

Comment compter les tours Eulériens ?

Deturck Théo

October 2024

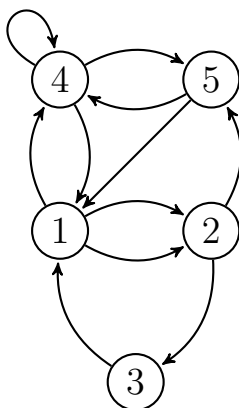
Combien y a t'il de tour Eulériens dans un graphe orienté ? Commençons par définir chacun de ces termes. Un graphe orienté D est la donnée d'un ensemble fini V dont les éléments sont appelés sommets, d'un second ensemble finie E , dont les éléments sont appelés arrêtes, et de deux applications

$$\text{head} : E \rightarrow V, \quad \text{tail} : E \rightarrow V$$

Si a est une arête, et $v_0 = \text{tail}(a)$, $v_1 = \text{head}(a)$, on dit que v_0 est le sommet initial et que v_1 est le sommet final de a . On dit aussi que a va de v_0 vers v_1 , et on écrit

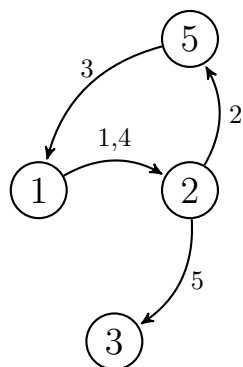
$$v_0 \xrightarrow{a} v_1$$

Concrètement, on le représente par un ensemble de point lié par des flèches. Par exemple

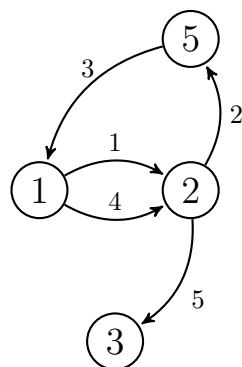


Un chemin est une suite d'arête $a_1, \dots, a_n$ tel que le sommet initial de a_{i+1} soit le sommet final de a_i . Il est dit sans répétition si il ne passe pas deux fois par la même arête.

Chemin avec répétition

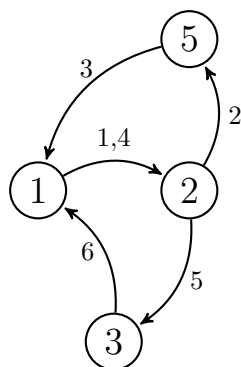


Chemin sans répétition

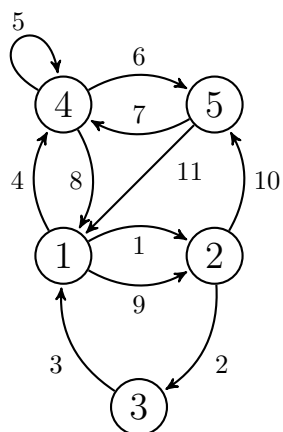


Un tour est un chemin qui revient à son point de départ.

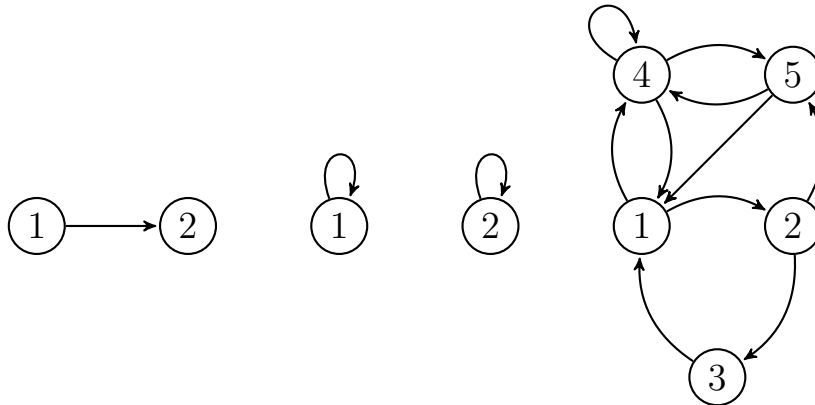
Exemple de tour



Enfin, un tour Eulérien est un tour sans répétition passant par toutes les arêtes. Dans notre graphe exemple, il en existe :



Mais tous les graphes n'ont pas de tour Eulérien. Vous pouvez vérifier que ceux qui suivent n'en ont pas.



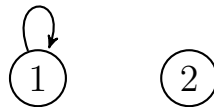
On va donc commencer par chercher des conditions nécessaires pour avoir des tours Eulérien.

1 Quand y a t'il des tours Eulériens ?

Dans les exemples au dessus, le second révèle une condition presque évidente : le graphe doit être connexe. Plus précisément, on a besoin que deux sommets soit toujours lié par un chemin. Dans ce qui va suivre, il suffit en fait que ceux soit le cas pour la version non orienté de ce graphe, les autres conditions garantiront en fait que ce soit aussi le cas dans le graphe orienté.

Définition 1.1. *On dit que le graphe D est connexe si entre deux sommets, il existe toujours un chemin non orienté (c'est-à-dire que l'on peut prendre les arêtes dans les deux sens) les connectant.*

Plus précisément, puisque dans la définition de tour Eulérien on ne parle que de passer par toutes les arêtes, et non par tous les sommets, le graphe suivant admet un chemin Eulérien :



Ce genre d'exemple étant artificiel, on va demander que le graphe n'ait pas de sommet isolé, c'est-à-dire de sommet qui n'est ni sommet initial, ni sommet final d'une arête du graphe. La condition de connexité n'est malheureusement pas suffisante, comme le troisième exemple le montre. Pour trouver une condition supplémentaire, considérons ce quatrième exemple :



Ici le problème vient du fait que 1 est le sommet initial d'une seule arête, mais est le sommet final de deux arêtes. Or dans un tour, il est clair que l'on entre autant de fois que l'on en sort. Plus précisément, on résume ces propriétés initiales dans le lemme suivant :

Lemme 1.1. *Soit*

$$v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} v_n$$

Alors, pour tout sommet $v \neq v_0, v_n$, on a

$$\begin{aligned} & \#(j \mid v \text{ est le sommet initial de } a_j) \\ &= \#(j \mid v \text{ est le sommet final de } a_j) \\ &= \#(j \mid v = v_j) \end{aligned}$$

