

# Vrac II

## Table des matières

1	Lemme de Siegel	2
2	Théorèmes de Sylow par Wielandt	3
3	Une interprétation polynomiale du système de Cramer (application 9 de la leçon 162)	6
4	Factorisation LU	7
5	Décomposition de Cholesky	9
6	Factorisation QR pour une matrice carrée	10
7	Moindres carrés et équation normale	11
8	Générateurs du groupe linéaire et du groupe spécial linéaire par le pivot de Gauss	12
9	Morphisme du groupe linéaire d'un corps fini dans son groupe des inversibles	13
10	Distance moyenne d'un point à un compact convexe non vide dans le plan euclidien	14
11	Théorème de Minkowsky	17
12	Pavage d'un rectangle par des carrés	19
13	Théorème d'inversion locale	20
14	Théorème des fonctions implicites	22
15	Équivalence entre le théorème des fonctions implicites et le théorème d'inversion locale	25
16	Développements de l'anomalie excentrique	26
17	Asymptotique d'une équation du troisième degré	30
18	Mesures de Malher et hauteurs de polynômes	32
19	Lemme de Borel	34
20	Théorème de Hahn-Banach en dimension finie	36
21	Fonction continue nulle part dérivable	37

22	Expression de la fonction de Riemann en fonction des premiers	38
23	Prolongement analytique de la fonction Gamma sur le plan complexe	40
24	Prolongement analytique de la fonction de Riemann sur le plan complexe privé de 1	40
25	Théorème de Vitali	43
26	Théorème de Weierstrass par la convolution	46
27	Densité d'une trajectoire de pas irrationnel sur le cercle	47
28	Rayon spectral et normes	48
29	Théorème des extrema liés par le théorème d'inversion locale	51
30	Théorème spectral par le théorème des extrema liés	52
31	Minimisation de l'entropie dans le cas d'un équilibre thermique	53
32	Espaces de Hölder : complétude, compacité, connexité	54
32.1	Complétude	54
32.2	Compacité des injections entre espaces de Hölder	56
32.3	Résolution d'une équation différentielle dans les espaces de Hölder en utilisant la connexité	59
33	Topologie engendrée, topologie produit, connexité d'une topologie produit	63
34	Équation de la chaleur en dimension 1	65
35	Méthode de Newton pour une fonction convexe croissante	68
36	Une condition de convergence sur un segment	70
37	Critère de Weyl	71
38	Densité des fonctions continues nulle part dérivables	73
39	Inégalité de Hadamard par les extrema liés	75
40	Théorèmes de Dini	76
41	Problème de Bâle, trois solutions parmi des dizaines	77
42	Intégrale de Wallis et formule de Stirling	80

## 1 Lemme de Siegel

*Référence : Oraux X/ENS, Algèbre 1, Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, Serge NICOLAS*

**Théorème 1.1 : Lemme de SIEGEL, version X/ENS**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{Z})$  avec  $k < n$ . On note  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\alpha \geq |a_{i,j}|$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Il existe  $X \in \mathbb{Z}^n$  non nul tel que  $AX = 0$  et qui vérifie l'estimation :

$$\|X\|_\infty \leq (n\alpha)^{\frac{k}{n-k}} + 1$$

**Démonstration :** • Constatons d'abord que  $AX = 0$  admet des solutions dans  $\mathbb{Q}$ . En effet, ce système peut se voir comme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots = \vdots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

id est un système homogène à plus d'inconnues que d'équations. Si  $X \in \mathbb{Q}^n$  est solution, alors  $aX \in \mathbb{Z}^n$  l'est aussi, avec  $a \in \mathbb{Z}$  "minimal". Par conséquent, il existe bien une solution dans  $\mathbb{Z}^n$  de  $AX = 0$ .

• Si  $X, X' \in \mathbb{Z}^n$  ont même image par  $A$ , alors  $X - X' \in \ker(A)$ . Ainsi, chercher une solution non triviale de  $AX = 0$  revient à déterminer deux éléments distincts de  $\mathbb{Z}^n$  qui ont même image par  $A$ .

• Si on note ici  $Y = AX \in \mathbb{Z}^k$ , alors pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$  :

$$|y_j| \leq \sum_{p=1}^n |a_{j,p}| |x_p| \leq n\alpha \|X\|_\infty$$

d'où

$$\|AX\|_\infty \leq n\alpha \|X\|_\infty$$

• Soit  $M \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$X \in \mathbb{Z}^n \cap B_\infty(0, M] \iff \forall i, |x_i| \leq M$$

Autrement dit,

$$\#(B_\infty(0, M] \cap \mathbb{Z}^n) = (2M + 1)^n$$

De plus, d'après le point précédent, si  $X \in \mathbb{Z}^n \cap B_\infty(0, M]$  alors

$$AX \in \mathbb{Z}^k \cap B_\infty(0, n\alpha M]$$

qui lui est de cardinal  $(2n\alpha M + 1)^k$ . Si

$$(2n\alpha M + 1)^k < (2M + 1)^n$$

alors d'après le lemme des tiroirs, il existe  $X, X' \in \mathbb{Z}^n \cap B_\infty(0, M]$  distincts de même image par  $A$ , donc une solution non triviale à notre système initial.

• Déterminons alors un  $M \in \mathbb{N}^*$  qui puisse satisfaire cette inégalité. D'une part, on souhaite avoir

$$\|X - X'\|_\infty \leq (n\alpha)^{\frac{k}{n-k}} + 1$$

Donc, imposons (par inégalité triangulaire)

$$2M \leq (n\alpha)^{\frac{k}{n-k}} + 1$$

D'autre part, on a l'inégalité stricte ( $n \geq 2$ ) :

$$(2n\alpha + 1)^k < (n\alpha)^k (2M + 1)^k$$

Imposons alors

$$(n\alpha)^k (2M + 1)^k \leq (2M + 1)^n$$

Dans ce cas, on obtient

$$2M \geq (n\alpha)^{\frac{k}{n-k}} - 1$$

Ainsi, avec nos conditions posées, il suit que si

$$2M \in \left[ (n\alpha)^{\frac{k}{n-k}} - 1, (n\alpha)^{\frac{k}{n-k}} + 1 \right]$$

alors  $X - X'$  est solution du système, avec l'estimation voulue. Or, cet intervalle fermé est de longueur 2, donc contient toujours au moins un nombre pair. Il suit qu'un tel  $M$  existe, et donc le lemme de Siegel est prouvé.  $\square$

## 2 Théorèmes de Sylow par Wielandt

Références :

- Cours d'algèbre, Daniel PERRIN ;
- Exercices d'algèbre CAPES-Agrégation, Pascal ORTIZ

**Théorème 2.1 : Théorème de SYLOW, version WIELANDT**

Soit  $G$  un groupe de cardinal  $n = p^\alpha m$  avec  $p$  ne divisant pas  $m$ .

1.  $G$  admet un  $p$ -sous-groupe de SYLOW.
2. On dispose des assertions suivantes.
  - (a) Si  $H$  est  $p$ -sous-groupe de  $G$ , alors il existe  $S$  un  $p$ -sous-groupe de SYLOW de  $G$  qui contient  $H$  ;
  - (b) Tous les  $p$ -sous-groupes de SYLOW de  $G$  sont conjugués : en conséquence, le nombre de  $p$ -sous-groupes de SYLOW  $s_p(G)$  divise  $n$ .
  - (c) On a :

$$s_p(G) \equiv 1 \pmod{p}$$

La démonstration provient d'un exercice du *Cours d'algèbre* de PERRIN, corrigé et complété dans les *Exercices d'algèbre* d'ORTIZ ; la numérotation de la démonstration suit celle d'ORTIZ, et non pas le théorème.

**Démonstration :** Précisons les notations pour cette démonstration. On note  $\text{Syl}_p(G)$  l'ensemble des  $p$ -sous-groupes de Sylow de  $G$ . On note  $X^\alpha$  l'ensemble des parties de  $G$  de cardinal  $p^\alpha$ . On fait agir  $G$  sur  $X^\alpha$  par translation à gauche : pour tout  $E \in X^\alpha$  :

$$\left( \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & X^\alpha \\ g & \longmapsto & gE \end{array} \right)$$

et on note  $G_E$  le stabilisateur de  $E$  pour cette action :

$$G_E \stackrel{\text{déf.}}{=} \{g \in G, gE = E\} < G$$

1. Soit  $E \in X^\alpha$ . Pour tout  $x \in E$ , l'application

$$\varphi_x : \left( \begin{array}{ccc} G_E & \longrightarrow & E \\ g & \longmapsto & gx \end{array} \right)$$

est injective, donc

$$\forall E \in X^\alpha, |G_E| \leq \#E = p^\alpha$$

2.a. Montrons qu'il y a égalité si et seulement s'il existe  $x \in G$  et  $S \in \text{Syl}_p(G)$  tels que  $E = S \cdot x$ .

[ $\implies$ ] Supposons que  $|G_E| = p^\alpha$ . Dans ce cas, pour tout  $x \in E$ , l'application  $\varphi_x$  est bijective, donc surjective : pour tout  $y \in E$ , il existe  $g \in G_E$  tel que  $y = gx$ . Ainsi,  $E \subset G_E \cdot x$ . Or,  $G_E \cdot x \subset E$ , d'où  $G_E \cdot x = E$ . Puisque  $G_E$  est de cardinal  $p^\alpha$ , c'est un  $p$ -Sylow de  $G$ , donc on a bien montré que  $E = S \cdot x$  avec  $S = G_E$ .

[ $\impliedby$ ] Supposons que  $E = S \cdot x$ . Pour tout  $s \in S$ ,

$$sE = sSx = Sx = E$$

donc  $s \in G_E$ , donc  $S \subset G_E$ . Ainsi,

$$p^\alpha = |S| \leq |G_E| \leq |p^\alpha|$$

donc  $|G_E| = p^\alpha$ , et  $S = G_E$  est un  $p$ -Sylow de  $G$ . Dans le cas où  $E = S$  est un  $p$ -Sylow de  $G$ , on a alors  $S = S \cdot 1_G$ , donc

$$\forall S \in \text{Syl}_p(G), G_S \in \text{Syl}_p(G)$$

2.b. Montrons que

$$\#X^\alpha \equiv m \cdot s_p(G) \pmod{p}$$

• Soient  $S, T \in \text{Syl}_p(G)$  qui ont la même orbite pour l'action de  $G$  sur  $X^\alpha$  :  $\omega(S) = \omega(T)$ . Alors

$$\exists g \in G, S = gT$$

Puisque  $1_G \in S$ , il suit que  $g^{-1} \in T$ , donc  $g \in T$ , donc  $S = T$ . On a alors montré que

$$|\omega(\text{Syl}_p(G))| = s_p(G)$$

• Montrons que

$$\omega(\text{Syl}_p(G)) = \left\{ \omega(H) \subset X^\alpha \mid \begin{array}{l} H \text{ s-g de } G \\ \# \omega(H) = m \end{array} \right\}$$

On note  $\Omega_m$  le deuxième ensemble.

Soit  $S \in \text{Syl}_p(G)$ . D'après 2.a,  $|G_S| = p^\alpha$ , donc

$$\# \omega(S) = \frac{|G|}{|G_S|} = m$$

donc  $\omega(S) \in \Omega_m$ , donc  $\omega(\text{Syl}_p(G)) \subset \Omega_m$ .

Pour montrer l'autre inclusion, on raisonne par complémentaire. Si  $E \in X^\alpha$  est tel que  $\omega(E) \in \omega(X^\alpha) \setminus \omega(\text{Syl}_p(G))$ , alors par disjonction des orbites,

$$\omega(E) \cap \text{Syl}_p(G) = \emptyset$$

Montrons que  $\# \omega(E) \neq m$ . Supposons que cela ne soit pas le cas. Alors par la relation orbite-stabilisateur,

$$|G_E| = \frac{|G|}{\# \omega(E)} = p^\alpha$$

et par **2.a**, cela signifie

$$\exists x \in G, \exists S \in \text{Syl}_p(G), E = Sx$$

Si bien que

$$x^{-1}Sx \in \omega(E) \cap \text{Syl}_p(G) = \emptyset$$

ce qui est absurde. Ainsi, on a bien que  $|G_E| < p^\alpha$ , et donc  $\# \omega(E) > m$ , donc  $\omega(E) \in \omega(X^\alpha) \setminus \Omega_m$ , d'où l'inclusion inverse, et l'égalité  $\Omega_m = \omega(\text{Syl}_p(G))$ . D'où, par le point précédent,

$$\# \Omega_m = s_p(G)$$

On note

$$\Omega_m \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\omega(S_1), \dots, \omega(S_{s_p(G)})\}$$

avec  $S_k \in \text{Syl}_p(G)$ . On a d'ailleurs aussi montré que si  $\omega(E)$  n'appartient pas à  $\Omega_m$ , alors

$$\# \omega(E) = p^\beta m \in p\mathbb{Z}$$

Or, on dispose de la partition suivante pour les orbites :

$$X^\alpha = \left( \bigsqcup_{\omega(E) \in \Omega_m} \omega(E) \right) \sqcup \left( \bigsqcup_{\omega(E) \notin \Omega_m} \omega(E) \right)$$

Soit encore

$$X^\alpha = \left( \bigsqcup_{k=1}^{s_p(G)} \omega(S_k) \right) \sqcup \left( \bigsqcup_{\omega(E) \notin \Omega_m} \omega(E) \right)$$

Ainsi,

$$\# X^\alpha = \sum_{k=1}^{s_p(G)} \# \omega(S_k) + \sum_{\omega(E) \neq m} \# \omega(E)$$

ce qui donne

$$\# X^\alpha \equiv m \cdot s_p(G) \pmod{p}$$

**3.** Montrons que

$$\# X^\alpha \equiv m \pmod{p}$$

Pour cela, on dispose de deux méthodes.

- On applique le résultat précédent à  $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , qui est un groupe de cardinal  $n$ . Tout sous-groupe de  $G$  de cardinal donné est unique : ainsi  $s_p(G) = 1$  (le sous-groupe de Sylow en question est  $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ). puisque  $|X^\alpha|$  ne dépend

que du cardinal de  $G$ , donc que de  $n$ , il suit qu'en toute généralité,

$$\# X^\alpha \equiv m \pmod{p}$$

- Une méthode plus directe, c'est l'identification des coefficients dans  $\mathbb{F}_p[Z]$ . En effet, par le morphisme de Frobenius, on a

$$(1+Z)^{p^\alpha m} = (1+Z^{p^\alpha})^m$$

On développe grâce au binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{p^\alpha m} \binom{p^\alpha m}{k} Z^k = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} Z^{p^\alpha k}$$

Ainsi, on retrouve qu'au coefficient de degré  $p^\alpha$  :

$$\binom{p^\alpha m}{p^\alpha} \equiv \binom{m}{1} \pmod{p} \equiv m \pmod{p}$$

Or,

$$\# X^\alpha = \binom{n}{p^\alpha} = \binom{p^\alpha m}{p^\alpha}$$

D'où

$$\# X^\alpha \equiv m \pmod{p}$$

**4.** Montrons alors que

$$s_p(G) \equiv 1 \pmod{p}$$

Pour cela, la combinaison des deux points **2.b** et **3.** donne que

$$m(1 - s_p(G)) \equiv 0 \pmod{p}$$

Or,  $m$  est premier avec  $p$ , donc

$$s_p(G) \equiv 1 \pmod{p}$$

On a alors montré les points **1.** et **2.(c)** du théorème de Sylow.

**5.** Concluons alors le théorème : soit  $H$  un  $p$ -sous-groupe de  $G$ . Montrons qu'il existe  $S \in \text{Syl}_p(G)$  tel que  $H \subset S$ . Pour cela, on considère  $S$  un  $p$ -Sylow de  $G$ , et on fait agir  $H$  sur  $\omega(S)$  par translation : pour tout  $A \in \omega(S)$  :

$$\left( \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \omega(S) \\ h & \longmapsto & hA \end{array} \right)$$

On note  $\omega_H(A)$  l'orbite de cette action :

$$\omega_H(A) = \{B \in \omega(S), \exists h \in H, B = hA\}$$

Par la relation orbite-stabilisateur, puisque  $H$  est un  $p$ -groupe,  $\# \omega_H(A)$  divise  $|H|$ , donc est une puissance de  $p$ . Si toutes ces puissances valaient au moins  $p$ , alors

$$\# \omega(S) = \sum_{i \in I} \# \omega_H(A_i) \in p\mathbb{Z}$$

mais  $\# \omega(S) = m$ , puisque  $\omega(S) \in \Omega_m$ . Ainsi, on aboutit à une contradiction, et donc il existe  $A_0 \in \omega(S)$  tel que  $\# \omega_H(A_0) = 1$ , soit encore

$$\omega_H(A_0) = \{A_0\}$$

Toujours par la relation orbite-stabilisateur,

$$H = \text{Stab}(A_0)$$

Or,  $A_0 \in \omega(S)$ , donc il existe  $g \in G$  tel que  $A_0 = gS$ , et donc

$$H = \text{Stab}(gS) = g\text{Stab}(S)g^{-1}$$

Ainsi,

$$H \subset gG_Sg^{-1}$$

Et par 2.a, il suit que

$$H \subset gSg^{-1}$$

d'où le point 2.a du théorème.

