(x)_{0,t}) \triangleq (S_2(x)_{0,t} - 1) - \frac{1}{2}(S_2(x)_{0,t} - 1)^{\otimes 2}$$

$$= x_t + \int_0^t \left(\int_0^s dx_u \right) \otimes dx_s - \frac{1}{2} x_t \otimes x_t$$

$$= x_t + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^s dx_u \otimes dx_s + \frac{1}{2} \boxed{\left(\int_0^t \int_0^s dx_u \otimes dx_s - x_t \otimes x_t \right)}$$

or $\boxed{} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\left(\int_0^t\left(\int_0^s dx_u^j\right)dx_s^i - x_t^i x_t^j\right) \underbrace{e_i \otimes e_j}_{\text{Base canonique } \mathbb{R}^d}$

$$\underset{\text{IPP}}{=} \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\int_0^t x_s^i \, dx_u^j \quad e_i \otimes e_j$$

D'où

$$\boxed{\begin{aligned} S_2(x)_{0,t} &= \exp\left(x_t + \frac{1}{2}a_t\right) \\ a_t &= \sum_{i,j=1}^{d}\left(\int_0^t\int_0^s dx_u^i \, dx_s^j - \int_0^t\left(\int_0^s dx_u^j\right)dx_s^i\right) e_i \otimes e_j \end{aligned}}$$

où

(aire de Lévy)

II – Propriétés de la signature

Proposition Soient $x \in C^{1-var}([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ et $s \in [0,T]$

alors pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{cases} dS_N(x)_{s,t} = S_N(x)_{s,t} \otimes dx_t \\ S_N(x)_{s,s} = \underline{1} \end{cases}, \text{ de manière unique.}$$

Dém Unicité : cf exposé Eya, car globalement lipschitz

Il faut comprendre l'ED comme

$$\begin{aligned} S_N(x)_{s,t} &= \int_s^t S_N(x)_{s,u} \otimes dx_u \\ &= \sum_{i=1}^{d}\int_s^t \left(S_N(x)_{s,u} \otimes e_i\right) dx_u^i \\ &= \sum_{i=1}^{d}\int_s^t U_i\left(S_N(x)_{s,u}\right) dx_u^i \quad \text{où } U_i(\underline{a}) = \underline{a} \otimes e_i . \end{aligned}$$

Mq $S_N(x)_{s,\cdot}$ vérifie l'ED.

- $S_N(x)_{s,s} = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0$ ok
  $= \underline{1}$.

- Pour $t \in [0,T]$, $t > s$ et $1 \le n \le N$

$$\pi_n\left(S_N(x)_{s,t}\right) = \int_{s<u_1<\cdots<u_n<t} dx_{u_1}\otimes\cdots\otimes dx_{u_n}$$

$$= \int_s^t \left(\int_{s<u_1<\cdots<u_n} dx_{u_1}\otimes\cdots\otimes dx_{u_{n-1}}\right)\otimes dx_{u_n}$$

$$= \int_s^t \pi_{n-1}\left(S_N(x)_{s,u}\right)\otimes dx_u$$

D'où

$$S_N(x)_{s,t} = \underline{1} + \sum_{n=1}^{N} \int_s^t \pi_{n-1}\left(S_N(x)_{s,u}\right)\otimes dx_u$$

$$= \underline{1} + \int_s^t \left(\sum_{n=1}^{N} \pi_{n-1}\left(S_N(x)_{s,u}\right)\right)\otimes dx_u$$

$$= \underline{1} + \int_s^t \left(\sum_{n=0}^{N} \pi_{n}\left(S_N(x)_{s,u}\right)\right)\otimes dx_u$$

car $\forall i \in [\![1, d]\!]$, $\pi_N\left(S_N(x)_{s,u}\right)\otimes e_i = 0$ (par déf de $\otimes$ sur $T^N(\mathbb{R}^d)$)

ie $$S_N(x)_{s,t} = \underline{1} + \int_s^t S_N(x)_{s,u}\otimes dx_u$$ $\boxtimes$

Remarque Il s'agit d'une équation différentielle typique des intégrales itérées. Bien sûr, sur $\mathbb{R}$ dans le cadre Riemann-intégrable

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{0<u_1<\cdots<u_n<x} du_1\cdots du_n \quad \text{où} \quad \begin{cases} d\exp(t) = \exp(t)\,dt \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

Dans un autre contexte, pour l'exponentielle stochastique.