De plus, si $v_0 = v_n$, alors le résultat est aussi vrai pour $v = v_0 = v_n$. En revanche, si $v_0 \neq v_n$, alors

$$\begin{aligned} & \#(j \mid v_0 \text{ est le sommet initial de } a_j) \\ &= \#(j \mid v_0 \text{ est le sommet final de } a_j) + 1 \\ &= \#(j \mid v_0 = v_j) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \#(j \mid v_n \text{ est le sommet initial de } a_j) \\ &= \#(j \mid v_n \text{ est le sommet final de } a_j) - 1 \\ &= \#(j \mid v_n = v_j) - 1 \end{aligned}$$

En appliquant ce lemme à un tour Eulérien, et en notant pour un sommet v ,

$$\text{Outdeg}(v) = \#(a \in E \mid v \text{ est le sommet initial de } a)$$

$$\text{Indeg}(v) = \#(a \in E \mid v \text{ est le sommet final de } a)$$

on voit que si le graphe admet un tour Eulerien, alors pour tout sommet v ,

$$\text{Outdeg}(v) = \text{Indeg}(v)$$

Autrement dit, tous sommet du graphe a autant d'arête qui y entre que d'arête qui en sort.

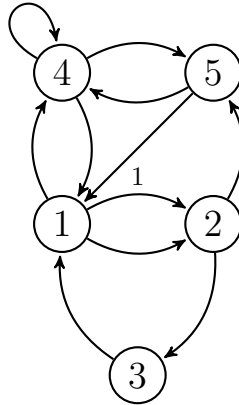
Définition 1.2. Un graphe est dit équilibré si pour tout sommet v ,

$$\text{Outdeg}(v) = \text{Indeg}(v)$$

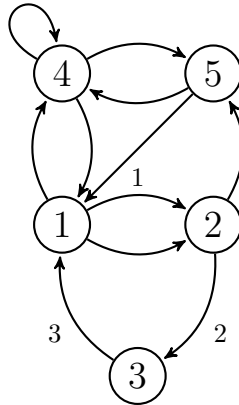
On a donc besoin d'un graphe connexe, sans point isolé, et équilibré. Ces conditions sont elles suffisantes ? Oui !

Théorème 1.2. Un graphe dirigé (sans sommet isolé) admet un tour Eulérien si et seulement si il est connexe et équilibré.

On va expliciter la preuve de ce théorème en présentant comment construire un tour Eulerien. D'abord, on montre comment construire un tour sans répétition commençant par n'importe quelle arête. La méthode générale est simple : on part de notre arête, et on choisit chacune des arêtes qui suit comme on le veut parmi les arête par encore choisis. On reprend notre exemple habituelle,



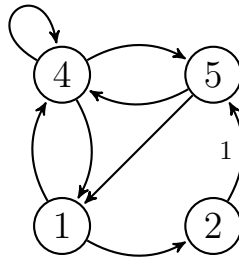
On va construire un tour commençant par l'arête labellé par 1. On peut maintenant choisir n'importe quelle arête partant de 2, par exemple celle allant vers 3. Il n'y a alors plus qu'un seul choix d'arête, celle de 3 vers 1, et on obtient un tour.



La méthode marche pour la raison suivante. Si on a construit pour chemin sans répétition

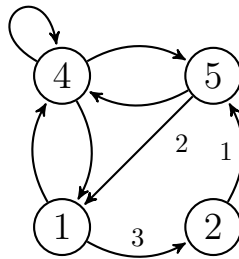
$$v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} v_n$$

et que $v_0 \neq v_n$, le lemme nous indique que le nombre d'arête dans le chemin ayant pour sommet final v_n est égale au nombre d'arête dans le chemin l'ayant pour sommet initial $+1$. Puisque le graphe est équilibré, cela montre que l'on a pas choisis toutes les arêtes qui partent de v_n . On peut donc choisir une arête a_{n+1} partant de v_n pour continuer le chemin. Ce processus finit par s'arrêter, puisque le nombre d'arête est finis. On finit donc bien par revenir à v_0 , et on construit bien un tour sans répétition. Ceci étant fait, l'exemple au dessus montre bien que l'on obtient pas encore un tour Eulerien. Comment le compléter ? Pour cela retirons le tour trouvé.

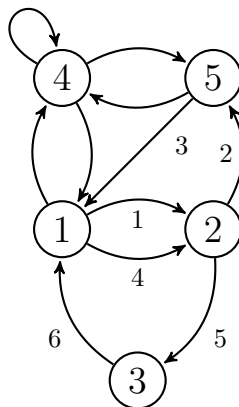


③

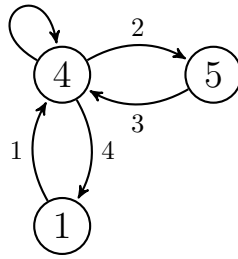
Une fois retiré le sommet isolé, on retrouve un graphe équilibré. On peut donc choisir une arête partant d'un sommet sur le tour précédent (donc 1 ou 2), et construire un tour sans répétition sur ce nouveau graphe. Par exemple, si on part de l'arête labellé par 1, on peut construire le tour



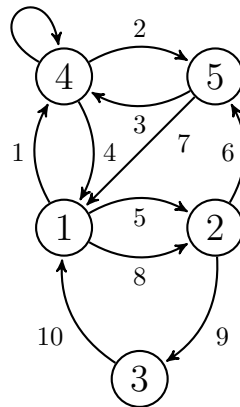
On peut ensuite l'insérer dans le tour précédent, en le plaçant à un moment où on passe par 2, pour construire un plus grand tour.



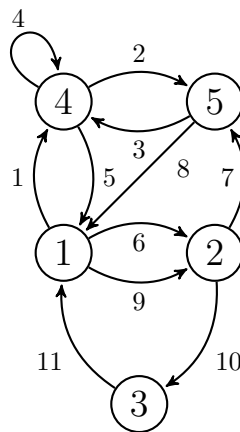
Encore une fois, en retirant ce tour, on obtient un graphe équilibré, et on peut donc construire un tour partant d'un des sommets où passe ce grand tour, par exemple.