Enfin, si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux  $p$ -Sylow de  $G$ , ils sont tous deux conjugués à  $S$ , donc sont conjugués entre eux. La relation orbite stabilisateur pour l'action de conjugaison de  $G$  sur ses sous-groupes donne alors que  $s_p(G)$  divise  $n$ , donc  $m$  puisque  $s_p(G)$  n'est pas divisible par  $p$ , par 2.(c) du théorème. D'où 2.(b) du théorème.  $\square$

### 3 Une interprétation polynomiale du système de Cramer (application 9 de la leçon 162)

Référence : *Mathématiques Tout-en-un, MPSI*, C.DESCHAMPS, F.MOULIN, A. WARUSFEL

#### Proposition 3.1 : Système de CRAMER

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $b \in \mathbb{K}^n$ , où  $\mathbb{K}$  est un corps. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le système  $Ax = b$  admet une unique solution ;
- (ii)  $A$  est inversible.

Dans ce cas, le système  $Ax = b$  est appelé *système de CRAMER*, dont une solution est donnée par

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = \frac{\Delta_j}{\det(A)}$$

où  $\Delta_j$  est le déterminant de la matrice de  $A$  où l'on a remplacé la  $j$ -ème colonne par  $b$ .

#### Corollaire 3.1

Soient  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , et  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ . Le système

$$(S) : \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \mathbf{z} = \mathbf{u}$$

admet une unique solution dans  $\mathbb{C}^3$  si et seulement si  $a, b, c$  sont distincts.

#### Démonstration :

- Si  $a, b, c$  ne sont pas distincts, la matrice du système (S) admet (au moins) deux lignes égales, donc n'est pas inversible, donc (S) n'admet pas une unique solution dans  $\mathbb{C}^3$ . On suppose que  $a, b, c$  sont distincts.

- On définit  $P_{x,y,z} \in \mathbb{C}_2[T]$  pour tout  $x, y, z \in \mathbb{C}$  par :

$$P_{x,y,z}(T) = x + yT + zT^2$$

L'application

$$P : \begin{pmatrix} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}_2[X] \\ (x, y, z) & \longmapsto & P_{x,y,z} \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Elle est en ef-

est linéaire, et injective. Par égalité des dimensions dans  $\mathbb{C}$ ,  $P$  est un isomorphisme.

•  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  solution de  $(S)$  si et seulement si  $P_{(x,y,z)}(a) = u_1$ ,  $P_{(x,y,z)}(b) = u_2$  et  $P_{(x,y,z)}(c) = u_3$ . De plus, l'application

$$\left( \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ P & \longmapsto & P(a), P(b), P(c) \end{array} \right)$$

est un isomorphisme, puisque  $a, b, c$  sont distincts (il est injectif, et égalité des dimensions). On peut expliciter

l'application réciproque par les polynômes interpolateurs de Lagrange, et donner les solutions du système  $(S)$  par la même occasion :

$$P_{x,y,z}(T) = \frac{u_1(T-b)(T-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{u_2(T-a)(T-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{u_3(T-a)(T-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Les solutions s'obtiennent en développant et en identifiant coefficient par coefficient. □

## 4 Factorisation LU

Références :

- *Méthodes Numériques*, A.QUARTERONI, R. SACCO, F. SALERI;
- *Numerical Linear Algebra*, G.ALLAIRE, S.KABER

### Théorème 4.1 : Décomposition LU

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que toutes les sous-matrices extraites  $A_k$  de  $A$  sont inversibles (*id est*  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} \in \text{GL}_k(\mathbb{K})$ ). Alors il existe une matrice  $L$  triangulaire inférieure de diagonale composée que de 1 et  $U$  une matrice triangulaire supérieure telles que

$$A = LU$$

Il existe deux démonstrations de cette factorisation : l'une utilise explicitement la pratique du pivot de Gauss, l'autre se fait par récurrence sur  $k$ . La deuxième démonstration a le mérite de pouvoir montrer avec peu de peine la réciproque : si  $A$  admet une unique factorisation  $LU$ , ses mineurs principaux sont inversibles.

On montre donc le sens direct de deux manières différentes.

**Démonstration :** On ière le pivot de Gauss dans cette démonstration.

1. Initialisons ce pivot. On note pour cela  $G^{(1)} \stackrel{\text{déf.}}{=} A$ , de coefficients notés  $a_{i,j}^{(1)}$ . Quitte à permuter (c'est une opération élémentaire sur les lignes, donc c'est une multiplication à gauche par une matrice inversible) les coefficients sur la colonne, on suppose que  $a_{1,1}^{(1)} \neq 0$  (par hypothèse, aucune colonne ne peut être nulle sans quoi les matrices extraites ne seraient pas inversibles). On note alors pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$m_{i,1} \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$$

Sur  $A$ , on fait l'opération élémentaire

$$L_i \leftarrow a_{i,1}^{(1)} - \frac{a_{i,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} L_1$$

Ce qui correspond à la multiplication à gauche de  $G^{(1)} = A$  par

$$M^{(1)} \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{m}_1 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{m}_1$  est le vecteur de  $\mathbb{K}^{n-1}$  composé des  $m_{i,1}$ . On note alors  $G^{(2)} \stackrel{\text{déf.}}{=} M^{(1)}G^{(1)}$ , et on note  $a_{i,j}^{(2)}$  ses coefficients.  $G^{(2)}$  est de la forme :

$$G^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix}$$

2. Supposons qu'à la  $k$ -ème itération, on obtient une matrice  $G^{(k)}$ , de la forme

$$G^{(k)} = \begin{pmatrix} U^{(k)} & * \\ 0 & R^{(k)} \end{pmatrix}$$



Alors, si  $A$  est inversible, alors  $U$  aussi, donc puisque  $U$  est triangulaire, le déterminant de chaque  $U^{(k)}$  est non nul. Il suit donc que  $\det(A_k) \neq 0$ . Puis, si  $A$  n'est pas inversible, il existe un  $k$  tel que  $U^{(k)}$  soit de déterminant nul. La procédé effectué par récurrence peut alors se faire jusqu'au rang  $k + 1$ . Mais alors le vecteur  $\mathbf{1}$  n'est pas défini de manière unique par

$$\begin{cases} L^{(k-1)}\mathbf{u} = \mathbf{c} \\ {}^tU^{(k-1)}\mathbf{1} = \mathbf{d} \end{cases}$$

ce qui contredit l'hypothèse d'existence et d'unicité de  $LU$ , sauf si  $k = n$ . Ainsi, chaque  $A_k$  est donc bien inversible pour  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ .  $\square$

## 5 Décomposition de Cholesky

- *Méthodes Numériques*, A.QUARTERONI, R. SACCO, F. SALERI ;
- *Numerical Linear Algebra*, G.ALLAIRE, S.KABER

### Théorème 5.1 ; Factorisation de CHOLESKY

Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Alors il existe une unique matrice  $B$  triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux positifs telle que

$$A = B^t B$$

### Proposition 5.1 : Matrices symétriques définies positives et matrices extraites

Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Alors toutes les sous-matrices extraites de  $A$  sont inversibles. En particulier,  $A$  admet alors une unique factorisation  $LU$ .

**Démonstration :** Par l'absurde, s'il existe  $A_k$  une matrice extraite non inversible alors il existe  $x \in \mathbb{R}^k$  tel que  $A_k x = 0$ , et  $x \neq 0$ . On note  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  le vecteur composé des composantes de  $x$  et de zéros. Alors

$${}^t x_0 A x_0 = ({}^t x \quad 0) \begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en développant par blocs

$${}^t x_0 A x_0 = {}^t x A_k x = 0$$

Ce qui contredit ouvertement le fait que  $A$  soit symétrique positive :

$$\forall x \neq 0, {}^t x A x > 0$$

Donc  $A$  admet des matrices extraites inversibles.  $\square$

A partir de cette proposition, on a toutes les cartes en main pour montrer la décomposition de CHOLESKY.

**Démonstration :** • Montrons l'existence de cette décomposition.

1. D'après la proposition précédente, il existe un unique couple  $(L, U) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  avec  $L$  triangulaire inférieure composée de 1 sur la diagonale, et  $U$  triangulaire supérieure. C'est aussi le cas de ses matrices extraites  $A_k = L_k U_k$ . Par unicité de la décomposition,  $U_k$  n'est autre que la matrice extraite de  $U$ . Ainsi, puisque  $\det(U_k) = \det(A_k) > 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il suit que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \prod_{i=1}^k u_{i,i} > 0$$

donc tous les coefficients de  $U$  sont strictement positifs.

2. On note

$$D \stackrel{\text{déf.}}{=} \text{Diag}(\sqrt{u_{1,1}}, \dots, \sqrt{u_{n,n}})$$

Alors  $D$  est inversible. C'est alors ici qu'intervient l'astuce qui débloque le tout, le théorème suisse :

$$A = (LD)(D^{-1}U)$$

On pose  $B \stackrel{\text{déf.}}{=} LD$  et  $C \stackrel{\text{déf.}}{=} D^{-1}U$ .  $B$  est triangulaire inférieure, de coefficients diagonaux  $\sqrt{u_{k,k}} > 0$ , donc est inversible et  $C$  est triangulaire supérieure.

3. Puisque  $A$  est symétrique, on a alors

$$BC = {}^t C^t B$$

Et puisque  $B$  est inversible :

$$C ({}^tB)^{-1} = B^{-1}{}^tC$$

Le membre de droite est triangulaire supérieur, le membre de gauche est triangulaire inférieur. Ainsi, ces deux matrices sont égales à une matrice diagonale. De plus,  $B$  admet comme coefficient diagonal  $\sqrt{u_{i,i}}$ , tout comme  $C$ , donc puisqu'il s'agit d'un produit de matrices triangulaires, les coefficients diagonaux du produit  $B^{-1}{}^tC$  se déduisent par produit des coefficients de  $B^{-1}$ , qui ne sont autres que  $\frac{1}{\sqrt{u_{i,i}}}$ , et des coefficients diagonaux de  ${}^tC$ , qui valent  $\sqrt{u_{i,i}}$ . Par conséquent, il suit que

$$B^{-1}{}^tC = I_n$$

d'où  $C = {}^tB$ , d'où

$$A = {}^tBB$$

avec  $B$  triangulaire inférieure avec des coefficients strictement positifs (ils valent  $\sqrt{u_{k,k}}$ ).

- Montrons l'unicité. On suppose que

$$A = B_1 {}^tB_1 = B_2 {}^tB_2$$

avec  $B_k$  triangulaires inférieures avec des coefficients diagonaux strictement positifs. Alors, on a

$$B_2^{-1}B_1 = {}^tB_2 ({}^tB_1)^{-1}$$

C'est une égalité entre une matrice triangulaire supérieure et inférieure. Donc il existe  $D$  diagonale telle que

$$B_1 = B_2D$$

Ainsi,

$$A = B_2D {}^tB_2 = {}^tB_2B_2$$

Puisque  $\det(B_2) = \sqrt{\det(A)} \neq 0$ , il suit que  $D^2 = I_n$ . Ainsi, chaque coefficient  $d_i$  de  $D$  vérifie  $d_i^2 = 1$ . Or,

$$A = B_1 {}^tB_1 = (B_2D) {}^t(B_2D)$$

est une décomposition de Cholesky, donc les coefficients de  $B_2D$  doivent être positifs, et valent ici  $d_i b_{i,i}$ , avec  $b_{i,i} > 0$ . D'où  $d_i = 1$ , d'où  $D = I_n$ , d'où  $B_1 = B_2$  et d'où l'unicité de la décomposition.  $\square$

## 6 Factorisation QR pour une matrice carrée

Référence : *Numerical linear algebra*, G. ALLAIRE, S. KABER

### Théorème 6.1 : Factorisation QR pour une matrice carrée

Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  telles que  $Q$  soit orthogonale,  $R$  triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs et

$$A = QR$$

**Démonstration :** • Montrons l'existence de cette décomposition. Puisque  $A$  est inversible, les colonnes  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$ . D'après le théorème d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on peut considérer une base  $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  orthonormée telle que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\mathbf{q}_k \in \text{Vect}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$$

Cette base est d'ailleurs donnée par

$$\mathbf{q}_k = \frac{\mathbf{a}_k - \sum_{\sigma=1}^{k-1} \langle \mathbf{q}_\sigma, \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{q}_\sigma}{\left\| \mathbf{a}_k - \sum_{\sigma=1}^{k-1} \langle \mathbf{q}_\sigma, \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{q}_\sigma \right\|}$$

Alors

$$\mathbf{a}_j = \sum_{\sigma=1}^j r_{\sigma,j} \mathbf{q}_\sigma$$

où pour  $\sigma < j$

$$r_{\sigma,j} \stackrel{\text{déf.}}{=} \langle \mathbf{q}_\sigma, \mathbf{a}_j \rangle$$

Pour  $\sigma = j$ ,

$$r_{j,j} \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\| \mathbf{a}_j - \sum_{\sigma=1}^{j-1} \langle \mathbf{q}_\sigma, \mathbf{a}_j \rangle \mathbf{q}_\sigma \right\| > 0$$

puisque

$$\mathbf{a}_j \notin \text{Vect}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{j-1}) = \text{Vect}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1})$$

Puis, on note pour  $\sigma > j$

$$r_{j,\sigma} \stackrel{\text{déf.}}{=} 0$$

Il nous reste plus qu'à voir que

$Q_2 R_2$  alors

$$\mathbf{a}_j = (\mathbf{q}_1 \ \cdots \ \mathbf{q}_n) \begin{pmatrix} r_{j,1} \\ \vdots \\ r_{j,n} \end{pmatrix}$$

$${}^t Q_2 Q_1 = R_2 R_1^{-1}$$

On pose  $Q$  la matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{q}_k$ , qui est orthogonale par construction des  $\mathbf{q}_k$ , et  $R$  la matrice des  $(r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , triangulaire supérieure par construction, à coefficients diagonaux strictement positifs. Ainsi défini, on a bien

Il s'agit d'une matrice orthogonale triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. On la note  $T$ . Alors

$$T^t T = {}^t Q_2 Q_1^t ({}^t Q_2 Q_1) = I_n$$

$$A = QR$$

Or, il s'agit ici de la décomposition de Cholesky de  $I_n$ , qui est unique. Ainsi,  $T = I_n$ . D'où  $R_1 = R_2$  et  $Q_1 = Q_2$ ,

- Pour l'unicité de la décomposition, si  $A = Q_1 R_1 =$  et l'unicité de la décomposition QR. □

## 7 Moindres carrés et équation normale

Référence : *Numerical linear algebra*, G. ALLAIRE, S. KABER

### Définition 7.1

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ .  $x \in \mathbb{R}^p$  est dit *solution de  $Ax = b$  au sens des moindres carrés* si

$$\|Ax - b\| = \min_{\xi \in \mathbb{R}^p} \|A\xi - b\|$$

### Proposition 7.1 : Équation normale

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ .  $x \in \mathbb{R}^p$  est solution de  $Ax = b$  au sens des moindres carrés si et seulement si

$${}^t A A x = {}^t A b$$

**Démonstration :** La clé de cette démonstration est de voir que  $x$  est solution de  $Ax = b$  au sens des moindres carrés si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{R}^p, \langle Az, Ax - b \rangle = 0$$

[ $\Rightarrow$ ] Supposons que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^p, \|Ax - b\| \leq \|A\xi - b\|$$

Soit  $z \in \mathbb{R}^p$ . On définit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \xi_t \stackrel{\text{déf.}}{=} x + tz$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|Ax - b\|^2 \leq \|A\xi_t - b\|^2$$

On développe :

$$\|Ax - b\|^2 \leq \|Ax - b\|^2 - 2t \langle Ax - b, Az \rangle + t^2 \|Az\|^2$$

D'où l'inégalité

$$\forall t \in \mathbb{R}, 2t \langle b - Ax, Az \rangle \leq t^2 \|Az\|^2$$

Ainsi, pour  $t < 0$  et  $t > 0$ , on a :

$$\begin{cases} \forall t < 0, 2 \langle b - Ax, Az \rangle \geq t \|Az\|^2 \\ \forall t > 0, 2 \langle b - Ax, Az \rangle \leq t \|Az\|^2 \end{cases}$$

Il suffit donc de faire  $[t \rightarrow 0^+]$  et  $[t \rightarrow 0^-]$  dans les deux inégalités pour avoir

$$\forall z \in \mathbb{R}^p, \langle Ax - b, Az \rangle = 0$$

Soit encore

$$\forall z \in \mathbb{R}^p, \langle {}^t A A x - {}^t A b, z \rangle = 0$$

Donc  ${}^t A A x - {}^t A b \in [\mathbb{R}^p]^\perp = \{0\}$ , donc

$${}^t A A x - {}^t A b = 0$$

[ $\Leftarrow$ ] Par hypothèse,

$$\forall z \in \mathbb{R}^p, \langle Ax - b, Az \rangle = 0$$

Soit  $\xi \in \mathbb{R}^p$ . On définit pour tout  $t \neq 0$ ,

$$z_t \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{t} \xi - x$$

si bien que

$$\xi = tz_t + x$$

(on pose  $z_0 = 0$ ). Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\|A\xi - b\|^2 = t^2 \|Az_t\|^2 + \|Ax - b\|^2 + 2t \langle Az, Ax - b \rangle$$

Donc, grâce à l'hypothèse, il suit

$$\|A\xi - b\|^2 = t^2 \|Az_t\|^2 + \|Ax - b\|^2$$

donc, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^p$ ,

$$\|A\xi - b\|^2 \geq \|Ax - b\|^2$$

donc  $x$  est solution de  $Ax = b$  au sens des moindres carrés.  $\square$

## 8 Générateurs du groupe linéaire et du groupe spécial linéaire par le pivot de Gauss

Référence : Orlaux X/ENS, Algèbre 2, Serge FRANCINO, Hervé GIANELA, Serge NICOLAS

### Proposition 8.1 ; Générateur de $SL_n(\mathbb{K})$ et $GL_n(\mathbb{K})$

Soit  $\mathbb{K}$  un corps.