Pour $h \in L^2(0,1)$:

$$\begin{cases} d\,\mathcal{E}(h)_t = \mathcal{E}(h)_t\, dB_t, & (B_t)_{t\geq 0} \text{ MB} \\ \mathcal{E}(h)_0 = 1 \end{cases}$$

où

$$\mathcal{E}(h)_t = \exp\left(\int_0^t h_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h_s^2\,ds\right) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{0<u_1<\cdots<u_n<t} h(u_1)\cdots h(u_n)\, dB_{u_1}\cdots dB_{u_n},$$

où la somme converge dans $L^2(\mathbb{P})$ (DVP en chaos de Wiener)

Proposition Soient x $C^{1-var}([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ et

$$\phi : [0,T] \longrightarrow [T_1, T_2] \subset [0,T] \quad \text{croissante surjective}$$

Alors $\forall s < t$, $S_N(x \circ \phi)_{s,t} = S_N(x)_{\phi(s), \phi(t)}$

Remarque : cela signifie que $S_N(x)$ ne dépend que de x modulo ses reparamétrisations.

Dém $S_N(x \circ \phi)_{s,\bullet}$ est l'unique solution de

$$\begin{cases} dS_N(x \circ \phi)_{s,t} = S_N(x \circ \phi)_{s,t} \otimes d(x \circ \phi)_t \\ S_N(x \circ \phi)_{s,s} = \underline{1} \end{cases}$$

or

$$S_N(x)_{\phi(s), \phi(t)} = \underline{1} + \sum_{n=1}^{N} \int_{\phi(s) < v_1 < \dots < v_n < \phi(t)} dx_{v_1} \otimes \dots \otimes dx_{v_n}$$

$$= \underline{1} + \int_{\phi(s)}^{\phi(t)} \sum_{n=1}^{N} \pi_{n-1}\left(S_N(x)_{\phi(s), v}\right) \otimes dx_v$$

$$\underset{\text{CVAR}}{=} \underline{1} + \int_s^t S_N(x)_{\phi(s), u} \otimes d(x \circ \phi)_u \qquad \boxtimes$$

Thm (Relation de CHEN) Soit $x \in C^{1-var}([0,T] \to \mathbb{R}^d)$

$\forall s < u < t$,

$$S_N(x)_{s,t} = S_N(x)_{s,u} \otimes S_N(x)_{u,t}$$

Remarque De manière équivalente, si γ et η sont deux chemins, où $\gamma(0) = \eta(T)$ alors

$$\forall T > 0, \quad S_N(\eta \sqcup \gamma)_{0,2T} = S_N(\gamma)_{0,T} \otimes S_N(\eta)_{T,2T}$$

Dém Par récurrence sur N.

$N=1$ $$S_1(x)_{s,u} \otimes S_1(x)_{u,t} = \left(1+\int_s^u dx_r\right) \otimes \left(1+\int_u^t dx_r\right)$$
$$= 1 + \int_s^u dx_r + \int_u^t dx_r = 1 + \int_s^t dx_r$$
$$= S_1(x)_{s,t}.$$

$N \to N+1$ $$S_{N+1}(x)_{s,t} = \underline{1} + \int_s^t S_{N+1}(x)_{s,r} \otimes dx_r$$

$$= \underline{1} + \int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r \quad \text{car} \quad \pi_{N+1}(\underline{a}) \otimes e_i = 0 \quad \forall i, \forall \underline{a}.$$

$$= \underline{1} + \int_s^u S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r + \int_u^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r$$

(HR) $$= \underbrace{\underline{1} + \int_s^u S_{N+1}(x)_{s,r} \otimes dx_r}_{= S_{N+1}(x)_{s,u}} + \underbrace{\int_u^t S_N(x)_{s,u} \otimes S_N(x)_{u,r} \otimes dx_r}_{= S_{N+1}(x)_{s,u} \otimes \left(S_{N+1}(x)_{u,t} - \underline{1}\right)}$$

$$= S_{N+1}(x)_{s,u} \otimes S_{N+1}(x)_{u,t}.$$ $\boxtimes$

Corollaire Soient $x \in C^{1-var}([0,T] \to \mathbb{R}^d)$, et $s < t$.
Alors $S_N(x)_{s,t}$ est inversible sur $1 + t^N(\mathbb{R}^d)$ avec
$$S_N(x)_{s,t}^{-1} = S_N(\overleftarrow{x})_{s,t} \quad \text{où} \quad \overleftarrow{x}(t) = x(T-t).$$