On attache ce tour, et on obtient



Il ne manque plus que la boucle du sommet 4, que l'on peut insérer à n'importe qu'elle moment où le tour au dessus y passe. On trouve alors un tour Eulerien, comme par exemple



Le fait que le graphe obtenus en soit équilibré est général. Puisque l'on retire toutes les arêtes d'un tour sans répétition, et que dans un tour, chaque sommet v a autant d'arête entrante dans le tour que d'arête sortante, on diminue $\text{Outdeg}(v)$ et $\text{Indeg}(v)$ par le même nombre. Puisqu'il était égale avant, il le sont donc encore après. Maintenant, la connexité du graphe assure que si le tour construit n'est pas Eulerien, alors il passe par un sommet qui a une arête sortante qui n'est pas dans le tour. On construit alors un tour partant de cette arête, et on l'insère pour créer

un plus grand tour, et ceux jusqu'à obtenir un tour Eulérien. Ce raisonnement donne la preuve qui suit.

Démonstration. On a déjà vu que les conditions sont nécessaires. On montre qu'elles sont suffisantes.

Étape 1 : On montre que chaque arête est le début d'un tour sans répétition.

Soit $v_0 \xrightarrow{a_0} v_1$ une arête. On construit par récurrence un chemin sans répétition

$$v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} v_n$$

jusqu'à ce que $v_n = v_0$. On considère donc construit le chemin du dessus, qu'il est sans répétition, et que $v_n \neq v_0$. Alors, d'après le lemme, puisque le chemin est sans répétition :

$$\begin{aligned} \text{Outdeg}(v_n) &= \text{Indeg}(v_n) \\ &\geq \#(j \mid v_n \text{ est le sommet final de } a_j) \\ &= \#(j \mid v_n \text{ est le sommet initial de } a_j) + 1 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des arêtes a_j ayant pour sommet initial v_n est un sous ensemble propre de l'ensemble des arêtes du graphe ayant pour sommet initial v_n . On peut donc trouver une arête $v_n \xrightarrow{a_{n+1}} v_{n+1}$ différente de $a_0, \dots, a_{n-1}$. On le plaçant à la fin du chemin, on construit un nouveau chemin sans répétition plus long

$$v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} v_n \xrightarrow{a_n} v_{n+1}$$

Ce processus doit se terminer, car le nombre d'arête du graphe est fini. Ceci ne peut arriver que si le dernier sommet v_n est égale à v_0 , donnant ainsi un tour sans répétition.

Étape 2 : Soit

$$v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} v_n = v_0$$

un tour sans répétition. On montre que si ce n'est pas un tour Eulerien, alors on peut construire un tour sans répétition plus grand (en nombre d'arête).

Supposons que le tour ne soit pas Eulerien. Par connexité, il existe j tel que v_j soit le sommet initial (ou sommet final, mais dans ce cas il est aussi sommet initial d'une autre arête qui n'est pas dans le tour, car le graphe est équilibré) d'une arête $v_j = w_0 \xrightarrow{b_0} w_1$ qui ne soit pas dans le chemin. En effet, si ce n'était pas le cas, alors le sous-graphe constitué des arêtes et des sommets du tours formeraient une partie connexe du graphe.

Considérons le graphe obtenue à partir du graphe original en retirant les arêtes a_j . Alors le graphe obtenue est équilibré. Donc il existe à l'intérieur de ce graphe un tour sans répétition

$$v_j = w_0 \xrightarrow{b_0} w_1 \xrightarrow{b_1} \dots \xrightarrow{b_{m-1}} w_m = v_j$$

Alors

$$v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{j-1}} v_j = w_0 \xrightarrow{b_0} w_1 \xrightarrow{b_1} \dots \xrightarrow{b_{m-1}} w_m = v_j \xrightarrow{a_j} v_{j+1} \xrightarrow{a_{j+1}} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} v_n = v_0$$

est un tour sans répétition plus long. On construit ainsi un tour Eulerien, en partant d'un tour sans répétition quelconque, et en l'agrandissant par le processus au dessus, jusqu'à obtenir un tour Eulerien. $\square$

On a vu sur notre exemple que, pour construire un tour Eulerien, il y a un grand nombre de choix à faire, et on se doute donc qu'il y a un grand nombre de tour Eulerien. Pour le graphe d'exemple, il y en a déjà 264. Comment les compter ?

2 Tour Eulerien et arbre

D'abord, remarquons que le choix de la première arête n'est pas très important. En effet, si

$$v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} v_n = v_0$$

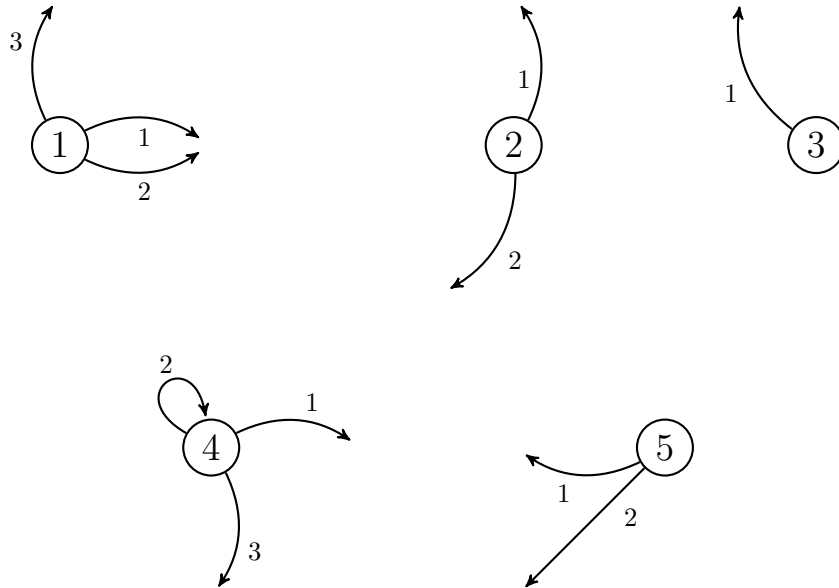
est un tour Eulerien, alors il en est de même pour

$$v_i \xrightarrow{a_i} v_{i+1} \xrightarrow{a_{i+1}} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} v_n = v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_{i-1}} v_i$$

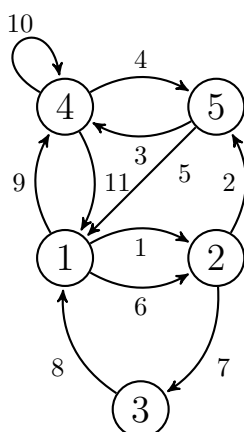
Puisque toutes les arêtes sont dans les a_i , il y a autant de tour Eulerien commençant par a_0 qu'il y en a commençant par n'importe quelle autre arête choisie. Cela montre que, si a est une arête quelconque, le nombre de tour Eulerien est

$$\text{nombre de tour Eulerien} = \text{nombre de tour Eulerien commençant par } a \times \text{nombre d'arête}$$