- $SL_n(\mathbb{K})$  est engendré par les transvections, *id est* toute matrice  $B \in SL_n(\mathbb{K})$  s'écrit comme produit de matrices du type  $I_n + \lambda E_{i,j}$ , avec  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
- $GL_n(\mathbb{K})$  est engendré par les transvections et les dilatations. Plus précisément, pour toute matrice  $M \in GL_n(\mathbb{K})$ , il existe deux produits de matrices  $T$  et  $T'$ , et une matrice  $A = \text{Diag}(1, \dots, 1, \det(M))$  tels que  $M = BAB'$ .

**Démonstration :** Soit  $M \in GL_n(\mathbb{K})$ . On montre par récurrence sur  $k$  que  $M$  est de la forme :

$$B_k M B'_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & M_{n-k} \end{pmatrix}$$

avec  $B_k$  et  $B'_k$  produit de matrices de transvections, et  $M_{n-k} \in GL_{n-k}(\mathbb{K})$ .

• Pour  $k = 1$ . Puisque  $M$  est inversible, sa première colonne est non nulle. Pour  $i \neq 1$ , on considère  $m_{i,1} \neq 0$ . L'opération élémentaire

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{m_{i,1} - 1}{m_{i,1}} L_i$$

permet de placer un 1 en position  $(1,1)$ . Cela correspond à une multiplication à gauche par  $T_{1,i} \left( \frac{m_{i,1}-1}{m_{i,1}} \right)$ . Si chaque coefficient  $m_{i,1}$  est nul pour  $i \geq 2$ , on fait l'opération

$$L_2 \rightarrow L_2 + L_1$$

Qui correspond à une multiplication à gauche par  $T_{2,1}(1)$ , puis on fait

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{m_{1,1} - 1}{m_{2,1}} L_2$$

ce qui correspond à une multiplication à gauche par  $T_{1,2}(-1)$ .

Ainsi, à ce stade, on a fait un produit de transvections à gauche qui permet de placer 1 en position  $(1,1)$ . On fait alors pour  $i \neq 1$

$$L_i \leftarrow L_i - m_{i,1} L_1$$

pour placer des zéros sur la première colonne, qui correspond à des produits à gauche de matrice de transvections. Puis, on fait pour  $j \neq 1$  :

$$C_j \leftarrow C_j - m_{1,j} C_1$$

pour placer des zéros sur la première ligne, ce qui correspond à un produit à droite de matrices de transvections. Ainsi, il existe deux produits de matrices de transvection  $B_1$  et  $B'_1$  tels que

$$B_1 M B'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec  $M_{n-1} \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$  en tant que matrice extraite d'une matrice inversible. Ce qui permet de conclure en l'initialisation.

• Montrons l'hérédité, en utilisant l'initialisation. Pour cela, on suppose que

$$B_k M B'_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & M_{n-k} \end{pmatrix}$$

Alors  $M_{n-k}$  s'écrit lui-même

$$M_{n-k} = T_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_{n-k-1} \end{pmatrix} T'_k$$

Et donc

$$B_k M B'_k = \begin{pmatrix} I_{k+1} & 0 \\ T_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{k+1} & 0 \\ M_{n-k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{k+1} & 0 \\ T'_k & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui montre le résultat au rang  $k + 1$ , et conclut la récurrence.

• Pour  $k = n$ , à la fin de la récurrence,  $M$  est alors de la forme

$$M = T \text{Diag}(1, \dots, 1, \det(M)) T^{-1}$$

Si  $M \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$  alors  $M$  est produit de matrices de transvection. Si  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,  $M$  est produit de matrices de transvection et d'une matrice de dilatation.  $\square$

## 9 Morphisme du groupe linéaire d'un corps fini dans son groupe des inversibles

Référence : *Oraux X/ENS, Algèbre 2*, Serge FRANCINO, Hervé GIANELA, Serge NICOLAS

L'idée dans cette section est d'exploiter le fait que les transvections et les dilatations engendrent  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ .

### Proposition 9.1

Soit  $q \geq 3$  un nombre premier. Il existe  $q$  morphismes de groupes de  $\text{GL}_n(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  à valeurs dans  $\mathbb{K}^\times$ . Ils sont de la forme  $\alpha_k \circ \det$  où

$$\alpha_k : \begin{pmatrix} (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \\ x & \longmapsto & x^k \end{pmatrix}$$

On a besoin des résultats suivants.

### Lemme 9.1 : Transvection et commutateur

Soit  $\mathbb{K}$  un corps fini différent de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice de transvection. Alors  $B$  est un commutateur.

**Démonstration du lemme :** Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note

$$T_{i,j}(\lambda) \stackrel{\text{déf.}}{=} I_n + \lambda E_{i,j}$$

une matrice de transvection. Pour  $a \in \mathbb{K}$ , on note

$$D_i(a) = \text{Diag}(1, \dots, 1, a, 1, \dots, 1)$$

une matrice de dilatation. Alors pour tout  $x \in \mathbb{K}^*$

$$D_i(a) T_{i,j}(x) D_i(a)^{-1} = I_n + x D_i(a) E_{i,j} D_i(a)^{-1}$$

Par le choix du positionnement de  $a$  à la  $i$ -ème place, il suit que

$$D_i(a) T_{i,j}(x) D_i(a)^{-1} = I_n + x a E_{i,j} = T_{i,j}(x a)$$

Ainsi,

$$[D_i(a), T_{i,j}(x)] = T_{i,j}(x a) T_{i,j}(x)^{-1}$$

Donc,

$$[D_i(a), T_{i,j}(x)] = T_{i,j}((x-1)a)$$

Or,  $x \mapsto (x - 1)a$  est une bijection, en particulier,  $T_{i,j}(x)$  s'écrit comme un commutateur. □  
 $\lambda = (x - 1)a$  si et seulement si  $x = 1 + a^{-1}\lambda$ , et donc

**Lemme 9.2 : Morphismes de  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$**

Soit  $q$  un nombre premier. Alors

$$\text{Hom}_{\text{gr}} \left( (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \right) = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \\ x & \longmapsto & x^k \end{array} \right) \right\}_{0 \leq k \leq q-1}$$

On admet ce lemme qui exploite le caractère cyclique de  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ .

**Démonstration :** On notera  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  dans cette démonstration.

• Soit  $f : \text{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$  un morphisme de groupes. Pour tout  $M$ , il existe  $B_1, \dots, B_k, B'_1, \dots, B'_l$  et  $A$  telles que les  $B_i$  et  $B'_i$  soient des matrices de transvection,  $A = \text{Diag}(1, \dots, 1, \det(A))$  et

$$M = B_1 \cdots B_k A B'_1 \cdots B'_l$$

Ainsi,

$$f(M) = \left( \prod_{i=1}^k f(B_i) \right) f(A) \left( \prod_{i=1}^l f(B'_i) \right)$$

On s'intéresse alors à l'image par  $f$  des matrices de transvection et de dilatation.

• Soit  $B$  une matrice de transvection. Alors d'après le premier lemme,  $B$  est un commutateur, donc  $B = [A, M]$ . Ainsi,

$$f(B) = f([A, M]) = [f(A), f(M)] = 1$$

car  $\mathbb{K}^\times$  est commutatif. Par conséquent,

$$f|_{\text{SL}_n(\mathbb{K})} = \tilde{\mathbf{1}}$$

où  $\tilde{\mathbf{1}}$  désigne le morphisme trivial qui envoie toute matrice sur 1.

• Ainsi, pour toute matrice  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,

$$f(M) = f \left( \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \det(M) \end{pmatrix} \right) = \varphi \circ \det(M)$$

où  $\varphi : \mathbb{K}^\times \rightarrow \mathbb{K}^\times$  est un morphisme de groupes. Il ne nous reste donc plus qu'à conclure : les morphismes de groupes de  $\mathbb{K}^\times$  sont de la forme  $\alpha_k : x \mapsto x^k$ , donc on a bien déterminé tous les morphismes de  $\text{GL}_n(\mathbb{K}^*)$  dans  $\mathbb{K}^*$ . □

## 10 Distance moyenne d'un point à un compact convexe non vide dans le plan euclidien

Référence : *Oraux X-ENS, Algèbre 3*, S. FRANCINO, H. GIANELLA, S. NICOLAS

**Proposition 10.1**

Soit  $K$  un compact convexe de  $\mathbb{R}^2$ , non vide, de diamètre  $\delta$ . Alors pour tout  $P \in \mathbb{R}^2$ , la distance moyenne entre  $P$  et les points de  $K$ , que l'on note  $m(P)$ , vérifie

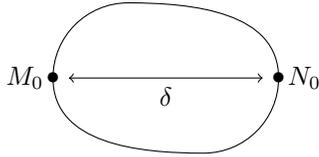
$$m(P) \geq \frac{\delta}{12}$$

Si  $\delta = 0$ ,  $K$  est réduit à un point et le résultat est vrai. Considérons dans la suite  $\delta > 0$ . On va considérer pour cela un rectangle qui contient  $K$ , et un quadrilatère contenu dans  $K$ .

**Lemme 10.1**

Si  $K$  est un convexe compact de diamètre  $\delta > 0$  de  $\mathbb{R}^2$ , il existe un rectangle  $ABCD$  tel que  $AB = \delta$  et chaque côté contient au moins un point de  $K$ .

**Démonstration du lemme : 1.**  $K$  est un compact, donc son diamètre est atteint en deux points  $M_0$  et  $N_0$ .



**2.** On note  $p$  la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^2$  sur  $(M_0N_0)$  :

$$p : \left( \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow (M_0N_0) \\ M \longmapsto M' = (1 - \tau_M)M_0 + \tau_M N_0 \end{array} \right)$$

avec  $\tau$  défini par (après calcul) :

$$\tau : \left( \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ M \longmapsto \frac{\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{M_0N_0}}{\delta^2} \end{array} \right)$$

Alors  $p$  est une application affine continue. En effet, d'une part,  $\tau$  est affine : si  $M, N \in \mathbb{R}^2$  :

$$\tau_M - \tau_N = \frac{1}{\delta^2} \left[ \left( \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0N} \right) \cdot \overrightarrow{M_0N_0} \right]$$

Soit encore

$$\tau_M - \tau_N = \frac{1}{\delta^2} \left[ \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{M_0N_0} \right]$$

Donc, il suit que  $H \mapsto \tau_{M+H} - \tau_M$  est linéaire, donc  $\tau$  est affine, donc  $p$  est affine. De plus,  $p$  est continue : si  $M, N \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\|p(M) - p(N)\| = |\tau_M - \tau_N| \|M_0 - N_0\|$$

donc

$$\|p(M) - p(N)\| = |\tau_M - \tau_N| \delta$$

Par le calcul fait précédemment sur  $\tau$  :

$$\|p(M) - p(N)\| = \frac{1}{\delta} \left| \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{M_0N_0} \right|$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet de conclure que

$$\|p(M) - p(N)\| \leq \left\| \overrightarrow{MN} \right\|$$

donc  $p$  est continue, et de norme inférieure ou égale à 1. En conséquence, puisque  $p$  est continue,  $p(K)$  est compact. Puisque  $p$  est affine,  $p(K)$  est convexe. Puisque  $p(K)$  est inclus dans la droite  $(M_0N_0)$ , il suit que

$$p(K) = [A_0, B_0]$$

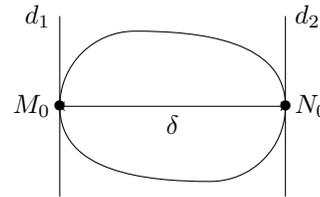
avec  $[M_0, N_0] \subset p(K)$ . De plus, puisque  $p$  est de norme inférieure à 1, si  $M, N \in K$  alors

$$\|p(M - N)\| \leq \|M - N\| \leq \delta$$

donc  $p(K) \subset K \cap (M_0, N_0) = [M_0, N_0]$ . Par double inclusion, il suit alors que

$$p(K) = [M_0, N_0]$$

**3.** On note  $d_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} [M_0N_0]^\perp + M_0$  et  $d_2 \stackrel{\text{déf.}}{=} [M_0N_0]^\perp + N_0$ .



Alors  $K$  est inclus dans la bande délimitée par  $d_1$  et  $d_2$  :

$$K \subset \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \max \{d(M, d_1), d(M, d_2)\} \leq \delta\}$$

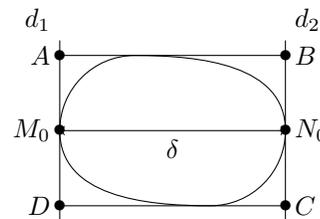
puisque par définition de la projection orthogonale sur les droites, pour tout  $M \in K$  :

$$\max \left\{ \begin{array}{l} d(M, d_1) \\ d(M, d_2) \end{array} \right\} \leq \max \left\{ \begin{array}{l} \|M - M_0\| \\ \|M - N_0\| \end{array} \right\}$$

Donc

$$\forall M \in K, \max \{d(M, d_1), d(M, d_2)\} \leq \delta$$

**4.** On note  $q_1$  la projection orthogonal sur  $d_1$ . Par le même raisonnement qu'en **2.**,  $q(K) = [AD]$ . On note  $q_2$  la projection orthogonale sur  $d_2$ ,  $B \stackrel{\text{déf.}}{=} q_2(A)$  et  $C \stackrel{\text{déf.}}{=} q_2(D)$ .



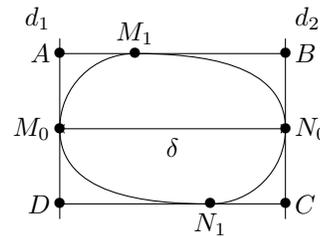
Alors

$$\|AB\| = d(A, d_2) = d(d_1, d_2) = \delta$$

5.  $K$  est inclus dans le rectangle  $[ABCD]$ . En effet, par le même raisonnement que précédemment,  $K$  est inclus dans la bande entre  $(AB)$  et  $(CD)$ , et puisque  $K$  est aussi inclus dans la bande entre  $d_1$  et  $d_2$ ,  $K$  est donc inclus dans leur intersection qui n'est autre que le rectangle  $ABCD$ .

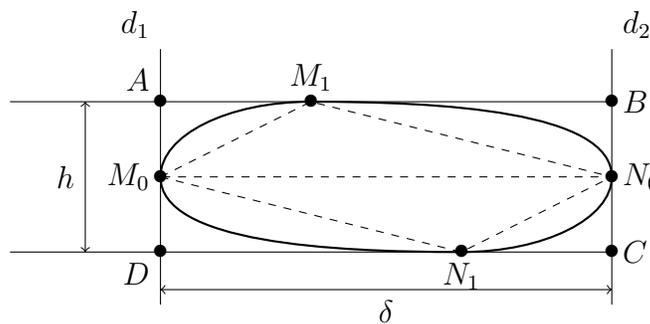
6. Enfin, puisque  $A \in q_1(K)$ , il existe  $M_1 \in K$  tel que  $A = q_1(M_1)$ , et de même il existe  $N_1 \in K$  tel que  $D = q_1(N_1)$ . Alors  $M_1 \in (AB) \cap K$  et  $N_1 \in (CD) \cap K$ , donc  $ABCD$  contient bien un élément de  $K$  sur chacun de

ses côtés.



Ce qui conclut le lemme. □

Grâce à cette construction :



on peut en déduire une estimation de l'aire de  $K$  en fonction de  $\delta$  et  $h = \|AD\|$ . En effet, on dispose des inclusions

$$M_1N_0N_1M_0 \subset K \subset ABCD$$

donc

$$\frac{M_0N_0 \cdot AM_0}{2} + \frac{M_0N_0 \cdot DM_0}{2} \leq \lambda(K) \leq \delta h$$

Soit encore

$$\frac{\delta h}{2} \leq \lambda(K) \leq \delta h$$

Montrons la proposition sur la distance moyenne.