III - Norme de CARNOT - CARATHÉODORY

Définition Pour $\underline{g} \in G^N(\mathbb{R}^d)$, on définit.
$$\|\underline{g}\|_{cc} \hat{=} \inf\left\{ \int_0^1 |d\gamma| \;\middle|\; \gamma \in C^{1-var} \text{ et } \underline{g} = S_N(\gamma)_{0,1} \right\}$$

« Norme CC » car $G^N(\mathbb{R}^d)$ n'est qu'un groupe, pas un EVN.

Propriétés Pour $\underline{g} \in G^N(\mathbb{R}^d)$, il existe $\gamma^* \in C^{1-var}([0,1] \to \mathbb{R}^d)$

tel que
- γ^* Lip
- pour presque tout $r \in [0,1]$, $|\dot{\gamma}^*(r)| = cte$
- $\|\underline{g}\|_{cc} = \int_0^1 |d\gamma^*|$ et $S_N(\gamma^*)_{0,1} = \underline{g}$

Proposition $\|\cdot\|_{cc}$ est une « norme » sur le groupe $(G^N(\mathbb{R}^d), \otimes)$.

① $\|\underline{g}\|_{cc} = 0$ ssi $\underline{g} = \underline{1}$

② Si pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit

$$\delta_\lambda : \left(\underline{g} = \sum_{n=0}^{N} \pi_n(\underline{g}) \longmapsto \sum_{n=0}^{N} \lambda^n \pi_n(\underline{g}) \right)$$

alors $\|\delta_\lambda \underline{g}\|_{cc} = |\lambda| \, \|\underline{g}\|_{cc}$ (homogénéité)

③ $\|\underline{g}\|_{cc} = \|\underline{g}^{-1}\|_{cc}$

④ $\|\underline{g} \otimes \underline{h}\|_{cc} \leq \|\underline{g}\|_{cc} + \|\underline{h}\|_{cc}$.

⑤ $\begin{pmatrix} G^N(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ g & \longmapsto & \|\underline{g}\|_{cc} \end{pmatrix}$ est continue (cf Rmq suivante)

Rq 1 $\|\cdot\|_{cc}$ induit une distance sur $G^N(\mathbb{R}^d)$ via

$$\forall \underline{g}, \underline{h} \in G^N(\mathbb{R}^d), \quad d_{cc}(\underline{g}, \underline{h}) \hat{=} \|\underline{g}^{-1} \otimes \underline{h}\|_{cc}.$$

Rq 2 Si on définit

$$\rho(\underline{g}, \underline{h}) = \max_{0 \leq n \leq N} |\pi_n(\underline{g}) - \pi_n(\underline{h})|$$

alors $i : (G^N(\mathbb{R}^d), d_{cc}) \hookrightarrow (G^N(\mathbb{R}^d), \rho)$

est un homéomorphisme. Les suites convergentes pour d_{cc} sont les m̂ que les suites convergentes pour ρ.

IV - Isométrie entre C^{1-var} et leurs relèvements.

Théorème L'application

$$S_N : \begin{pmatrix} C_0^{1-var}([0,T] \to \mathbb{R}^d) & \longrightarrow & C_0^{1-var}([0,T] \to G^N(\mathbb{R}^d)) \\ x & \longmapsto & S_N(x) = (S_N(x)_{0,t}, t \in [0,T]) \end{pmatrix}$$

est une bijection, avec de plus

$$|x|_{C^{1-var}} = \| S_N(x) \|_{C^{1-var}}$$

Son inverse est donné par

$$\pi_1 : \left(\begin{array}{ccc} C_S^{1-var}([0,T] \to G^N(\mathbb{R}^d)) & \longrightarrow & C_0^{1-var}([0,T] \to \mathbb{R}^d) \\ \underline{x} = (\underline{x}_t, t \in [0,T]) & \mapsto & (\pi_1(\underline{x})_t, t \in [0,T]) \end{array} \right).$$