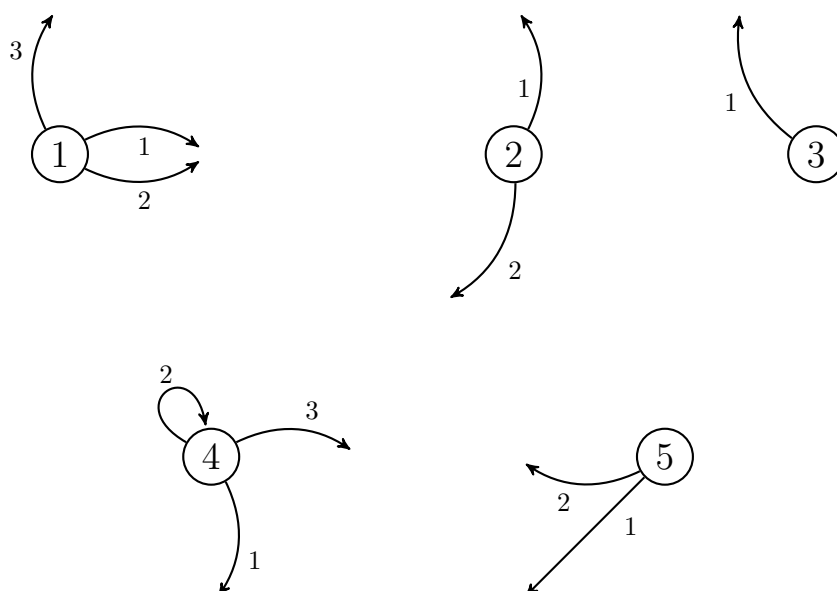
Maintenant, une manière simple de faire un grand nombre de choix en combinatoire est d'imposer des ordres (totaux) sur nos ensembles de choix. On prend alors à chaque fois que l'on doit faire un choix, le choix le plus petit par rapport à cet ordre. Dans notre cas, à chaque fois que l'on arrive à un sommet, on doit choisir une arête de sortie. Donner un ordre sur ces ensembles nous permet donc de construire un tour sans répétition. Par exemple, sur notre exemple, si on donne les ordres suivants :



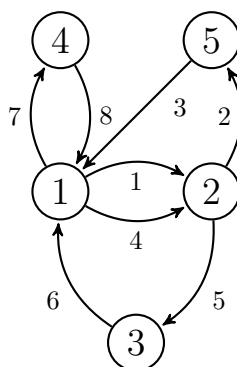
On part du sommet 1, et on avance en choisissant à chaque fois l'arête avec le plus petit numéro non choisis. Dans cet exemple, cela donne :



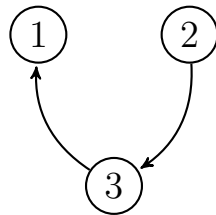
On obtient un tour Eulerien. Mais ce n'est pas le cas à chaque fois. En effet, si on essaye avec les ordres :



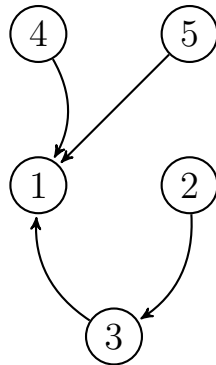
on trouve (en n'affichant pas les arêtes non utilisés)



Le fait de se donner des ordres ne suffit donc pas. Pour avoir des tours Eulériens, il faut que toutes les arêtes soient choisies. Puisque les dernières choisies sont toujours les dernières dans chacun des ordres, il suffit que celle-ci soit choisie. Puisque c'est toujours le cas pour celle partant du sommet 1 (sinon on pourrait continuer notre tour), on peut exclure celle-ci. Représentons les autres sur le graphe. Pour ce deuxième exemple, ce sont les arêtes :



On voit un cycle entre 4 et 5, et un chemin de 2 vers 1, passant par 3. Pour l'instant, on ne voit pas grand chose. Faisons le même exercice avec notre premier exemple.



Dans ce cas, on voit un beau arbre orienté, enraciné au sommet 1.

Définition 2.1. *Un arbre orienté, enraciné en un sommet v , est un graphe orienté où pour tout sommet w , il n'y a qu'un seul chemin de w à v .*

Si on essaye avec d'autre ordre, on voit que l'on retrouve un tel arbre dès que l'ordre donne un tour Eulerien. C'est un fait générale.

Lemme 2.1. *Soit D un graphe orienté, connexe, sans point isolé, et soit*

$$t : v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} v_n = v_0$$

un tour Eulerien de D . Posons, pour un sommet v de D ,

$$E_v = \{a \in E \mid v \text{ est le sommet initial de } a\}$$

t détermine un ordre sur chacun des E_v : si $a, a' \in E_v$, alors $a < a'$ si a arrive avant a' dans t , c'est-à-dire si $a = a_i$, $a' = a_j$ avec $i < j$. Posons T le sous-graphe de D constitué des arêtes maximales pour cet ordre, sauf celle de v_0 . Alors T est un arbre orienté en v_0 .

Démonstration. On veut montrer que tout sommet v de D est lié par un unique chemin à v_0 dans T . Puisqu'aucune arête ne part de v_0 par définition, c'est le cas pour $v = v_0$. Pour $v \neq v_0$, il n'y a qu'une seule arête partant de v dans T . Plus précisément, si $v = v_{j_0}$ est la dernière apparition de v dans le tour t , cette arête est $v_{j_0} \xrightarrow{a_{j_0}} v_{j_0+1}$. Si $v_{j_0+1} = v_0$, on a trouvé l'unique chemin, sinon, si $v_{j_1} = v_{j_0+1}$ est la dernière apparition de v_{j_0+1} dans le tour t , alors il n'y a qu'une seule arête dans T partant de v_{j_0+1} , l'arête $v_{j_0+1} = v_{j_1} \xrightarrow{a_{j_1}} v_{j_1+1}$. On construit ainsi un chemin

$$v = v_{j_0} \xrightarrow{a_{j_0}} v_{j_0+1} = v_{j_1} \xrightarrow{a_{j_1}} \dots \xrightarrow{a_{j_{r-1}}} v_{j_{r-1}+1} = v_{j_r}$$

s'arrêtant lorsque $v_{j_r} = v_0$, ce qui arrive puisque chaque arête du chemin arrive toujours après dans le tour que l'arête qui la précède. Puisqu'aucun choix ne peut être fait, ce chemin est forcément unique. $\square$

Ceci nous donne une condition sur les ordres qui donnent par ce processus des tours Eulerien. Est-ce que cette condition est suffisante? La réponse est oui!