**Démonstration : 1.** Pour  $P \in \mathbb{R}^2$ , on note la distance moyenne entre  $P$  et les points de  $K$  :  $m(P)$  défini par :

$$m(P) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{\lambda(K)} \iint_K \|MP\| dM$$

On note  $P = (x_0, y_0)$ . Alors

$$m(P) = \frac{1}{\lambda(K)} \iint_K \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx dy$$

On tronque :

$$m(P) \geq \frac{1}{\lambda(K)} \iint_K |x - x_0| dx dy$$

Puis, on utilise le fait que  $M_1N_0N_1M_0 \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{D} \subset K$  pour avoir :

$$m(P) \geq \frac{1}{\lambda(K)} \iint_{\mathcal{D}} |x - x_0| dx dy$$

2. On fixe  $M_0$  comme origine de notre repère,  $h_1$  l'ordonnée de  $A$ , et  $h_2$  l'ordonnée de  $D$ . On se fixe  $y \in [0, h_1]$ .

Alors lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{D}$ ,  $x$  varie entre  $a$  et  $b$  (variables qui dépendent de  $y$ !). Par un changement de variables,

$$\int_a^b |x - x_0| dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left| x - x_0 + \frac{a+b}{2} \right| dx$$

Or, l'application

$$\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} |x - z| dx \end{pmatrix}$$

est convexe et impaire. Ainsi, pour tout  $z \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(z) \leq \frac{1}{2}\varphi(z) + \frac{1}{2}\varphi(-z)$$

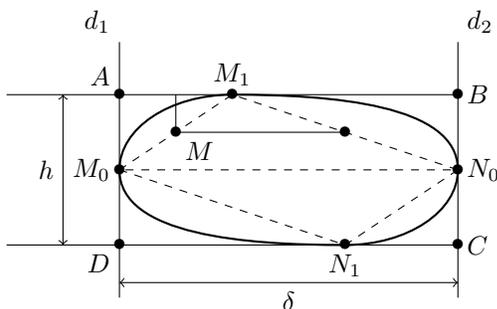
donc

$$\varphi(z) \leq \varphi(0) = \frac{(b-a)^2}{4}$$

Par conséquent, pour tout  $y \in [0, h_1]$ ,

$$\int_a^b |x - x_0| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

3. C'est alors qu'on applique deux fois le théorème de Thalès.



On a dans le triangle  $M_1M_0N_0$  :

$$\frac{b-a}{\delta} = \frac{M_1M}{M_0M_1}$$

Et dans  $AM_0M_1$  :

$$\frac{h_1 - b}{h_1} = \frac{M_1M}{M_0M_1}$$

d'où

$$\frac{b-a}{\delta} = \frac{h_1 - y}{h_1}$$

De même pour  $y \leq 0$  :

$$\frac{b-a}{\delta} = \frac{h_2 - y}{h_2}$$

4. Ainsi, on peut reprendre notre calcul de  $m(P)$ . On a alors par le point 2.

$$m(P) \geq \frac{1}{\lambda(K)} \int_{h_2}^{h_1} \frac{(b(y) - a(y))^2}{4} dy$$

Par le point 3.,

$$m(P) \geq \frac{1}{\lambda(K)} \left[ \int_0^{h_1} \frac{\delta^2(h_1 - y)^2}{4h_1^2} dy + \int_{h_2}^0 \frac{\delta^2(y - h_2)^2}{4h_2^2} dy \right]$$

On intègre :

$$m(P) \geq \frac{\delta^2}{\lambda(K)} \left[ \frac{-h_1^3}{12h_1^2} + \frac{h_2^3}{12h_2^2} \right]$$

Puis, enfin  $\lambda(K) \leq \delta h$ , donc

$$m(P) \geq \frac{h\delta^2}{12\delta h}$$

D'où finalement

$$m(P) \geq \frac{\delta}{12}$$

□

## 11 Théorème de Minkowsky

Référence : Oraison X-ENS, Algèbre 3, S. FRANCINO, H. GIANELLA, S. NICOLAS

### Proposition 11.1 : Théorème de MINKOWSKY

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $\mathbb{R}^p$ . On définit son réseau associé par

$$\mathcal{R}(e_1, \dots, e_p) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^p \mathbb{Z}e_k$$

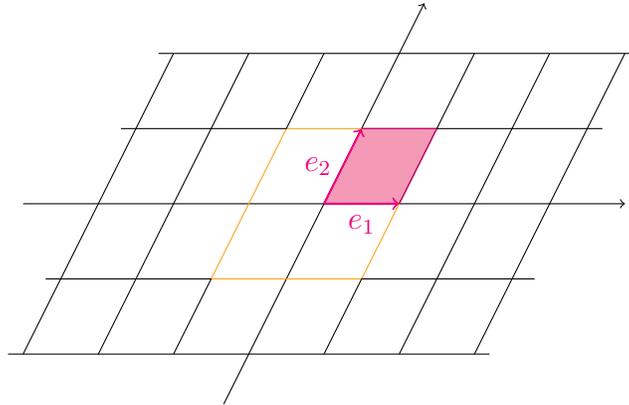
Alors il existe  $V_0 > 0$  tel que pour tout compact convexe symétrique  $K$  de mesure  $\lambda(K) > V_0$ ,

$$K \cap \mathcal{R}(e_1, \dots, e_p) \setminus \{0\} \neq \emptyset$$

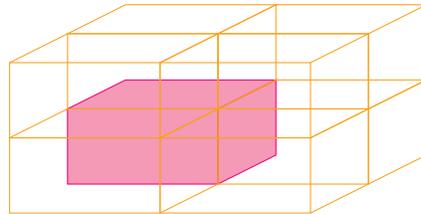
On note dans la démonstration  $\mathcal{M}$  la maille du réseau :

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^p [0, 1[e_1$$

En dimension deux, cela ressemble à :



Il peut sembler raisonnable que dans ce cas,  $V_0 = 4\lambda(\mathcal{M})$  peut suffire. En dimension 3 :



Il est cette fois raisonnable de penser que  $V_0 = 8\lambda(\mathcal{M})$  peut convenir. En dimension  $p$ , on va montrer que  $V_0 = 2^p\lambda(\mathcal{M})$  convient.

**Démonstration : 1.** Soit  $K$  un compact convexe fermé tel que  $\lambda(K) > V_0$ . On définit

$$K' \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2} \cdot K$$

Alors

$$\lambda(K') = \frac{1}{2^p} \lambda(K) > \lambda(\mathcal{M})$$

2. On a

$$\mathbb{R}^p = \bigsqcup_{a \in \mathcal{R}} \mathcal{M} + a$$

En effet, si  $a, b \in \mathcal{R}$ , et  $x \in (\mathcal{M} + a) \cap (\mathcal{M} + b)$  alors  $x$  s'écrit

$$x = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^p a_k e_k$$

avec  $\lambda_k \in [0, 1[$ ,  $a_k \in \mathbb{Z}$  et

$$x = \sum_{k=1}^p \mu_k e_k + \sum_{k=1}^p b_k e_k$$

avec  $\mu_k \in [0, 1[$ ,  $b_k \in \mathbb{Z}$ . Donc, puisque  $(e_k)_k$  est une base de  $\mathbb{R}^p$ ,

$$\lambda_k - \mu_k = b_k - a_k \in \mathbb{Z} \cap [0, 1[$$

d'où  $a = b$ . Donc l'union des  $\mathcal{M} + a$  est bien disjointe. De plus, si  $x \in \mathbb{R}^p$  alors

$$x = \sum_{k=1}^p (x_k - \lfloor x_k \rfloor) e_k + \sum_{k=1}^p \lfloor x_k \rfloor e_k$$

donc on a bien

$$\mathbb{R}^p = \bigsqcup_{a \in \mathcal{R}} \mathcal{M} + a$$

3. On peut donc calculer  $\lambda(K')$  grâce à cette observation :

$$\lambda(K') = \lambda \left( \bigsqcup_{a \in \mathcal{R}} K' \cap (\mathcal{M} + a) \right)$$

Par dénombrabilité de  $\mathcal{R}$ , il suit

$$\lambda(K') = \sum_{a \in \mathcal{R}} \lambda(K' \cap (\mathcal{M} + a))$$

Puis, parce que  $\lambda$  est invariante par translation,

$$\lambda(K') = \sum_{a \in \mathcal{R}} \lambda((K' - a) \cap \mathcal{M})$$

4. Montrons qu'il existe  $u, v \in K'$  distincts tels que  $u - v \in \mathcal{R}$ . Par l'absurde, si pour tout  $u, v \in K'$  distincts,  $u - v \notin \mathcal{R}$ , alors pour tout  $a \neq b$  de  $\mathcal{R}$ ,

$$(K' - a) \cap (K' - b) = \emptyset$$

Sinon, il existerait  $x \in \mathbb{R}^p$  tel que

$$x = k_1 - a = k_2 - b$$

avec  $k_i \in K'$ , et  $a - b = k_1 - k_2 \in \mathcal{R}$ , ce qui contredit  $u - v \notin \mathcal{R}$  pour tout  $u, v \in K'$ . Ainsi, l'union de  $K' - a$  est une union disjointe, donc

$$\lambda(K') = \lambda \left( \bigsqcup_{a \in \mathcal{R}} K' \cap (\mathcal{M} + a) \right)$$

Donc  $\lambda(K') \leq \lambda(\mathcal{M})$ . Ce qui contredit

$$\lambda(K') > \lambda(\mathcal{M})$$

Par conséquent, il existe donc  $u, v \in K'$  distincts tels que  $u - v \in \mathcal{R}$ .

5. Ainsi,  $u, v \in K' \subset K$  vérifie

$$u - v = \frac{1}{2}(2u - 2v)$$

Puisque  $K$  est convexe, il suit que  $u - v \in K$ , et puisque  $u - v \in \mathcal{R}$ , et est non nul, on a bien montré que

$$K \cap \mathcal{R} \setminus \{0\} \neq \emptyset$$

□

## 12 Pavage d'un rectangle par des carrés

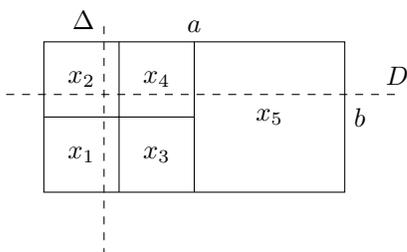
Référence : *Oraux X-ENS, Algèbre 3*, S. FRANCINO, H. GIANELLA, S. NICOLAS

### Proposition 12.1 : Théorème de DEHN (1903)

Soit  $R$  un rectangle de côtés  $a, b > 0$ . On suppose qu'il existe une partition de  $R$  en  $n$  carrés de côtés  $x_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors

$$\left( \frac{a}{b}, \frac{x_1}{b}, \dots, \frac{x_n}{b} \right) \in \mathbb{Q}^{n+1}$$

**Démonstration : 1.** On note  $D$  une droite horizontale qui traverse  $R$ , et qui coupe les carrés qu'il croise que deux fois. On note  $I_D$  l'ensemble des indices  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $D$  coupe les carrés de côtés  $x_i$ .



Alors

$$\sum_{i \in I_D} x_i = a$$

On note aussi  $\Delta$  une droite horizontale qui coupe chaque carré qu'il ne croise que deux fois, et  $J_\Delta$  les indices des carrés associés. Alors on dispose cette fois de la relation

$$\sum_{j \in J_\Delta} x_j = b$$

2. On obtient alors un système linéaire d'inconnues

$X \stackrel{\text{déf.}}{=} (a, x_1, \dots, x_n, b) \in \mathbb{R}^{n+2}$ , avec  $m$  équations. Matriciellement, il s'agit d'une équation du type

$$AX = 0$$

avec  $A \in \mathcal{M}_{m, n+2}(\mathbb{Z})$ . D'ailleurs,  $m \leq n + 2$  avec égalité si et seulement si les carrés sont tous de même longueur et sont alignés. On souhaite obtenir un système linéaire de rang  $n + 1$  : le noyau serait alors de dimension 1, donc  $X = \lambda \mathbf{u}$ , avec  $\mathbf{u} \in \mathbb{Q}^{n+2}$  non nul et  $\lambda \in \mathbb{R}$  non nul. Par conséquent, chaque quotient  $\frac{x_i}{x_j}$  (avec  $a \stackrel{\text{déf.}}{=} x_0$  et  $b \stackrel{\text{déf.}}{=} x_{n+1}$ ) s'écrivent comme

$$\frac{\lambda u_i}{\lambda u_j} \in \mathbb{Q}$$

Néanmoins,  $A$  n'est pas toujours de rang  $n + 1$ , on ajoute les équations sur les sous-rectangles formés par les carrés (par exemple  $(x_1 x_2)$  dans la figure est un sous-rectangle, qui donne l'équation  $x_1 = x_2$ ). On recherche d'autres équations pour assurer ce fait. L'égalité des surfaces dans le rectangle donne

$$ab = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

3. Pour se donner d'autres équations, on se donne  $Y$  une autre solution du système  $AX = 0$  (on peut la choisir distincte lorsque  $m < n + 2$ , ce qu'on peut supposer ici). Montrons qu'on a encore

$$y_0 y_{n+1} = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

Pour cela, on se donne  $t > 0$ , et on note  $X_t \stackrel{\text{déf.}}{=} X + tY$ .  $X_t$  est aussi solution du système linéaire. On suppose que  $t > 0$  est choisi de sorte que les  $x_i^{(t)} = x_i + ty_i$  soit encore strictement positifs. Puisque  $X_t$  est solution du système à coefficients strictement positifs, le rectangle de côtés  $x_0^{(t)}$  et  $x_{n+1}^{(t)}$  peut se paver en  $n$  carrés de côtés  $x_i^{(t)}$  avec  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En conséquence,

$$\sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2 = (x_0 + ty_0)(x_{n+1} + ty_{n+1})$$

On identifie ce polynôme coefficient par coefficient (l'égalité est vraie sur un voisinage de 0, donc sur  $\mathbb{R}$  puisqu'il s'agit d'un polynôme) pour avoir

$$y_0 y_{n+1} = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

Pour toute solution  $Y \in \mathbb{R}^{n+2}$  de  $AY = 0$ , quel que soit son signe.

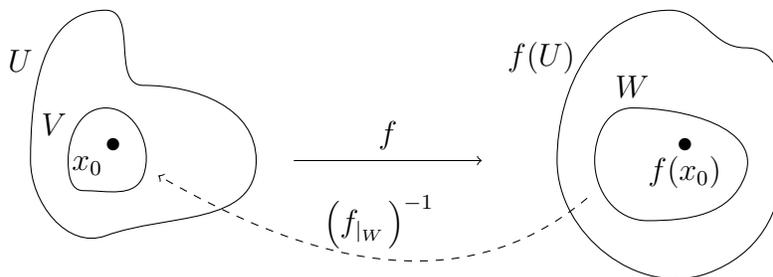
4. Ainsi, si  $Y$  est solution avec  $y_0 = -y_{n+1}$ , cela implique que tous les coefficients de  $Y$  sont nuls. Donc en ajoutant une équation au système homogène, le système n'admet plus qu'une seule solution : son rang est donc supérieur ou égal au nombre d'inconnues, autrement dit  $\text{rg}(A) \geq n + 1$ . □

## 13 Théorème d'inversion locale

Référence : *Mathématiques Tout-en-un pour la L2*, Jean-Pierre RAMIS

### Théorème 13.1 : Théorème d'inversion locale

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . On suppose qu'il existe  $x_0 \in U$  tel que  $df(x_0) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Alors il existe un ouvert  $V \subset U$  contenant  $x_0$ , un ouvert  $W$  contenant  $y_0 = f(x_0)$  tel que  $f$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme entre  $V$  et  $W$ .



**Démonstration :** On fait la démonstration en trois étapes : d'abord on construit les ouverts  $V$  et  $W$ , et  $g$  qui jouera le rôle de l'inverse de  $f$  sur  $V$ . Ensuite, on montrera que  $g$  est continue sur  $V$ . Puis, on montrera que  $g$  est  $C^1$ .

1. La construction de  $g$  repose sur le théorème du point fixe. Soit  $y \in \mathbb{R}^n$ . On définit, pour  $x \in U$ ,  $G_y(x)$  comme étant l'unique antécédent de  $y$  par

$$x' \mapsto f(x) + df(x_0) \cdot (x' - x)$$

Cette fonction "approche"  $f$  au voisinage de  $x$ . Autrement dit, on définit  $G_y$  de la sorte :

$$G_y : \begin{pmatrix} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & x + [df(x_0)]^{-1} \cdot (y - f(x)) \end{pmatrix}$$

Constatons alors que

$$G_y(x) = x \iff y = f(x)$$

Montrons que  $G_y$  est contractante au voisinage de  $x_0$ .