Notations $\quad C_0^{1-var}([0,T] \to \mathbb{R}^d) = \{ x \in C^{1-var}([0,T] \to \mathbb{R}^d) \mid x_0 = 0 \}$

$$|x|_{C^{1-var}} = \sup_{D \text{ partition}} \sum_{i=0}^{\#D-1} |x_{t_{i+1}} - x_{t_i}|$$

Pour $\underline{x} : [0,T] \longrightarrow G^N(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\underline{x}\|_{C^{1-var}} \hat{=} \sup_{D \text{ partition}} \sum_{i=0}^{\#D-1} d_{cc}(\underline{x}_{t_{i+1}}, \underline{x}_{t_i})$$

$$C_0^{1-var}([0,T] \to G^N(\mathbb{R}^d)) = \left\{ \underline{x} : [0,T] \to G^N(\mathbb{R}^d) \;\middle|\; \begin{array}{l} \|\underline{x}\|_{C^{1-var}} < +\infty \\ \underline{x}_0 = \underline{1} \end{array} \right\}$$

Rq $\quad d_{cc}(S_N(x)_{0,t}, S_N(x)_{0,s}) = \| S_N(x)_{s,t} \|_{cc}$.

Dém $\quad$ • Isométrie $\quad$ s<t.

$$\| S_N(x)_{s,t} \|_{cc} = \inf \left\{ \int_s^t |d\gamma| \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma \; C^{1-var} \\ S_N(x)_{s,t} = S_N(\gamma)_{s,t} \end{array} \right\}$$

$$\leq \int_s^t |dx|$$

d'où $\quad \| S_N(x) \|_{C^{1-var}} \leq \int_0^T |dx| = |x|_{C^{1-var}}$.

Réciproquement, si $S_N(x)_{s,t} = S_N(\gamma)_{s,t}$

$$x_t - x_s = \int_s^t dx = \int_s^t d\gamma = \gamma_t - \gamma_s$$

ie $\quad \left| \int_s^t dx \right| \leq \int_s^t |d\gamma| \quad , \forall \gamma$

d'où $\left| \int_s^t dx \right| \leq \| S_N(x)_{s,t} \|_{cc}$

et $|x|_{C^{1-var}} \leq \| S_N(x) \|_{C^{1-var}}$.

- Bijection

Par définition de S_N

$$\pi_1 \circ S_N = id_{C^{1-var}([0,T] \to \mathbb{R}^d)}.$$

Mq

$$S_N \circ \pi_1 = id_{C^{1-var}(G^N(\mathbb{R}^d))}$$

Soit $\underline{x} \in C_0^{1-var}([0,T] \to G^N(\mathbb{R}^d))$. On note

$$\underline{y}_t = S_N(\pi_1(x)_\cdot)_{0,t}.$$

lemme On note $\omega(s,t) = \|\underline{x}\|_{C^{1-var}([s,t])} + \|\underline{y}\|_{C^{1-var}([s,t])}$

① ω est sur-additive (au-dessus de l'addition)

$\forall s<u<t$ $\omega(s,u) + \omega(u,t) \leq \omega(s,t)$

② $\forall s<t$

$$\left| \log_N(\underline{x}_t^{-1} \otimes \underline{y}_t) - \log_N(\underline{x}_s^{-1} \otimes \underline{y}_s) \right| \leq C_N\, \omega(s,t)^N$$

(on admet le lemme). Si

$h_t = \log_N(\underline{x}_t^{-1} \otimes \underline{y}_t)$ et D partition uniforme

$$|h_{0,t}| \leq \sum_{i=0}^{\#D-1} \left| h_{\frac{(i+1)t}{\#D}} - h_{\frac{it}{\#D}} \right|^{1+1/N - 1/N}$$

$$\leq \underbrace{\max_{0 \leq i \leq \#D-1} \left| h_{\frac{(i+1)t}{\#D}} - h_{\frac{it}{\#D}} \right|^{1-1/N}}_{\xrightarrow{|D| \to 0} 0 \text{ par } UC^0} \underbrace{\sum_{i=0}^{\#D-1} \left| h_{\frac{(i+1)t}{\#D}} - h_{\frac{it}{\#D}} \right|}_{\leq C\, \omega(0,T)}$$

ie $h = 0$.

$\boxtimes$