Proposition 2.2. *Soit D un graphe orientée, équilibré, connexe, sans sommet isolé, et soit, pour tout sommet v de D , un ordre $\leq_v$ un ordre total sur E_v . On fixe un sommet v_0 . On construit un tour sans répétition sur D par récurrence de la façon suivante.*

- On pose $a_0 = \min(E_{v_0})$, et on donc un chemin $v_0 \xrightarrow{a_0} v_1$.
- On suppose construit un chemin sans répétition

$$v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{i-1}} v_i$$

Si $E_{v_i} \setminus \{a_0, \dots, a_{i-1}\}$ n'est pas vide, on pose $a_i = \min(E_{v_i} \setminus \{a_0, \dots, a_{i-1}\})$, et on construit le chemin sans répétition

$$v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{i-1}} v_i \xrightarrow{a_i} v_{i+1}$$

Sinon, si $E_{v_i} \setminus \{a_0, \dots, a_{i-1}\}$ est vide, alors $v_i = v_0$, et on s'arrête.

Le tour construit par ce processus est un type Eulerien si et seulement si le sous-graphe T , construit comme dans la proposition précédente, est un arbre orienté (enraciné en v_0).

Démonstration. On a déjà vu que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Si le tour construit

$$v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} v_n \xrightarrow{a_n} v_0$$

n'est pas Eulerien, alors il existe un sommet v de D tel que $E_v \not\subseteq \{a_0, \dots, a_n\}$, c'est-à-dire qu'une arête de v n'est pas utilisée. Par construction, $v \neq v_0$. Choisissons un tel v de distance minimal à v_0 dans T (le chemin entre v et v_0 dans T est le plus court possible). Par construction, l'arête $a = \max(E_v)$ n'a pas été utilisée. Posons $v \xrightarrow{a} w$. Puisque l'on a choisi v de distance minimal à v_0 , on a $E_w \subseteq \{a_0, \dots, a_n\}$. Mais puisque le graphe est équilibré,

$$\begin{aligned} \text{Indeg}(w) &= \text{Outdeg}(w) \\ &= \#(j \mid w \text{ est le sommet initial de } a_j) \\ &= \#(j \mid w \text{ est le sommet final de } a_j) \end{aligned}$$

et donc toutes les arêtes ayant pour sommet final de w sont dans le tour, et en particulier a , ce qui est absurde. Donc le tour est Eulerien. $\square$

On a donc montré qu'il y a une bijection entre tours Eulerien de D , et les ordres satisfaisant cette propriété. Or, construire un tel ordre revient à trouver un arbre dans D , puis de fixer un ordre sur les arêtes qui ne sont pas dans l'arbre. On en déduit

Proposition 2.3. Soit D un graphe orienté, équilibré, connexe, et soit $v_0 \xrightarrow{a} v_1$ une arête de D , alors le nombre $\epsilon(D, a)$ de tour Eulérien commençant par a est donnée par

$$\epsilon(D, a) = \tau(D, v_0) \left(\prod_{v \in V} (\text{Outdeg}(v) - 1)! \right)$$

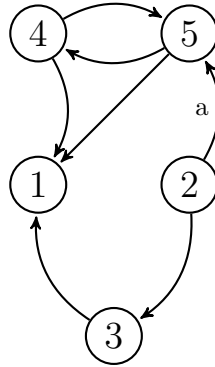
où $\tau(D, v_0)$ est le nombre d'arbre de D enraciné en v_0 .

On est donc ramené à compter le nombre d'arbre orienté dans le graphe. Remarquons que, puisque le nombre de tour Eulérien commençant par une arête a est égal au nombre de tour Eulérien commençant par une autre arête b quelconque, la proposition au dessus à un corollaire simple :

Corollaire 2.4. Le nombre $\tau(D, v)$ ne dépend pas du sommet v choisit.

3 Le théorème Matrice-Arbre

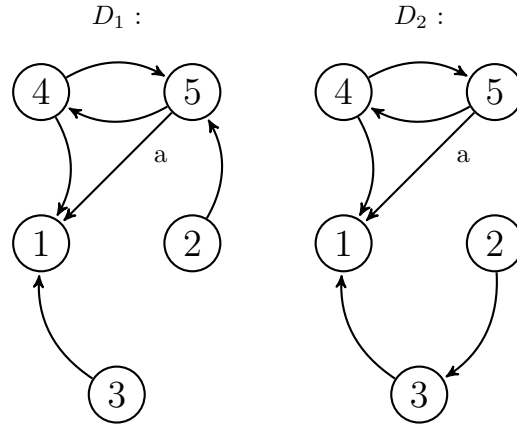
Essayons d'abord de compter le nombre d'arbre enraciné au sommet 1 dans notre exemple. On peut commencer par enlever toutes les arêtes sortant de 1, qui ne peuvent pas être dans cet arbre, ainsi que les boucles, qui ne le peuvent pas non plus. Notre exemple est donc :