•  $G_y$  est de classe  $C^1$ . On peut calculer sa différentielle :

$$dG_y(x) = \text{id}_{\mathbb{R}^n} - [df(x_0)]^{-1} \cdot df(x)$$

Cette différentielle s'annule en  $x_0$ , et ne dépend pas de  $y$ . Par conséquent, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  et pour tout  $x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ ,

$$\|dG_y(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

où  $\|\cdot\| : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  est la norme subordonnée à une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

• Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis, si  $u \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|G_y(u) - G_y(x_0)\| \leq \sup_{v \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}} \|dG_y(v)\| \cdot \|u - x_0\|$$

Donc, pour tout  $u \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ ,

$$\|G_y(u) - G_y(x_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc

$$G_y \left( \overline{B(x_0, \varepsilon)} \right) \subset \overline{B \left( G_y(x_0), \frac{\varepsilon}{2} \right)}$$

• On définit les ouverts avec lesquels on va montrer le théorème. On note

$$W^\varepsilon \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid y - y_0 \in df(x_0) \left[ B \left( 0, \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] \right\}$$

Et

$$V^\varepsilon \stackrel{\text{déf.}}{=} \{ x \in B(x_0, \varepsilon) \mid f(x) \in W \}$$

Montrons qu'il s'agit d'ouverts. Pour cela, il suffit de réécrire les définitions.

$$W^\varepsilon = [df(x_0)]^{-1} \left( B \left( y_0, \frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$$

Puisque  $df(x_0)$  est une application linéaire continue, et qu'un translaté d'un ouvert est ouvert,  $W^\varepsilon$  est donc bien un ouvert, qui contient  $y_0$ . Pour  $V^\varepsilon$  :

$$V^\varepsilon = f^{-1}(W) \cap B(x_0, \varepsilon)$$

$f$  étant continue,  $V^\varepsilon$  est l'intersection de deux ouverts, donc  $V^\varepsilon$  est ouvert, et contient  $x_0$ .

• Soit  $y \in W^\varepsilon$ . Alors

$$G_y(x_0) = x_0 + [df(x_0)]^{-1} \cdot (y - y_0) \in B \left( x_0, \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Ainsi, si  $v \in \overline{B(G_y(x_0), \frac{\varepsilon}{2})}$ , alors

$$\|v - x_0\| \leq \|v - G_y(x_0)\| + \|G_y(x_0) - x_0\|$$

Donc,

$$\|v - x_0\| < \varepsilon$$

donc

$$\overline{B \left( G_y(x_0), \frac{\varepsilon}{2} \right)} \subset B(x_0, \varepsilon)$$

Autrement dit, avec le deuxième point, on a alors pour tout  $y \in W^\varepsilon$ ,

$$G_y \left( \overline{B(x_0, \varepsilon)} \right) \subset B(x_0, \varepsilon)$$

L'application  $G_y$  envoie donc le complet  $\overline{B(0, \varepsilon)}$  sur lui-même. De plus, si  $x, x' \in \overline{B(0, \varepsilon)}$ , l'inégalité des accroissements finis nous donne

$$\|G_y(x) - G_y(x')\| \leq \frac{1}{2} \|x - x'\|$$

donc  $G_y$  est contractante sur  $B(0, \varepsilon)$ . D'après le théorème du point fixe de Banach,  $G_y$  admet un unique point fixe  $g(y) \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ . Puisque  $G_y$  est à valeurs dans  $B(x_0, \varepsilon)$ , ce point fixe appartient aussi à la boule ouverte. Autrement dit, pour tout  $y \in W^\varepsilon$ , il existe un unique élément  $g(y) \in V^\varepsilon$  tel que

$$f(g(y)) = y$$

Autrement dit,

$$f|_V : B(x_0, \varepsilon) \cap f^{-1}(W^\varepsilon) \longrightarrow W^\varepsilon$$

est bijective, de réciproque  $g : W^\varepsilon \longrightarrow V^\varepsilon$ .

2. On note  $W = W^{\varepsilon_0}$  et  $V = V^{\varepsilon_0}$  où on a fixé  $\varepsilon_0 > 0$  comme dans les points précédents. Montrons que  $g$  est continue sur  $W$ .

• Dans un premier temps,  $g$  est continue en  $y_0$ . En effet, par définition de  $g$ , pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , et pour tout  $y \in W^\varepsilon$ ,

$$\|g(y) - x_0\| < \varepsilon$$

Or,  $y \in W^\varepsilon$  si et seulement si  $y - y_0 \in \text{df}(x_0) \cdot (B(0, \frac{\varepsilon}{2}))$ , donc si et seulement si

$$\|y - y_0\| \leq \|\text{df}(x_0)\| \varepsilon$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , il existe  $\delta = \|\text{df}(x_0)\| \varepsilon > 0$  tel que si  $\|y - y_0\| \leq \delta$ , on a

$$\|g(y) - g(y_0)\| < \varepsilon$$

$g$  est donc bien continue en  $y_0$ .

• Jusqu'ici, on a montré que si  $\text{df}(x_0)$  était inversible alors  $g$  existe sur  $W$ , et est continue en  $x_0$ . Montrons alors que  $\text{df}(x)$  est inversible sur  $W$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $x \in V$  tel qu'il existe  $h \in \mathbb{R}^n$  non nul tel que

$$\text{df}(x) \cdot h = 0$$

alors en particulier, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\text{d}G_y(x) \cdot h = h$$

Or, par définition de  $\varepsilon_0 > 0$ , et puisque  $V \subset \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}$ ,

$$\|\text{d}G_y(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

ce qui contredit l'égalité précédente. Par conséquent, pour tout  $x \in V$ ,  $\text{df}(x) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Donc, par le même raisonnement qu'au point 1., et le précédent, avec  $x_0$  remplacé par  $x$ , il suit que pour tout  $x \in V$ ,  $g$  est continue en  $f(x)$ , donc sur  $W$  par "surjectivité" de  $f : f(V) = W$  ("surjectivité" car il s'agit d'une construction artificielle qui mène à cette égalité).

3. Montrons finalement que  $g$  est classe  $C^1$  sur  $V$ .

• Pour cela, montrons d'abord que  $g$  admet des dérivées partielles en  $y_0$ . Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , et  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $y_0 + t, e_j \in W$ , on note

$$\Delta_j(t) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} g(y_0 + te_j) - g(y_0)$$

et on veut montrer que

$$\frac{\Delta_j(t)}{t} \xrightarrow[t \neq 0]{t \rightarrow 0} [\text{df}(x_0)]^{-1}(e_j)$$

Pour cela, observons qu'au voisinage de 0,

$$f(g(y_0 + te_j)) = f(g(y_0)) + \text{df}(x_0) \cdot \Delta_j(t) + o(\Delta_j(t))$$

Et puisque  $y_0 + te_j \in W$ , cela donne

$$y_0 + te_j = y_0 + \text{df}(x_0) \cdot \Delta_j(t) + o(\Delta_j(t))$$

Puisque  $\Delta_j(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$  par continuité de  $g$ , on a alors au voisinage de 0 :

$$\text{df}(x_0) \cdot \Delta_j(t) = te_j + o(\Delta_j(t)) = O(t)$$

Puisque  $\text{df}(x_0)$  est inversible linéaire, il suit que

$$\Delta_j(t) = t[\text{df}(x_0)]^{-1} \cdot e_j + o(\Delta_j(t))$$

Il suit que

$$\frac{\Delta_j(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} [\text{df}(x_0)]^{-1} \cdot e_j$$

donc  $g$  admet des dérivées partielles en  $y_0$  définies par

$$\frac{\partial g}{\partial y_j}(y_0) = [\text{df}(x_0)]^{-1} \cdot e_j$$

• Par continuité de  $g$  en tout  $x \in V$ , le calcul précédent en remplaçant  $x$  par  $x_0$  permet de montrer que  $g$  admet de dérivées partielles en  $x \in V$  données par

$$\frac{\partial g}{\partial y_j}(y) = [\text{df}(g(y))]^{-1} \cdot e_j$$

• Concluons en montrant que les dérivées partielles de  $g$  sont continues. Pour cela, les égalités sur les dérivées partielles montrent que pour tout  $y \in W$ ,

$$\text{d}g(y) = [\text{df}(g(y))]^{-1}$$

Puisque  $g$  est continue, puisque  $f$  est  $C^1$ , puisque  $u \mapsto u^{-1}$  est continue sur  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ , il suit que  $y \mapsto \text{d}g(y)$  est continue. Ainsi,  $g$  est bien de classe  $C^1$  sur  $W$ .

$f$  est bijective et de classe  $C^1$  sur  $V$  dans  $W = f(V)$ , d'inverse  $g$  de classe  $C^1$  sur  $W$  dans  $V$ .  $f$  est donc un  $C^1$ -difféomorphisme de  $V$  dans  $W$ .  $\square$

## 14 Théorème des fonctions implicites

Référence : *Mathématiques Tout-en-un pour la L2*, Jean-Pierre RAMIS

**Théorème 14.1 : Théorème des fonctions implicites**

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{p+m}$  et

$$F : \begin{pmatrix} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & (F_1(x), \dots, F_m(x)) \end{pmatrix}$$

une application de classe  $C^1$ . On suppose qu'il existe  $(a, b) \in U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$  tel que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a, b) \end{pmatrix} \in \text{GL}_m(\mathbb{R})$$

Alors il existe un voisinage  $U' \subset \mathbb{R}^{p+m}$  de  $(a, b)$ , un voisinage  $V \subset \mathbb{R}^p$  de  $a$  et une application  $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$  telle que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^{p+m}$  :

$$\begin{cases} (x, y) \in U' \\ F(x, y) = F(a, b) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in V \\ y = f(x) \end{cases}$$

**Démonstration : 1.** Montrons qu'on peut se ramener au cas où la matrice

$$B \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

des dérivées partielles prises en  $(a, b)$  est la matrice identité. Pour cela, si  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$  est l'application associée à  $M$  dans la base canonique, on note

$$G \stackrel{\text{déf.}}{=} L^{-1} \circ F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Dans la base canonique,  $F(x, y)$  se décompose, avec  $(x, y) \in U$  :

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n F_i(x, y)e_i$$

On note  $\ell_{i,j}$  les coefficients de  $L^{-1}$  dans la base canonique. Alors

$$L^{-1} \circ F(x, y) = \sum_{i=1}^n F_i(x, y)L^{-1}(e_i)$$

Soit encore, en réarrangeant les sommes

$$L^{-1} \circ F(x, y) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \ell_{i,j} F_i(x, y) \right) e_j$$

donc, on a, avec  $G = (G_1, \dots, G_m)$  :

$$G_j(x, y) = \sum_{i=1}^n \ell_{i,j} F_i(x, y)$$

Donc, en dérivant par rapport à  $y_k$  :

$$\frac{\partial G_j}{\partial y_k}(a, b) = \sum_{i=1}^n \ell_{i,j} \frac{\partial F_i}{\partial y_k}(a, b)$$

Ce qui se réécrit en termes de produit scalaire

$$\frac{\partial G_j}{\partial y_k}(a, b) = \langle L^{-1}e_k, {}^t L e_j \rangle = \delta_{k,j}$$

donc

$$\left( \frac{\partial G_i}{\partial y_j}(a, b) \right)_{1 \leq i, j \leq m} = I_m$$

On considère donc dans le reste de cette démonstration que la matrice des dérivées partielles de  $F$  par rapport aux variables  $y_k$  est la matrice identité.

**2.** On montre le théorème par récurrence sur  $m \geq 1$ .

On suppose que  $m = 1$ .

- On dispose donc d'une application

$$F : U \subset \mathbb{R}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

de classe  $C^1$  avec

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = 1$$

où  $a \in \mathbb{R}^p$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Par continuité des dérivées partielles de  $F$ , il existe alors  $\delta > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in U$ , si  $\|x - a\| < \delta$  et  $|y - b| < \delta$  alors

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$$

id est

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$$

• Puisque  $F(a, \cdot)$  est de dérivée strictement positive sur l'ouvert  $]b - \delta, b + \delta[$ , il suit que pour tout  $\varepsilon > 0$  avec  $\varepsilon < \delta$ ,

$$F(a, b - \varepsilon) < F(a, b) < F(a, b + \varepsilon)$$

Or,  $F$  est continue, donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta_\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in B(a, \eta_\varepsilon) \stackrel{\text{déf.}}{=} B^\varepsilon$  :

$$|F(x, b - \varepsilon) - F(a, b - \varepsilon)| < \frac{F(a, b) - F(a, b - \varepsilon)}{2}$$

et

$$|F(x, b + \varepsilon) - F(a, b + \varepsilon)| < \frac{F(a, b + \varepsilon) - F(a, b)}{2}$$

Ainsi, pour tout  $x \in B^\varepsilon$  :

$$F(x, b - \varepsilon) < F(a, b) < F(x, b + \varepsilon)$$

• On note pour tout  $x \in B^\varepsilon$

$$\Phi_x : \begin{pmatrix} ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & F(x, y) - F(a, b) \end{pmatrix}$$

Alors  $\Phi_x$  est une application continue strictement croissante qui vérifie

$$\begin{cases} \Phi_x(b - \varepsilon) = F(x, b - \varepsilon) - F(a, b) < 0 \\ \Phi_x(b + \varepsilon) = F(x, b + \varepsilon) - F(a, b) > 0 \end{cases}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $\Phi_x$  admet alors un unique zéro dans  $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ . Autrement dit, pour tout  $x \in B^\varepsilon$ , il existe un unique élément  $f(x) \in ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$  tel que

$$F(x, y) = F(a, b)$$

Ce qui donne l'équivalence :

$$\begin{cases} (x, y) \in B^\varepsilon \times ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ \\ F(x, y) = F(a, b) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in B^\varepsilon \\ y = f(x) \end{cases}$$

Montrons que  $f$  est  $C^1$ .

•  $f$  est continue en  $a$ . En effet, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \delta[$ , il existe  $\eta_\varepsilon > 0$  tel que si  $\|x - a\| < \eta_\varepsilon$  alors

$$|f(x) - f(a)| = |y - b| < \varepsilon$$

Or, puisque le raisonnement reste valable sur tout  $(x, f(x))$  avec  $x \in B^\varepsilon$  au lieu de  $(a, b)$  (la dérivée partielle par rapport à  $y$  est strictement positive, donc strictement positive sur un voisinage), donc  $f$  est en fait continue sur  $B^\varepsilon$ .

• Par conséquent, si  $x \in B^\varepsilon$ , et  $y = f(x)$ , la quantité

$$\Delta_j(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} f(x + te_j) - y_0$$

tend vers 0 lorsque  $[t \rightarrow 0]$ . De plus, pour  $t$  assez petit,  $x + te_j \in B^\varepsilon$  et donc

$$F(x + te_j, y + te_j) = F(x + te_j, f(x + te_j)) = F(a, b)$$

Soit encore

$$F(x + te_j, y + te_j) = F(x, y)$$

Or, par la formule de Taylor-Young,

$$\begin{aligned} F(x + te_j, y + te_j) &\underset{t \rightarrow 0}{=} F(x, y) + t \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y) \\ &+ \Delta_j(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ &+ o(t) + o(\Delta_j(t)) \end{aligned}$$

Or, par définition de  $\varepsilon$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ , donc

$$\Delta_j(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -t \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} + o(t) + o(\Delta_j(t))$$

Donc  $\Delta_j(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} O(t)$ , et donc

$$\Delta_j(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -t \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} + o(t)$$

donc  $f$  admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables, avec pour tout  $x \in B^\varepsilon$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Par continuité des dérivées partielles de  $F$ , les dérivées partielles de  $f$  sont donc continues.  $f$  est donc bien de classe  $C^1$  sur  $B^\varepsilon$ . Ce qui montre l'initialisation de la récurrence.

**3.** Montrons le caractère héréditaire du théorème. Montrons que d'un système avec  $m + 1$  équations, on peut se ramener à  $m$  équations. Pour cela, on se donne

$$F : U \subset \mathbb{R}^{p+m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$$

de classe  $C^1$ , de paramètres  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ . On suppose que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_m} & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

des dérivées partielles n'est autre que  $I_{m+1}$ , lorsqu'on la prend en  $(a, b, c)$  avec  $(a, b, c) \in U$ . Alors

$$\frac{\partial F_{m+1}}{\partial z}(a, b, c) = 1$$

• D'après le cas  $m = 1$ , traité en 2., il existe un voisinage  $U'$  de  $(a, b)$  et une application  $\varphi : U' \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $(x, y) \in U'$  :

$$F_{m+1}(x, y, z) = F_{m+1}(x, y, \varphi(x, y)) \iff z = \varphi(x, y)$$

De plus, toujours par le cas 2., l'application  $\varphi$  est de classe  $C^1$  est vérifiée

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(a, b) = \frac{-\frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_j}(a, b)}{\frac{\partial F_{m+1}}{\partial z}(a, b)}$$

Or,

$$\frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_j}(a, b) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(a, b) = 0$$

• Ainsi, on a montré que pour tout  $(x, y, z) \in U$  avec  $(x, y) \in U'$  :

$$F(x, y, z) = F(a, b, c) \iff G(x, y) = G(a, b)$$

où

$$G(x, y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} F_1(x, y, \varphi(x, y)) \\ \vdots \\ F_m(x, y, \varphi(x, y)) \end{pmatrix}$$

$G$  est alors de classe  $C^1$  et vérifie

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_j}(a, b) = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b, c) + \frac{\partial F_i}{\partial z}(a, b, c) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(a, b)$$

Puisque la dérivée partielle sur  $\varphi$  est nulle, il suit que

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_j}(a, b) = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b, c)$$

Par conséquent,

$$\left( \frac{\partial G_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq m} = I_m$$

On s'est donc ramené à la recherche de  $G(x, y) = G(a, b)$ , avec  $G : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$ , avec la matrice des dérivées partielles par rapport à  $y$  étant égale à  $I_m$ . Donc, on s'est ramené au cadre de l'hypothèse de récurrence : il existe donc un voisinage  $V$  de  $a$  et une application  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$  telle que pour tout  $(x, y) \in U'$  tels que  $x \in V$

$$G(x, y) = G(a, b) \iff y = g(x)$$

• Morale de l'histoire : pour  $(x, y, z) \in U$  avec  $x \in V, (x, y) \in U'$ ,

$$F(x, y, z) = F(a, b, c) \iff (y, z) = (g(x), \varphi(x, g(x)))$$

donc  $(z, y) = f(x)$  avec  $f$  de classe  $C^1$ . Cela conclut la récurrence, et la démonstration du théorème des fonctions implicites.  $\square$

## 15 Équivalence entre le théorème des fonctions implicites et le théorème d'inversion locale

Référence : *Mathématiques Tout-en-un pour la L2*, Jean-Pierre RAMIS

### Théorème 15.1

Le théorème des fonctions implicites est équivalent au théorème d'inversion locale.