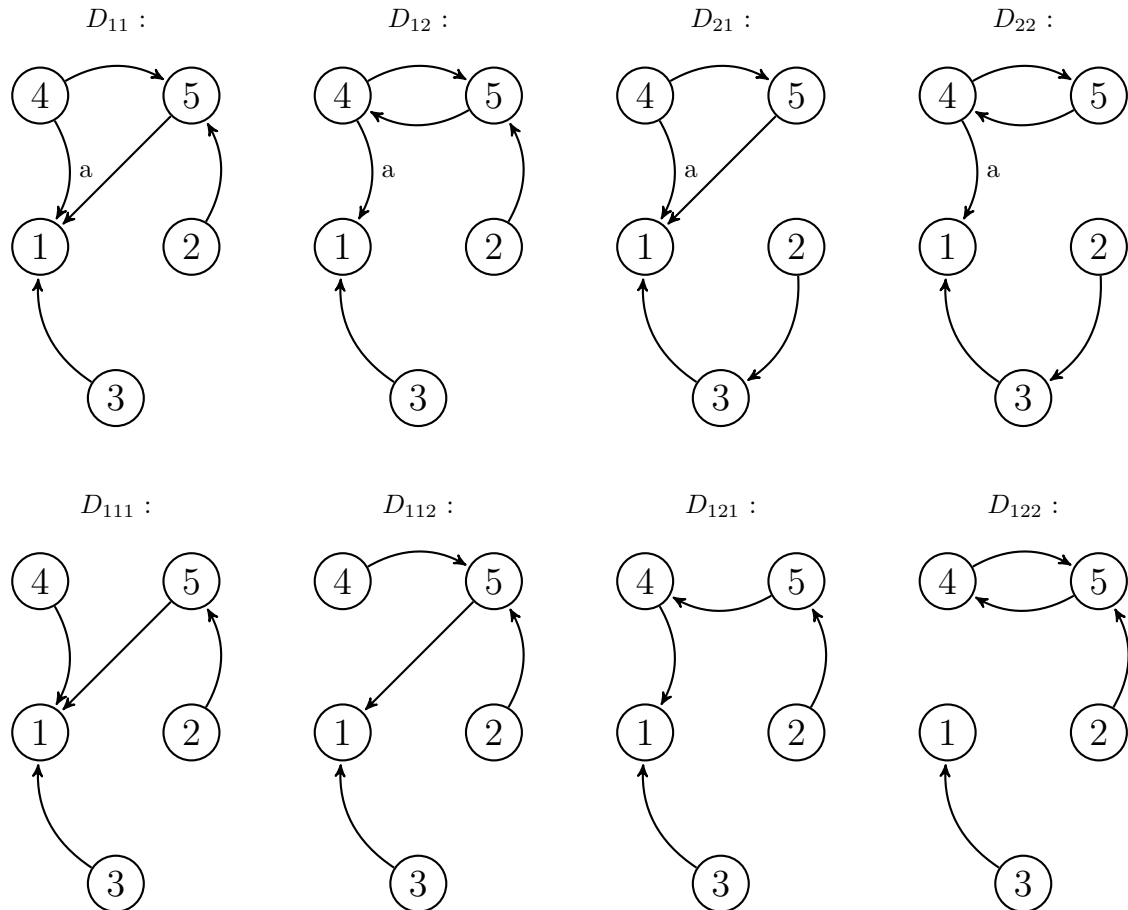
Commençons par remarquer le simple fait suivant. Étant donné un graphe orienté D , et v_0, v deux sommet distinct de D . Enfin, soit a une arête sortant de v . Posons D_1 le graphe obtenue à partir de D au quelle on a retiré les arêtes sortant de v sauf a , et D_2 le graphe obtenue à partir de D en retirant cette fois uniquement a . Un arbre de D enraciné en v_0 soit contient a , et est alors un arbre de D_1 enraciné en v_0 mais pas de D_2 , ou ne contient pas a et est alors un arbre de D_2 mais pas de D_1 . Donc

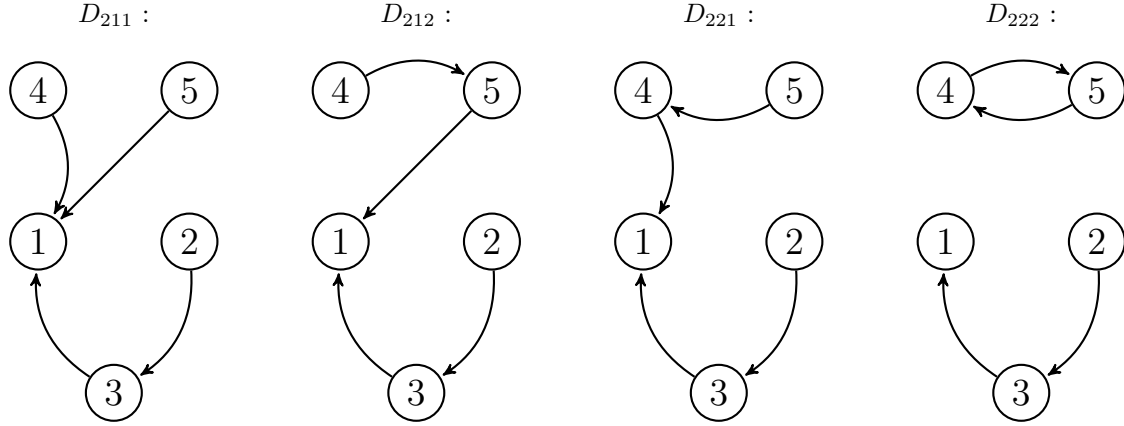
$$\tau(D, v_0) = \tau(D_1, v_0) + \tau(D_2, v_0)$$

Dans notre exemple,



Ce processus permet peu à peu de simplifier le graphe pour compter le nombre d'arbre. On choisit à chaque fois un sommet d'où plusieurs arête parte, on choisit une de ces arête a , on construit D_1 et D_2 , et ceux-ci ont strictement moins d'arête. On répète le processus avec D_1 et D_2 pour construire D_{11}, D_{12}, D_{21} et D_{22} , et ainsi de suite jusqu'à ce que de chaque sommet ne parte qu'une arête dans chacun des graphes construits. Par exemple





Et il suffit maintenant de compter le nombre d'arbre, ici il y a $D_{111}, D_{112}, D_{121}, D_{211}, D_{212}, D_{221}$, donc 6. Le nombre de tour Eulérien est donc

$$11 \times 6 \times (2)!(1)!(1)!(2)!(1)! = 66 \times 4 = 264$$

Cette méthode permet de compter le nombre d'arbre facilement pour des petits graphes, mais sur des graphes plus grand, ou sur des familles de graphes, il semble difficile de l'utiliser. Pour trouver une méthode plus calculatoire, il est pratique de représenter les graphes d'une autre façon. Pour cela, on introduit la matrice Laplacienne du graphe. Elle est définie comme suit.

Définition 3.1. Soit D un graphe orienté, avec pour ensemble de sommets V . On numérote les sommets $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. La matrice Laplacienne de D est la matrice $L(D)$ donnée par

$$L(D)_{i,j} = \begin{cases} -m_{ij} & \text{si } i \neq j \text{ et qu'il y a } m_{ij} \text{ arête allant de } v_i \text{ à } v_j \\ \text{Outdeg}(v_i) - m_{ii} & \text{si } i = j \text{ et qu'il y a } m_{ii} \text{ boucle au sommet } v_i \end{cases}$$

Plusieurs remarque sur $L(D)$. Premièrement, c'est une matrice représentant fidèlement D sans les boucles. Mais ceux-ci ne pouvant être dans aucun arbre, cela ne sera pas un problème. Deuxièmement, la somme des entrées d'une même ligne est égale à 0. Troisièmement, si D est équilibré, c'est aussi le cas pour chaque colonne. Si D est notre graphe d'exemple,

$$L(D) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour la suite, retirons la première ligne, qui ne nous intéresse pas, puisqu'elle correspond aux arête partant de 1. Pour D , on s'intéresse donc à

$$\tilde{L}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

De l'autre coté

$$\tilde{L}(D_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}(D_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce que l'on remarque est que seule la première ligne change, et que la première ligne de D_1 + la première ligne de D_2 = la première ligne de D . Si on le compare à l'égalité

$$\tau(D, 1) = \tau(D_1, 1) + \tau(D_2, 1)$$

ce que l'on remarque est qu'il y a une sorte de bilinéarité. On est donc sur la bonne voie. Regardons ce qu'il se passe pour les arbres

$$\tilde{L}(D_{111}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De l'autre coté

$$\tilde{L}(D_{122}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il n'est à priori pas facile de trouver une différence entre les matrices qui expliqueraient pourquoi l'un est un arbre mais pas l'autre. Mais on peut regarder les mineurs des matrices. Si on regarde les mineurs les plus gros, on remarque que le déterminant de la matrice une fois retiré la première ligne est 1 pour $\tilde{L}(D_{111})$ est 1, tandis que celui de $\tilde{L}(D_{122})$ est 0. Plus généralement, on voit que ce déterminant est effectivement 1 quand la matrice vient d'un arbre, et 0 sinon. On peut aussi remarquer que celui de la matrice D est 6. ce n'est pas étonnant, au vue de la bilinéarité, qui permet de ramener le calcul à celui des arbres. On peut donc conjecturer que c'est le cas en général. La réponse est oui.

Théorème 3.1. *Soit D un graphe orienté avec ensemble de sommet $\{v_1, \dots, v_n\}$. On définit $L_0(D)$ comme la matrice Laplacienne $L(D)$ où on a retiré la k -ième ligne et colonne. Alors*

$$\det(L_0(D)) = \tau(D, v_k)$$

Pour le prouver, cela se fait par récurrence sur le nombre d'arête de D . D'abord, on montre le résultat si D n'est pas connexe (dans ce cas, $\tau(D, v_k) = 0$, donc on doit montrer $\det(L_0) = 0$). Puis on montre le résultat pour les sous-graphes de D connexes avec le nombre minimum d'arête, c'est-à-dire les arbres (avec $n - 1$ arête). Enfin, on utilise nos remarque sur la bilinéarité pour l'hérédité.

Il y a un corollaire à ce théorème qui est utile dans certaine application, qui relie $\det(L_0)$ avec les valeurs propres de $L(D)$. Celui-ci se base sur le lemme suivant.

Lemme 3.2. *Soit M une matrice $n \times n$ tel que les somme des entrées de chaque lignes et de chaque colonnes sont 0. Soit M_0 la matrice obtenue à partir de M en retirant la i -ième ligne et la j -ième colonne. Alors le coefficient de x dans le polynôme caractéristique $\det(M - xI)$ de M est égal à $(-1)^{i+j+1}n \det(M_0)$.*

En utilisant cela, ainsi que des propriétés basiques des polynômes caractéristiques, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.3. *Soit D un graphe orienté équilibré avec n sommet et matrice Laplacienne L . Supposons que les valeurs propres de L sont $\mu_1, \dots, \mu_n$ avec $\mu_n = 0$. Alors pour tout sommet v de D ,*

$$\tau(D, v) = \frac{1}{n} \mu_1 \cdots \mu_{n-1}$$

4 Application : compter le nombre de suite de Bruijn binaire

On présente maintenant une application combinatoire ne relevant pas de la théorie des graphes.

Définition 4.1. *Une suite binaire est une suite de 0 et de 1. Une suite de Bruijn (binaire) de degré n est une suite circulaire (indexé par un groupe cyclique) binaire $A = a_0 \dots a_{m-1}$ tel que toute suite binaire $b_0 \dots b_{n-1}$ de longueur n apparaît exactement une fois comme un facteur de A , c'est-à-dire qu'il existe un unique i tel que $b_0 \dots b_{n-1} = a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-1}$.*

Par exemple, 01 est une suite de Bruijn de degré 1, tout comme 10 (qui en est juste un décalage). Les suites suivantes sont les suites de Bruijn binaires de degré 2,

$$0011, \quad 0110, \quad 1100, \quad 1001$$

(chacune de ces suites sont obtenus à partir de la première, en décalant les entrées, i.e si $A = a_0 a_1 a_2 a_3$ est la première suite, les autres sont respectivement $a_1 a_2 a_3 a_0$, $a_2 a_3 a_0 a_1$ et $a_3 a_0 a_1 a_2$).

Noter que puisqu'il y a 2^n suite binaire de longueur n , la longueur d'une suite de Bruijn de degré n est 2^n , chaque entrée étant le début d'une nouvelle suite binaire de longueur n . De plus, comme on l'a vu au dessus, les décalages de suites de Bruijn binaires sont des suites de Bruijn binaires. Cela donne une relation d'équivalence sur les suites de Bruijn.

Définition 4.2. *Soit $A = a_0 \dots a_{2^n-1}$ et $B = b_0 \dots b_{2^n-1}$ deux suite de Bruijn de degré n . On dit que A et B sont équivalente si il existe i tel que*

$$B = a_i \dots a_{2^n-1+i}$$

Chaque classe d'équivalence par cette relation à un unique représentant commençant par n zéros. En effet, dans toute suite de Bruijn de degré n , il y a par définition un moment où il y a n zéros de suite, et un seul tel moment, et donc un seul décalage de cette suite commençant par n zéros. Avec cette relation d'équivalence, il n'y a que deux suite de Bruijn de degré 3 non équivalente :

$$00010111, \quad 00011101$$

A priori, il n'est pas clair que des suites de Bruijn existe pour tout n . Mais, en utilisant la théorie des graphes, on va montrer qu'il en existe, et que de plus, il y en a beaucoup. Par exemple, le nombre de suite de Bruijn non équivalente de degré 8 est égal à

$$1329227995784915872903807060280344576 > 10^{37}$$

Comment utiliser ce que l'on a vu avant ? Il faut pour cela construire un graphe où les tours Eulérien correspondrait à des suites de Bruijn, et donc les arêtes à des suites binaires de longueurs n . De plus, il faudrait que deux arêtes lié

$$v_0 \xrightarrow{a_0 \dots a_{n-1}} v_1 \xrightarrow{b_0 \dots b_{n-1}} v_2$$

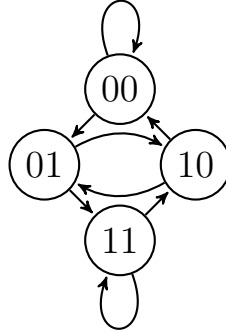
soit donnée par des suites se trouvant l'une à la suite de l'autre dans la suite de Bruijin, et donc vérifie $a_1...a_{n-1} = b_0...b_{n-2}$. Cela motive de numérotter les sommets par des suites binaires de longueurs $n - 1$, et plus généralement, motive la définition du graphe suivant.