**Démonstration : [TIL  $\implies$  TFI]** On suppose vrai le théorème d'inversion local. Montrons le théorème des fonctions implicites. On considère

$$F : U \subset \mathbb{R}^{p+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

de classe  $C^1$ , et  $(a, b) \in U$  tels que la matrice  $\left( \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b) \right)_{1 \leq i, j \leq m}$  des dérivées partielles par rapport à  $y$

prises en  $a, b$  est inversible. On considère

$$g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \\ (x, y) & \longmapsto & (x, F(x, y)) \end{pmatrix}$$

Montrons que  $g$  vérifie les hypothèses du théorème d'inversion local. La jacobienne de  $g$  en  $(x, y)$  s'écrit par blocs

$$\partial_X g(x, y) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ A(x, y) & B(x, y) \end{pmatrix}$$

avec  $A(x, y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \left( \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq m}$  et  $B(x, y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ . On voit alors que  $g$  est de classe  $C^1$  avec de plus

$$\det(\partial_X g(x, y)) = \det(A(x, y))$$

(on développe par exemple, ce n'est pas un calcul par blocs ici).  $g$  est de classe  $C^1$  avec  $dg(a, b)$  inversible. Le théorème d'inversion local permet alors de déterminer un voisinage  $U' \subset U$  de  $(a, b)$  tel que  $g$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U'$  dans  $g(U')$ . Quitte à réduire  $U'$ , supposons que  $g(U') = V \times W$ , avec  $V \subset \mathbb{R}^p$  un voisinage de  $a$ , et  $W \subset \mathbb{R}^m$  un voisinage de  $b$ .  $g^{-1}$  s'écrit donc (l'application inverse de l'identité est elle-même) :

$$g^{-1} : \left( \begin{array}{ccc} V \times W & \longrightarrow & U' \\ (x, y) & \longmapsto & (x, h(x, y)) \end{array} \right)$$

avec  $h(x, y) \in \mathbb{R}^m$  et  $h$  de classe  $C^1$ . Ainsi, résoudre  $F(x, y) = F(a, b)$  sur  $U'$  revient à résoudre  $g(x, y) = (x, F(a, b))$  sur  $U'$ , donc

$$(x, y) = (x, f(x))$$

avec

$$f : \left( \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & h(x, F(a, b)) \end{array} \right)$$

de classe  $C^1$ . Par conséquent,

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in U' \\ F(x, y) = F(a, b) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x \in V \\ y = f(x) \end{array} \right.$$

d'où le théorème des fonctions implicites.

**[TFI  $\implies$  TIL]** Supposons acquis le théorème des fonctions implicites. Montrons le théorème d'inversion locale. On considère  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  et  $x_0 \in U$

tel que  $df(x_0) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrons qu'il existe  $V$  un voisinage de  $x_0$ ,  $W$  un voisinage de  $f(x_0)$  tel que  $f$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme de  $V$  dans  $W$ . Pour cela, on considère

$$F : \left( \begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \longmapsto & f(x) - y \end{array} \right)$$

On note  $c_0 \stackrel{\text{déf.}}{=} (x_0, f(x_0))$ . Alors  $F(x_0, f(x_0)) = 0$  et

$$\partial_X F(c_0) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(c_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage  $U' \subset U \times \mathbb{R}^n$  de  $c_0$ , un voisinage  $W \subset \mathbb{R}^n$  de  $f(x_0)$  et une application  $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in U' \\ f(x) - y = F(x, y) = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} y \in W \\ x = g(y) \end{array} \right.$$

Autrement dit, pour tout  $y \in W$ , l'équation  $y = f(x)$  admet une unique solution  $x$  telle que  $(x, y) \in U'$ . On note alors

$$V \stackrel{\text{déf.}}{=} g(W)$$

et donc  $f : V \longrightarrow W$  est injective. Montrons qu'il s'agit d'une bijection. Si  $x \in V$ , alors il existe  $y \in W$  tel que  $x = g(y)$ . Ainsi,  $F(x, y) = 0 = f(x) - y$ , donc  $y = f(x)$ . Autrement dit,  $y = f(g(y))$ , donc  $g$  est l'inverse de  $f$  à droite. De même,  $x = g(f(x))$ , par unicité de la solution, donc  $g$  est inverse à gauche de  $f$ .  $f$  admet donc une application réciproque  $g$ , donc  $f : V \longrightarrow W$  est bijective, de réciproque  $g$  de classe  $C^1$ . On a donc montré le théorème d'inversion local.  $\square$

## 16 Développements de l'anomalie excentrique

*Référence : Petit guide de calcul différentiel, François ROUVIÈRE*

Cette section développe un aspect très utile du théorème d'inversion locale  $C^\infty$  et holomorphe : des justifications de développements en série sur des voisinages, ou de dérivations pour mener à des équations aux dérivées partielles. Ici, on est dans le cas de la loi des aires :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$$

où  $C$  est la *constante des aires*. En notant  $(x, y) = (a \cos(v), b \sin(v))$ , et  $\varepsilon$  l'excentricité de l'ellipse que décrit  $(x(t), y(t))$  (qui est définie par  $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ), on peut montrer que cette équation est équivalente, modulo redimensionnement, à l'équation dite de KEPLER :

$$v - \varepsilon \sin(v) = t$$

**Proposition 16.1 : Développement en série de l'équation de KEPLER**

Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon \in ]-1, 1[$ . Alors l'équation

$$v - \varepsilon \sin(v) = t$$

admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , que l'on note  $v(t, \varepsilon)$ . L'application  $(t, \varepsilon) \mapsto v(t, \varepsilon)$  est de classe  $C^\infty$ . Enfin, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon \in ]-e^{-1}, e^{-1}[$ , on dispose du développement :

$$v(t, \varepsilon) = t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [\sin^n t]$$

**Démonstration : 1.** On définit pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in ]-1, 1[$  et  $v \in \mathbb{R}$  :

$$F(v, \varepsilon, t) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} v - \varepsilon \sin(v) - t$$

Alors, l'application  $v \mapsto F(v, \varepsilon, t)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec

$$\frac{\partial F}{\partial v}(v, \varepsilon, t) = 1 - \varepsilon \cos(v) > 0$$

Donc l'application  $v \mapsto F(v, \varepsilon, t)$  est strictement croissante, tend vers  $-\infty$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  en  $+\infty$ . Ainsi, le théorème des valeurs intermédiaires nous fournit une unique solution  $v(t, \varepsilon)$  sur  $\mathbb{R}$  de l'équation :

$$v - \varepsilon \sin(v) = t$$

**2.**  $F$  est de plus une application  $C^\infty$ , et qui vérifie pour tout  $(t_0, \varepsilon_0) \in \mathbb{R} \times ]-1, 1[$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial v}(v(t_0, \varepsilon_0), \varepsilon_0, t_0) > 0$$

D'après le théorème des fonctions implicites, version  $C^\infty$ , il existe un voisinage  $U_0 \subset \mathbb{R} \times ]-1, 1[ \times \mathbb{R}$  de  $(v(t_0, \varepsilon_0), \varepsilon_0, t_0)$ , un voisinage  $V_0 \subset ]-1, 1[ \times \mathbb{R}$  de  $(t_0, \varepsilon_0)$  et une application  $\varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  tel que

$$\begin{cases} (v, t, \varepsilon) \in U_0 \\ F(v, \varepsilon, t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (t, \varepsilon) \in V_0 \\ v = \varphi(t, \varepsilon) \end{cases}$$

Par unicité de la solution,  $\varphi(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon)$  sur  $V_0$ , donc pour tout  $(t_0, \varepsilon_0) \in \mathbb{R} \times ]-1, 1[$ , pour tout voisinage  $V_0$  de ce point,  $v$  est de classe  $C^\infty$  sur  $V_0$ , donc  $v$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times ]-1, 1[$ .

**3.** Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On note pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  :

$$F_t(v, \varepsilon) = v - \varepsilon \sin(v) - t$$

Pour tout  $v \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon F_t(v, \varepsilon)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , tout comme  $v \mapsto F_t(v, \varepsilon)$ . De plus,

$$\frac{\partial F_t}{\partial v}(v(0), \varepsilon) = 1 > 0$$

D'après le théorème des fonctions implicites, version holomorphe, il existe un voisinage de 0, disons  $B(0, R[$ , sur lequel  $\varepsilon \mapsto v(t, \varepsilon)$  est holomorphe. Pour  $\varepsilon \in B(0, R[$ ,  $v(t, \varepsilon)$  admet alors un développement en série entière en 0 :

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\partial^n v}{\partial \varepsilon^n}(t, 0)$$

On s'intéresse alors au calcul des dérivées partielles de  $v$  par rapport à  $\varepsilon$ .

**4.** Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{\partial^n v}{\partial \varepsilon^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ \sin^n v \frac{\partial v}{\partial t} \right]$$

• Pour  $n = 1$ . On part de l'équation de Kepler :

$$v - \varepsilon \sin(v) = t$$

On la dérive par rapport à  $\varepsilon$  :

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} - \sin(v) - \varepsilon \cos(v) \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = 0$$

D'où

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \frac{\sin v}{1 - \varepsilon \cos v}$$

Puis, dérivons l'équation de Kepler par rapport à  $t$  :

$$1 = \frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon \cos v \frac{\partial v}{\partial t}$$

D'où

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos v}$$

Donc, au rang  $n = 1$ , on a bien

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \sin v \frac{\partial v}{\partial t}$$

ce qui montre l'initialisation de la récurrence.

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que

$$\frac{\partial^n v}{\partial \varepsilon^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ \sin^n v \frac{\partial v}{\partial t} \right]$$

Dérivons cette égalité par rapport à  $\varepsilon$ .

$$\frac{\partial^{n+1}v}{\partial \varepsilon^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ \sin^n v \frac{\partial v}{\partial t} \right] \right]$$

D'après le théorème de Schwarz, puisque les applications en jeu sont  $C^\infty$  donc  $C^2$  :

$$\frac{\partial^{n+1}v}{\partial \varepsilon^{n+1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \sin^n v \frac{\partial v}{\partial t} \right] \right]$$

On s'intéresse au terme entre crochets. On dérive le produit par rapport à  $\varepsilon$ , on utilise le lemme de Schwarz sur le deuxième terme.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \sin^n v \frac{\partial v}{\partial t} \right] &= n \cos(v) \sin^{n-1}(v) \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} \\ &+ \sin^n(v) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \varepsilon} \end{aligned}$$

Or, par l'initialisation,

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \sin v \frac{\partial v}{\partial t}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \sin^n v \frac{\partial v}{\partial t} \right] &= n \cos(v) \sin^n(v) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \\ &+ \sin^n(v) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sin v \frac{\partial v}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

Soit, en dérivant le produit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \sin^n v \frac{\partial v}{\partial t} \right] &= n \cos(v) \sin^n(v) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \\ &+ \sin^n(v) \cos(v) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \\ &+ \sin^{n+1}(v) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned}$$

On regroupe les deux premiers termes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \sin^n v \frac{\partial v}{\partial t} \right] &= (n+1) \cos(v) \sin^n(v) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \\ &+ \sin^{n+1}(v) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned}$$

On reconnaît donc la dérivée d'un produit :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \sin^n v \frac{\partial v}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sin^{n+1}(v) \frac{\partial v}{\partial t} \right]$$

Et donc, on a montré que

$$\frac{\partial^{n+1}v}{\partial \varepsilon^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \sin^{n+1} v \frac{\partial v}{\partial t} \right]$$

Ce qui conclut la récurrence.

5. On peut reprendre le cours de nos calculs. On avait montré que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon \in B(0, R[$  :

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\partial^n v}{\partial \varepsilon^n}(t, 0)$$

Donc, on obtient, puisque  $v(t, 0) = t$  et  $\frac{\partial v}{\partial t}(t, 0) = 1$  :

$$v(t, \varepsilon) = t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^n}{d\varepsilon^n} [\sin^n v]$$

Pour conclure, montrons que  $R \geq e^{-1}$ . On linéarise le sinus, pour estimer ensuite ses dérivées. Par la formule d'Euler,

$$\sin^n(t) = \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^n$$

Puis, par le binôme de Newton,

$$\sin^n(t) = \frac{1}{2^n i^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)t}$$

Ainsi, on peut majorer les dérivées de  $\sin^n$  :

$$\left| \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [\sin^n(t)] \right| = \frac{1}{2^n} \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)t} i^{n-1} (n-2k)^{n-1} \right|$$

On utilise l'inégalité triangulaire.

$$\left| \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [\sin^n(t)] \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^{n-1}$$

Enfin,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ , c'est une application du binôme. D'où finalement

$$\left| \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [\sin^n(t)] \right| \leq n^{n-1}$$

Ainsi, revenons à la série initiale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^n}{d\varepsilon^n} [\sin^n v] \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} \cdot |\varepsilon|^n$$

On conclut au rayon de convergence de la série de droite par la règle de d'Alembert (on peut aussi utiliser la formule de Hadamard) :

$$\frac{\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}}{\frac{n^{n-1}}{n!}} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

donc la série de droite est de rayon de convergence  $e^{-1}$ . La série de gauche est donc de rayon de convergence supérieur ou égal à  $e^{-1}$ . Par conséquent, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , pour tout  $\varepsilon \in ]-e^{-1}, e^{-1}[$  :

$$v(t, \varepsilon) = t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^n}{d\varepsilon^n} [\sin^n v]$$

Ce qui conclut le développement de la solution de l'équation de Kepler. □

On dispose d'un développement en série de FOURIER de la solution.

**Proposition 16.2 : Développement en série de FOURIER de l'équation de KEPLER**

On note  $v(\varepsilon, t)$  l'application de la proposition 16.1. Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $\varepsilon \in ]-1, 1[$ ,

$$v(t, \varepsilon) = t + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n(n\varepsilon)}{n} \sin(nt)$$

avec  $J_n(x)$  défini par :

$$J_n(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \vartheta} e^{-in\vartheta} d\vartheta$$

**Démonstration : 1.** Le développement en série précédent permettrait de voir que  $t \rightarrow v(t, \varepsilon)$  est impaire et  $2\pi$ -périodique. Utilisons des arguments plus élémentaire, en revenant sur l'unicité de la solution de Kepler

$$v - \varepsilon \sin(v) = t$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon \in ]-1, 1[$ ,  $v(t, \varepsilon) + 2\pi$  vérifie

$$v - \varepsilon \sin(v) = t + 2\pi$$

Tout comme  $v(t + 2\pi, \varepsilon)$ . Par unicité de la solution :

$$v(t + 2\pi, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) + 2\pi$$

par conséquent,  $t \mapsto v(t, \varepsilon)$  est  $2\pi$ -périodique. Pour l'imparité, on observe que  $-v(t, \varepsilon)$  est solution de

$$v - \varepsilon \sin(v) = -t$$

tout comme  $v(-t, \varepsilon)$ . L'unicité de la solution donne alors que  $v(-t, \varepsilon) = -v(t, \varepsilon)$ .