Définition 4.3. On définit le graphe orienté D_n de la façon suivante :

- L'ensemble V_n des sommets est l'ensemble des suites binaires de longueurs $n - 1$.
- Si $a = a_1...a_{n-1}$ et $b = b_1...b_{n-1}$ sont deux sommets, il y a une arête de a vers b si et seulement si $a_2...a_{n-1} = b_1...b_{n-2}$.

Par exemple,

D_3 :



Plusieurs remarques :

- Le graphe D_n a 2^{n-1} sommets.
- Le graphe D_n a 2^n arête, en bijection avec les suites binaires de longueurs n . En effet, l'arête $a \rightarrow b$ correspond à la suite $a_1a_2...a_{n-1}b_{n-1} = a_1b_1b_2...b_{n-1}$.
- Chaque sommet a de D_n est sommet initial de deux arête : si $a = a_0...a_{n-2}$, ces deux arêtes sont

$$a = a_0...a_{n-2} \rightarrow a_1...a_{n-2}0, \quad a = a_0...a_{n-2} \rightarrow a_1...a_{n-2}1$$

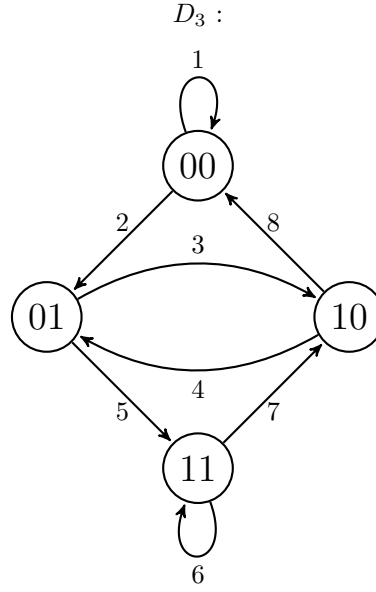
- De même, chaque sommet a de D_n est sommet final de deux arête :

$$0a_0...a_{n-3} \rightarrow a = a_0...a_{n-2}, \quad 1a_0...a_{n-3} \rightarrow a = a_0a_1...a_{n-2}$$

- En particulier, le graphe est équilibré.
- Le graphe est connexe. Encore mieux, si a et b sont deux sommets de D_n , il existe un unique chemin de a vers b de longueur $n - 1$, donnée par

$$a = a_0...a_{n-2} \rightarrow a_1...a_{n-2}b_0 \rightarrow a_2...a_{n-2}b_0b_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_{n-2}b_0b_1...b_{n-3} \rightarrow b_0b_1...b_{n-2} = b$$

On voulait qu'une suite de Bruijin de degré n correspond à un tour Eulérien du graphe D_n . Sur le graphe D_3 , on a par exemple pour tout Eulérien :



Si on identifie les arêtes aux suites de longueurs $n = 3$ comme au dessus, on trouve la suite

$$000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100$$

donc toutes les suites de longueurs n , comme attendu. Maintenant, du fait de la condition sur les arête lié, on voit que la fin d'une suite de longueur n dans cette suite est le début de la suivante, et on peut donc les fusionner pour obtenir une suite de Bruijin :

$$00010111$$

(la fin de 100 est fusionné avec le début de 000, et se retrouve donc au début). C'est une conséquence directe de la condition sur les arête lié que c'est le cas en général, et on a donc une bijection :

$$\{\text{Suite de Bruijin de degré } n\} \longleftrightarrow \{\text{Tour Eulérien de } D_n\}$$

(il est facile à partir d'une suite de Bruijin de reconstruire le tour correspondant, puisque les suites de longueurs n sont en bijections avec les arêtes). On voit aussi que la condition de non équivalence correspond juste à commencez par la boucle $00\dots 0 \rightarrow 00\dots 0$, donc on a une bijection

$$\{\text{Classe d'équivalence des suites de Bruijin de degré } n\} \longleftrightarrow \{\text{Tour Eulérien de } D_n \text{ commençant par une arête fixé}\}$$

On veut donc calculer les valeurs propres de $L(D_n)$. Pour cela, on introduit la matrice adjacente de D_n , c'est-à-dire la matrice A dont les lignes et colonnes sont indexé par les sommets de D_n , et tel que

$$A_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \rightarrow b \text{ est une arête de } D_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notre remarque sur le nombre de chemins de longueur $n - 1$ entre deux sommets du graphes impliquent

$$A_{ab}^{n-1} = 1 \quad \forall a, b \in V_n$$

et donc à pour valeur propre 0 avec multiplicité $2^{n-1} - 1$ et 2^{n-1} avec multiplicité 1. Or, si A a pour valeur propre $\lambda_1, \dots, \lambda_{2^{n-1}}$, alors A^{n-1} a pour valeur propre les valeurs propres de A^{n-1} sont $\lambda_1^{n-1}, \dots, \lambda_{2^{n-1}}^{n-1}$. Donc les valeurs propres de A sont 0 avec multiplicité $2^{n-1} - 1$ et 2ζ avec multiplicité 1 où ζ est une racine de l'unité à déterminer. Mais puisque D_n n'a que deux boucles, la trace de A est 2, donc $\zeta = 1$. C'est intéressant mais quel lien avec $L(D_n)$? Est bien on a

$$L(D_n) = 2 \text{id} - A$$

et donc les valeurs propres de $L(D_n)$ sont 2 avec multiplicité $2^{n-1} - 1$ et 0 avec multiplicité 1. On en déduit que le nombre de suite de classe d'équivalence de suite de Bruijin de degré n est

$$B_0(n) = \frac{1}{2^{n-1}} 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}-n}$$