**2.** Fixons  $\varepsilon \in ]-1, 1[$ . D'après la proposition précédente,  $t \mapsto v(t, \varepsilon) - t$  est de classe  $C^\infty$ , et par le point précédent, est  $2\pi$ -périodique. On peut alors développer en série de Fourier cette application.

$$v(t, \varepsilon) - t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (v(t, \varepsilon) - t) e^{-int} dt$$

Calculons cette intégrale pour  $n \neq 0$ . L'imparité de  $t \mapsto v(t, \varepsilon) - t$  montre que  $c_0 = 0$ . Pour  $n \neq 0$ , on fait une intégration par parties, on dérive  $v(t, \varepsilon) - t$ .

$$c_n = \left[ \frac{v(t, \varepsilon) - t}{-in} e^{-int} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{-1}{2in\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \left( \frac{\partial v}{\partial t}(t, \varepsilon) - 1 \right) dt$$

Le terme entre crochet est nul, par périodicité. Donc,  $c_n$ , pour  $n \neq 0$ , s'écrit à ce stade :

$$c_n = \frac{1}{2in\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \left( \frac{\partial v}{\partial t}(t, \varepsilon) - 1 \right) dt$$

Puisque  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt = 0$ , cela se réécrit encore

$$c_n = \frac{1}{2in\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \frac{\partial v}{\partial t}(t, \varepsilon) dt$$

Ainsi, on souhaite faire alors le changement de variables

$$t = \vartheta - \varepsilon \sin(\vartheta) \iff \vartheta = v(t, \varepsilon)$$

Or,  $\vartheta \mapsto \vartheta - \varepsilon \sin(\vartheta)$  est un  $C^1$ -difféomorphisme sur  $\mathbb{R}$  qui envoie  $-\pi$  sur  $-\pi$  et  $\pi$  sur  $\pi$ . Ainsi, on peut faire le changement de variables. Ce qui permet d'avoir

$$c_n = \frac{1}{2in\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(\vartheta - \varepsilon \sin(\vartheta))} d\vartheta$$

Soit encore

$$c_n = \frac{1}{in} J_n(n\varepsilon)$$

Ainsi,

$$v(t, \varepsilon) = t + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{J_n(n\varepsilon)}{in} e^{int}$$

Puis, par imparité de  $v(t, \varepsilon)$  :

$$v(t, \varepsilon) = t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2iJ_n(n\varepsilon)}{in} \sin(nt)$$

Soit encore

$$v(t, \varepsilon) = t + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n(n\varepsilon)}{n} \sin(nt)$$

□

## 17 Asymptotique d'une équation du troisième degré

Référence : *Petit guide de calcul différentielle*, François ROUVIÈRE

C'est encore une application des fonctions implicites ici, qui permet de développer non pas cette fois un développement en séries entières ou de FOURIER, mais un comportement asymptotique d'une solution d'une équation, et d'une intégrale dépendant de ces solutions. On se place dans le cas d'une équation de degré 3. Selon la référence, l'intégrale en question expliquerait les différences d'angles observés pour Mercure, et aurait créé beaucoup de joie chez EINSTEIN...

### Proposition 17.1

Soient  $a < b$  deux réels. On définit pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x, \varepsilon) = (x - a)(b - x) + \varepsilon x^3$$

Alors il existe un voisinage de 0 tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  dans ce voisinage,  $x \mapsto f(x, \varepsilon)$  admet trois solutions distinctes réelles  $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$ , admettant les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{cases} x_1(\varepsilon) & \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} & a - \frac{a^3}{b-a}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ x_2(\varepsilon) & \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} & b + \frac{b^3}{b-a}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ x_3(\varepsilon) & \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} & \frac{1}{\varepsilon} - (a + b) - \frac{b^3 - a^3}{b-a}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \end{cases}$$

De plus, si on note sur le voisinage de 0 en question

$$I(\varepsilon) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{f(x, \varepsilon)}}$$

Alors

$$I(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \pi + \frac{3\pi}{4}(a + b) \cdot \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

**Démonstration : 1.** L'application  $f$  est de classe  $C^1$ , effectuer un développement à l'ordre 2 de  $x_1$ , par la formule vérifie  $f(a, 0) = 0$  et de Taylor-Young :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varepsilon) = a + b - 2x + 3\varepsilon x^2$$

$$x_1(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} x_1(0) + \varepsilon x_1'(0) + O(\varepsilon^2)$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, 0) = b - a > 0$$

$x_1(0)$  est la solution dans le voisinage de  $a$  de  $f(x, 0) = 0$ , donc  $x_1(0) = a$ . Déterminons  $x_1'(0)$ . Pour cela, on dispose de la relation sur  $V$  :

$$f(x_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0$$

Le théorème des fonctions implicites nous fournit alors un voisinage  $U'$  de  $(a, 0)$ , un voisinage de  $V$  de 0 et une application  $x_1 : V \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

On dérive par rapport à  $\varepsilon$  :

$$\begin{cases} (x, \varepsilon) \in U' \\ f(x, \varepsilon) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \varepsilon \in V \\ x = x_1(\varepsilon) \end{cases}$$

$$x_1'(\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1(\varepsilon), \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0$$

Donc

Puisque  $f$  est de classe  $C^\infty$ , la version  $C^\infty$  de ce théorème nous indique que  $x_1$  est de classe  $C^\infty$ . On peut alors

$$x_1'(\varepsilon) (a + b - 2x_1(\varepsilon) + 3\varepsilon x_1^2(\varepsilon)) + x_1(\varepsilon)^3 = 0$$

Donc on dispose de l'expression de la dérivée de  $x_1(\varepsilon)$  :

$$x_1'(\varepsilon) = \frac{-x_1(\varepsilon)^3}{a + b - 2x_1(\varepsilon) + 3\varepsilon x_1(\varepsilon)^2}$$

donc en particulier pour  $\varepsilon = 0$ ,

$$x_1'(0) = \frac{-a^3}{b-a}$$

D'où le développement à l'ordre 2 de  $x_1$  :

$$x_1(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} a - \frac{a^3}{b-a}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

On fait de même en  $b$ , utiliser le théorème des fonctions implicites pour définir  $x_2$ , et faire un développement de Taylor :

$$x_2(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} b + \frac{b^3}{b-a}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Enfin, pour la troisième racine (qui est réelle), on dispose des relations racines-coefficients, donc en particulier :

$$x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon) + x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$$

D'où le développement à l'ordre 2 de  $x_3(\varepsilon)$  :

$$x_3(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\varepsilon} - (a+b) - \frac{b^3 - a^3}{b-a}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Par conséquent, pour  $\varepsilon > 0$  et  $\frac{1}{\varepsilon} > a+b$ , l'équation  $f(x, \varepsilon) = 0$  d'inconnue  $x$  admet trois solutions distinctes qui vérifient  $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$ .

2. • On peut factoriser  $f(x, \varepsilon)$  :

$$f(x, \varepsilon) = \varepsilon(x - x_1(\varepsilon))(x - x_2(\varepsilon))(x - x_3(\varepsilon))$$

Puis, en utilisant la relation racine-coefficient qu'on a déjà exploité précédemment, on peut exprimer  $f(x, \varepsilon)$  en fonction de  $x, x_1$  et  $x_2$  :

$$f(x, \varepsilon) = (x - x_1(\varepsilon))(x_2(\varepsilon) - x)(1 - \varepsilon(x + x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon)))$$

Ainsi,  $I(\varepsilon)$  s'exprime de la sorte :

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{(1 - \varepsilon(x + x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon)))^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(x - x_1(\varepsilon))(x_2(\varepsilon) - x)}} dx$$

Ainsi, puisque  $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$ ,  $I(\varepsilon)$  est bien défini : l'application  $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{f(x, \varepsilon)}}$  est continue sur  $[x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon)]$ .

• On pose

$$u(\varepsilon) = \frac{x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon)}{2}$$

et

$$v(\varepsilon) = \frac{x_2(\varepsilon) - x_1(\varepsilon)}{2} > 0$$

On fait le changement de variables

$$x = u(\varepsilon) + v(\varepsilon) \sin(t)$$

Puis, après simplification, cela mène à

$$I(\varepsilon) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \varepsilon(3u(\varepsilon) + v(\varepsilon) \sin t)}}$$

• On note

$$y(t, \varepsilon) = 3u(\varepsilon) + v(\varepsilon) \sin t$$

Les développements asymptotiques de  $x_1(\varepsilon)$  et  $x_2(\varepsilon)$  donnent ceux de  $u$  et  $v$  :

$$u(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{a+b}{2} + \frac{b^3 - a^3}{2(b-a)}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

et

$$v(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{b-a}{2} + \frac{b^3 + a^3}{2(b-a)}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

D'où le développement asymptotique de  $y(t, \varepsilon)$  :

$$y(t, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{3}{2}(a+b) + \frac{3\varepsilon}{2} \left( \frac{b^3 - a^3}{b-a} \right) + O(\varepsilon^2) + \frac{b-a}{2} \sin t + \frac{b^3 + a^3}{2(b-a)}\varepsilon \sin t + O(\varepsilon^2)$$

Avec chaque  $O(\varepsilon^2)$  qui ne dépend pas de  $t$ . On note alors

$$y(t, \varepsilon) = \frac{3}{2}(a+b) + \frac{b-a}{2} \sin t + R(t, \varepsilon)$$

avec  $|R(t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et  $\varepsilon$  au voisinage de 0. En particulier,  $y$  est bornée sur ce voisinage.

• Par la formule de Taylor, pour  $|z| \leq \frac{1}{2}$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = 1 + \frac{1}{2}zn + \alpha_z \frac{z^2}{2}$$

avec  $|\alpha_z| \leq 3\sqrt{2}$  en estimant les dérivées secondes, c'est une estimation indépendante de  $z$ . Ainsi, au voisinage de 0,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon y(t, \varepsilon)}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}y(t, \varepsilon) + S(t, \varepsilon)$$

avec  $|S(t, \varepsilon)| \leq C'\varepsilon^2$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon$  au voisinage de 0, donc est un  $O(\varepsilon^2)$  indépendamment de  $t$ . Ainsi,

$$I(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2}y(t, \varepsilon) \right) dt + O(\varepsilon^2)$$

Puis, par le développement asymptotique de  $y(t, \varepsilon)$ ,  
avec son  $O(\varepsilon^2)$  indépendant de  $t$ , il suit que

$$I(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{3(a+b)}{2} + \frac{b-a}{2} \sin t \right] \right) dt + O(\varepsilon^2)$$

D'où

$$I(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \pi + \frac{3\pi}{4}(a+b)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Ce qui nous donne le développement voulu. □

## 18 Mesures de Malher et hauteurs de polynômes

Référence : *Polynomials*, Victor PRASOLOV

### Définition 18.1

Soit  $f = \sum_{k=0}^d a_k X^k = a_d \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \in \mathbb{C}[X]$ . On définit sa *hauteur*  $H$  par :

$$H(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \max_{0 \leq k \leq d} |a_k|$$

On définit sa *mesure de MALHER*  $M$  par

$$M(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} |a_d| \prod_{k=1}^d \max\{1, |\alpha_k|\}$$

$M(f)$  a le bon goût d'être multiplicatif, contrairement à  $H$ . Dans le but de résoudre le *septième problème de HILBERT*, une estimation de  $H(fg)$  par  $H(f)$  et  $H(g)$  est la bienvenue :

### Théorème 18.1 : Septième problème de HILBERT

Soient  $a \neq 0, 1$  un nombre algébrique, et  $b$  un nombre algébrique irrationnel. Alors  $a^b$  est transcendant.

Ce n'est pas l'objet de cette section. On va montrer l'estimation suivante.

### Proposition 18.1 : Estimation de la hauteur par la mesure de MALHER

Soit  $f \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $d$ . Alors

$$\frac{M(f)}{\sqrt{d+1}} \leq H(f) \leq 2^{d-1} M(f)$$

**Démonstration :** • Montrons

$$H(f) \leq 2^{d-1} M(f)$$

Pour cela, on utilise les relations entre les racines et les coefficients de  $f$  :

$$a_i = (-1)^{d-i} a_d \sum_{J \in \mathcal{P}_{d-i}([1, d])} \prod_{j \in J} \alpha_j$$

Puis, on majore le module de  $a_i$  par inégalité triangulaire, puis chaque produit de racines par  $M(f)$  :

$$|a_i| \leq M(f) \# \mathcal{P}_{d-i}([1, d]) = \binom{d}{i} M(f)$$

Puis, par une récurrence utilisant la relation du triangle de Pascal :

$$\binom{d+1}{k} = \binom{d}{k-1} + \binom{d}{k}$$

on montre que

$$\forall k \in [1, d], \binom{d}{k} \leq 2^{k-1}$$

D'où l'inégalité voulue :

$$H(f) \leq 2^{d-1} M(f)$$

□

Pour montrer l'autre inégalité, nous aurons besoin du lemme d'analyse complexe suivant.

**Lemme 18.1**

Soit  $f : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}$  une application holomorphe, où  $\Delta$  désigne le disque centré en 0 de rayon 1. On note  $z_1, \dots, z_n$  les zéros de  $f$  dans  $\bar{\Delta}$ , avec multiplicité. Alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\varphi})| \, d\varphi = \ln |f(0)| - \sum_{k=1}^n \ln |z_k|$$

**Démonstration du lemme :** • Notons déjà que si l'un des zéros de  $f$  est sur le bord de  $\Delta$ ,  $f$  est nulle par le principe du maximum, et on peut décider par convention que cela donne  $0 = 0$  dans l'égalité recherchée. De même, si l'un des  $z_k$  est nul, on prend la convention que  $\ln |0|$  compenserait  $\ln |f(0)|$ .

• Supposons que les  $z_k$  soit dans  $\Delta$ . On définit l'application auxiliaire sur  $\bar{\Delta}$  privé des éléments  $z_k$  par :

$$g(z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^n w_k(z)}$$

où  $w_k$  est l'application homographique donnée par

$$\forall z \in \mathbb{C}, w_k(z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{z - z_k}{1 - z\bar{z}_k}$$

•  $w_k$  envoie  $\bar{\Delta}$  sur  $\bar{\Delta}$  : si  $|z| = 1$ ,  $|w_k(z)|^2 = 1$ , et  $w_k(0) = 0$ ; le principe du maximum conclut. □

Reprenons le cours de la démonstration.

**Démonstration :** • Montrons que

$$M(f) = \exp \left( \int_0^1 \ln |f(e^{2i\pi t})| \, dt \right)$$

Les deux membres de l'égalité étant multiplicatifs par rapport à  $f$ , il suffit de le montrer pour  $f(z) = z - \alpha$ , avec  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Faisons le changement de variables  $\varphi = 2\pi t$  dans l'intégrale :

$$\int_0^1 \ln |f(e^{2i\pi t})| \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\varphi})| \, d\varphi$$

D'après le lemme, on a alors

$$\int_0^1 \ln |f(e^{2i\pi t})| \, dt = \ln |f(0)| - \varepsilon \ln |\alpha|$$

où

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } |\alpha| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit,  $\varepsilon = \mathbf{1}_{]0,1[}(|\alpha|)$ . Puisque  $f(0) = -\alpha$ , il suit que

• On peut prolonger  $g$  sur  $\bar{\Delta}$  car la multiplicité de  $z_k$  en tant que zéro de  $f$  est la même que celle de  $\prod_{k=1}^n w_k(z)$ , donc  $g$  est holomorphe sur  $\bar{\Delta}$ , et est non nulle. D'après le théorème de la moyenne appliqué à l'application harmonique  $\ln |g|$ , il suit

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(e^{i\varphi})| \, d\varphi = \ln |g(0)|$$

Ce qui se réécrit, puisque  $w_k$  envoie le bord de  $\Delta$  sur le bord de  $\Delta$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\varphi})| \, d\varphi = \ln |f(0)| - \sum_{k=1}^n \ln |z_k|$$

$$\int_0^1 \ln |f(e^{2i\pi t})| \, dt = (1 - \varepsilon) \ln |\alpha|$$

De plus, pour  $M(f)$ , on a :

$$M(f) = \max\{1, |\alpha|\}$$

$M(f)$  vaut 1 si  $|\alpha| \leq 1$  et  $|\alpha|$  si  $|\alpha| > 1$ , donc  $M(f)$  s'écrit en fait en fonction de  $\varepsilon$  :

$$M(f) = |\alpha|^{1-\varepsilon}$$

Soit encore

$$M(f) = \exp((1 - \varepsilon) \ln |\alpha|)$$

D'où finalement l'égalité recherchée :

$$M(f) = \exp \left( \int_0^1 \ln |f(e^{2i\pi t})| \, dt \right)$$

• C'est à partir de cette expression intégrale qu'on majore donc  $M(f)$  en fonction de  $H(f)$ . L'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe  $\exp$  donne :

$$M(f) \leq \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^d a_k e^{2ik\pi t} \right| \, dt$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, sur le compact  $[0, 1]$ , on obtient :

$$M(f) \leq \sqrt{\int_0^1 \left| \sum_{k=0}^d a_k e^{2ik\pi t} \right|^2 dt}$$

On développe le module au carré comme un produit d'un complexe par son conjugué :

$$M(f) \leq \sqrt{\int_0^1 \sum_{k=0}^d \sum_{l=0}^d a_k \bar{a}_l e^{2i(k-l)\pi t} dt}$$

Les sommes sont finies, et l'intégrale sur un compact : la linéarité de l'intégrale donne donc

$$M(f) \leq \sqrt{\sum_{k=0}^d a_k \sum_{l=0}^d \bar{a}_l \int_0^1 e^{2i(k-l)\pi t} dt}$$

Cette intégrale est nulle sauf si  $l = k$  où elle vaut 1.

$$M(f) \leq \sqrt{\sum_{k=0}^d |a_k|^2}$$

On majore alors  $|a_k|$  par son max  $H(f)$  pour finalement avoir

$$M(f) \leq \sqrt{d+1} H(f)$$

Ce qui montre la deuxième inégalité. □

## 19 Lemme de Borel

Référence : *Analyse pour l'agrégation*, Claude ZUILY, Hervé QUEFFÉLEC

### Lemme 19.1 : Construction de fonctions plateaux

Soient  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Omega$  voisinage ouvert de  $K$ . Il existe une fonction  $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\theta = 1$  sur  $K$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$  sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\theta = 0$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ .

On le démontre dans la cas  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ .

**Démonstration du lemme : 1.** On considère pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Alors  $\rho_0$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  (on le montre par récurrence). De plus,  $\rho_0$  est positive, et est nulle sur  $\mathbb{R} \setminus ]-1, 1[$ . Si on note  $\rho$  la fonction

$$\rho(x) = \frac{\rho_0(x)}{\int_{\mathbb{R}} \rho_0(x) dx}$$

alors  $\rho$  a les mêmes propriétés que  $\rho_0$ , avec de plus  $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$ . Enfin, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on définit

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Alors  $\rho_\varepsilon$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , est nulle sur  $\mathbb{R} \setminus ]-\varepsilon, \varepsilon[$  et  $\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon = 1$ .

**2.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on définit

$$K_\varepsilon \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, d(x, K) \leq \varepsilon\}$$

et

$$\theta_\varepsilon \stackrel{\text{déf.}}{=} \rho_\varepsilon * \mathbf{1}_{K_\varepsilon}$$

Autrement dit, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\theta_\varepsilon(x) = \int_{K_\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-y) dy$$

• Puisque  $\rho_\varepsilon$  est positive, c'est aussi le cas de  $\theta_\varepsilon$ . Et puisque  $\rho_\varepsilon$  est d'intégrale 1, il suit que  $\theta_\varepsilon \leq 1$ .

• La convolution garde la meilleure régularité : puisque  $\rho_\varepsilon$  est de classe  $C^\infty$ , c'est aussi le cas de  $\theta_\varepsilon$ .

• Faisons le constat suivant : pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$d(x, y) \geq d(x, K) - d(y, K)$$

d'après l'inégalité triangulaire. Montrons que  $\theta_\varepsilon$  est nulle en dehors de  $K_{2\varepsilon}$  et vaut 1 sur  $K$ .

▷ Pour  $x \in \mathbb{R} \setminus K_{2\varepsilon}$ ,  $d(x, K) > 2\varepsilon$ . De plus, pour tout  $y \in K_\varepsilon$ ,  $d(y, K) \leq \varepsilon$ . Ainsi,

$$d(x, y) \geq \varepsilon$$

donc  $\rho_\varepsilon(x-y) = 0$ , donc  $\theta_\varepsilon(x) = 0$ .

▷ Pour  $x \in K$ ,

$$\theta_\varepsilon(x) = 1 - \int_{\mathbb{R} \setminus K_\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-y) dy$$

Puisque  $d(x, K) = 0$  et pour tout  $y \in \mathbb{R} \setminus K_\varepsilon$ ,  $d(y, E) > \varepsilon$ . D'où

$$d(x, y) > \varepsilon$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus K_\varepsilon} \rho(x - y) \, dy = 0$$

D'où  $\theta_\varepsilon(x) = 1$ .

3. Enfin,  $K$  est compact, donc il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que

$$K \subset K_{2\varepsilon_0} \subset \Omega$$

Si bien que  $\mathbb{R} \setminus \Omega \subset \mathbb{R} \setminus K_{2\varepsilon_0}$ . Ainsi,  $\theta_{\varepsilon_0}$  vérifie :  $0 \leq \theta_{\varepsilon_0} \leq 1$ ,  $\theta = 0$  sur  $\mathbb{R} \setminus \Omega$  et  $\theta_{\varepsilon_0} = 1$  sur  $K$ .  $\theta_{\varepsilon_0}$  répond à la question.  $\square$

**Proposition 19.1 : Lemme de BOREL**

Soit  $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite de complexes quelconque. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Alors il existe une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$  telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x_0) = a_k$$

**Démonstration :** Supposons que  $x_0 = 0$ . On considère  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$  une fonction plateau qui vaut 1 sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , et 0 sur  $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ .

• Soit  $(\lambda_n)_n$  une suite réelle. On définit sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(\lambda_n x)$$

On cherche à construire  $f$  de la forme  $\sum f_n$ . Pour avoir une bonne définition de  $f$  et de ses dérivées (dérivées termes par termes de  $f_n$ ), on veut déterminer une suite  $(\lambda_n)_n$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

Pour cela, on fait la petite manipulation suivante. Partant de la définition de  $f_n$  :

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(\lambda_n x)$$

On fait apparaître une fonction de  $\lambda_n x$  :

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^n \frac{a_n}{n!} (x\lambda_n)^n \varphi(\lambda_n x) = \frac{g(\lambda_n x)}{\lambda_n^n}$$

avec  $g \in C^\infty$  à support compact. En particulier, toutes ses bornes supérieures liées à ses dérivées sont finies. On définit finalement

$$M_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{0 \leq k \leq n-1} \left[ \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n^{(k)}(x)| \right]$$

Ainsi, lorsqu'on dérive  $f_n$   $k$  fois, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$|f_n^{(k)}(x)| = \frac{1}{\lambda_n^{n-k}} |g^{(k)}(\lambda_n x)| \leq \frac{M_n}{\lambda_n^{n-k}}$$

Si on veut imposer  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ , il suffit d'imposer  $\frac{M_n}{\lambda_n^{n-k}} \leq \frac{1}{2^n}$ . Par facilité de majoration, il serait bien d'imposer  $\lambda_n \geq 1$ . On considère alors une suite de réels  $(\lambda_n)_n$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n \geq \max(1, 2^n M_n)$$

Ainsi, on a bien

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{M_n}{\lambda_n} \leq \frac{1}{2^n}$$

et bien définir la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

• La série ainsi définie converge normalement donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ , tout comme les séries  $\sum f_n^{(k)}$ .  $f$  est alors de classe  $C^\infty$  avec

$$f^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$$

Enfin, la dérivée de  $f_n^{(k)}$  au voisinage de 0 s'exprime avec celle de  $x^n \varphi(\lambda_n x)$ , au voisinage de 0 :

$$\frac{d^k}{dx^k} [x^n \varphi(\lambda_n x)] \Big|_{x=0} = \frac{d^k}{dx^k} [x^n] \Big|_{x=0} = \delta_{k,n} k!$$

D'où

$$f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} k! \delta_{n,k} = a_k$$

Ce qui conclut la démonstration.  $\square$

## 20 Théorème de Hahn-Banach en dimension finie

Référence : *Petit guide de calcul différentielle*, François ROUVIÈRE

### Théorème 20.1 : Théorème de HAHN-BANACH, version topologique

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé,  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , et  $f \in V'$ . Alors il existe une application  $F \in E'$  telle que  $F|_G = f$  et  $\|F\|_{E'} = \|f\|_{V'}$ .

On propose ici une démonstration en dimension finie de ce théorème. Constatons que dans le cas d'un espace préhilbertien, il suffit de considérer  $V^\perp$ , d'utiliser  $V \oplus V^\perp = E$ , et si  $f$  est définie sur  $G$ , de définir  $F(x) = f(p_V(x))$  où  $p_V$  est la projection orthogonale.  $F$  est bien de même norme que  $f$  par le théorème de PYTHAGORE.

**Démonstration :** C'est une démonstration par récurrence sur la (co-)dimension de  $V$ . Si  $V = E$ , alors le résultat est trivialement vrai (dans le sens où  $F = f$ ). Si  $V$  est strictement inclus dans  $E$ , on complète  $V$  par un sous-espace vectoriel de base  $(u_1, \dots, u_{n-k})$  (si  $k$  est la dimension de  $V$ , et  $n$  celle de  $E$ ) et on a

$$E = V \oplus \mathbb{R}u_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}u_{n-k}$$

L'objectif est alors de prolonger  $f$  sur  $V \oplus \mathbb{R}u$  pour conclure la récurrence.

- Soit  $u \in E \setminus V$ . Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on cherche à prolonger  $f \in V'$  par une forme linéaire du type

$$g_a(x + tu) = f(x) + ta$$

pour  $x \in V$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Ainsi, définie,  $g_a$  est linéaire, et prolonge  $f$ . En conséquence,  $\|f\| \leq \|g\|$ . Reste à déterminer  $a \in \mathbb{R}$  qui rende vraie l'autre inégalité. Si  $f = 0$ ,  $a = 0$  conclut. Quitte à remplacer  $f$  par  $\frac{f}{\|f\|}$ , supposons que  $\|f\| = 1$ .

- On veut montrer que

$$|g_a(x + tu)| \leq \|x + tu\|$$

Pour cela, on a :

$$|g_a(x + tu)| = |f(x) + ta|$$

Afin d'isoler  $a$  pour en obtenir une inégalité, on factorise par  $-t$ , pour  $t \neq 0$  :

$$|g_a(x + tu)| = |t| \cdot \left| f\left(\frac{-x}{t}\right) - a \right| \leq \|x + tu\|$$

Cette inégalité est équivalente à

$$f\left(\frac{-x}{t}\right) - \left\| \frac{-x}{t} - u \right\| \leq a \leq f\left(\frac{-x}{t}\right) + \left\| \frac{-x}{t} - u \right\|$$

- Montrons alors que le choix de  $a$ , indépendant de  $x$ , par cette inégalité est possible. Soient  $x, y \in V$ . Par linéarité de  $f$ ,

$$f(x) - \|x - u\| - f(y) - \|y - u\| = f(x - y) - \|x - u\| - \|y - u\|$$

Puis, par continuité de  $f$ , toujours en ayant supposé que  $\|f\| = 1$ ,

$$f(x) - \|x - u\| - f(y) - \|y - u\| \leq \|x - y\| - \|x - u\| - \|y - u\| \leq 0$$

Négatif par l'inégalité triangulaire. Ainsi, pour tout  $x, y \in V$ ,

$$f(x) - \|x - u\| \leq f(y) + \|y - u\|$$

Le membre de droite ne dépend que de  $x$ , l'autre que de  $y$ . Il suit

$$\sup_{x \in V} \{f(x) - \|x - u\|\} \leq \inf_{y \in V} \{f(y) + \|y - u\|\}$$

Ainsi, il existe bel et bien  $a \in \mathbb{R}$  tel que

$$\sup_{x \in V} \{f(x) - \|x - u\|\} \leq a \leq \inf_{y \in V} \{f(y) + \|y - u\|\}$$

Donc tel que, pour tout  $x \in V$  et  $t \neq 0$ ,

$$f\left(\frac{-x}{t}\right) - \left\| \frac{-x}{t} - u \right\| \leq a \leq f\left(\frac{-x}{t}\right) + \left\| \frac{-x}{t} - u \right\|$$

Il suit donc que

$$|g_a(x + tu)| \leq \|x + tu\|$$

donc  $\|g\| \leq 1 = \|f\|$ . Puisqu'on a déjà montré que  $\|f\| \leq \|g\|$ ,  $g$  prolonge donc bien  $f$  sur  $V \oplus \mathbb{R}u$ , avec  $u \notin V$ , avec  $\|f\|_{V'} = \|g\|_{E'}$ . Cela permet de conclure la récurrence.  $\square$

## 21 Fonction continue nulle part dérivable

Référence : *Analyse pour l'agrégation*, Claude ZUILY, Hervé QUEFFÉLEC

**Théorème 21.1 : Condition de non-dérivabilité d'une série trigonométrique**

Soit  $\Lambda \stackrel{\text{déf.}}{=} (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels distincts. On définit

$$\mu_n \stackrel{\text{déf.}}{=} d(\lambda, \Lambda \setminus \{\lambda_n\})$$

On suppose que  $\Lambda$  est séparée, *id est*  $\mu_n > 0$  et que  $\Lambda$  est lacunaire, *id est*  $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

On se donne  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum |\varepsilon_n|$  converge. Enfin, on définit pour  $t \in \mathbb{R}$  :

$$f(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n e^{i\lambda_n t}$$

S'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f$  soit dérivable en  $t_0$  alors  $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right)$ . En particulier, s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $|\varepsilon_n| \geq \frac{\delta}{\mu_n}$  alors  $f$  est nulle part dérivable.

**Démonstration : 1.** On souhaite disposer de  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  telle que sa transformée de Fourier  $\hat{\varphi}(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-itx} dt$  vérifie  $\hat{\varphi}(0) = 1$  et  $\hat{\varphi}(x) = 0$  pour  $|x| \geq 1$ .

Pour cela, on se donne  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  paire telle que  $\psi(0) = \frac{1}{2\pi}$  et  $\psi = 0$  en dehors de  $[-1, 1]$ . On définit alors

$$\varphi \stackrel{\text{déf.}}{=} \hat{\psi}$$

Par la formule de transformée inverse de Fourier sur l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\hat{\varphi} = 2\pi\psi$ . D'où  $\varphi$ .

**2.** On définit

$$\varphi_n(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mu_n \cdot \varphi(\mu_n t)$$

Montrons que l'on peut exprimer  $\varepsilon_n$  par une formulation intégrale :

$$\varepsilon_n = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda_n t} \varphi_n(t) dt$$

Commençons par observer que  $\|\hat{\varphi}\|_{L^\infty} = \|\varphi_n\|_{L^\infty}$ , donc cette norme est indépendante de  $n$ . Puisque  $\sum_n |\varepsilon_n| < \infty$ , on va intervertir somme et intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k e^{i\lambda_k t} \right] e^{-i\lambda_n t} \varphi_n(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{i(\lambda_k - \lambda_n)t} \varphi_n(t) dt \right]$$

On reconnaît la transformée de Fourier de  $\hat{\varphi}$  :

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k e^{i\lambda_k t} \right] e^{-i\lambda_n t} \varphi_n(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k \hat{\varphi}_n(\lambda_n - \lambda_k)$$

Soit, par définition de  $\varphi_n$ , sachant que  $\mu_n \neq 0$  :

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k e^{i\lambda_k t} \right] e^{-i\lambda_n t} \varphi_n(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k \hat{\varphi} \left( \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\mu_n} \right)$$

Or, pour  $k \neq n$ ,

$$\left| \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\mu_n} \right| \leq \frac{\mu_n}{\mu_n} \geq 1$$

Par construction de  $\hat{\varphi}$ , il suit que cette somme est nulle sauf pour  $k = n$  :

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k e^{i\lambda_k t} \right] e^{-i\lambda_n t} \varphi_n(t) dt = \varepsilon_n \hat{\varphi}(0) = \varepsilon_n$$

Il suit, en faisant le changement de variables  $t = \frac{s}{\mu_n}$  que

$$|\varepsilon_n| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| f \left( \frac{t}{\mu_n} \right) \right| |\varphi(t)| dt$$

**3. •** Montrons la propriété à proprement parler. Supposons que  $f$  soit dérivable en 0, avec  $f(0) = f'(0) = 0$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = 0$$

Ainsi, par définition de la limite avec  $\varepsilon = 1$ , il existe  $\delta > 0$  tel que si  $t \in ]0, \delta[$ ,

$$|f(t)| \leq |t|$$

Puis, pour  $|t| > \delta$ , l'inégalité triangulaire donne

$$|f(t)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\varepsilon_n| \leq \frac{|t|}{\delta} \sum_{n=1}^{+\infty} |\varepsilon_n|$$

Par conséquent, avec  $C \stackrel{\text{déf.}}{=} \max\left(1, \frac{1}{\delta} \sum_{n=1}^{+\infty} |\varepsilon_n|\right)$ , il suit qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq C|t|$$

- De plus,

$$|\mu_n \varepsilon_n| \leq \int_{\mathbb{R}} \mu_n \left| f\left(\frac{t}{\mu_n}\right) \right| |\varphi(t)| dt$$

On cherche à appliquer le théorème de convergence dominée. On note  $g_n(t)$  la fonction à l'intérieur de l'intégrale. Un développement limité en 0 donne

$$\mu_n \left| f\left(\frac{t}{\mu_n}\right) \right| = \frac{t^2}{\mu_n} R_n(t)$$

avec  $R_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ , donc  $g_n$  converge simplement vers 0 sur  $\mathbb{R}$ . De plus,

$$|g_n(t)| \leq C|t| |\varphi(t)|$$

avec le membre de droite intégrable indépendant de  $n$ . Par le théorème de convergence dominée, il suit que

$$\mu_n \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ce qui conclut dans ce cas. □

Ainsi, pour  $a > 1$ , il suit que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  :

$$F(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{a^n t}}{a^n}$$

Dans ce cas,  $\varepsilon_n = \frac{1}{a^n}$ , et  $\varepsilon_n \sim \mu_n$ , donc  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et dérivable nulle part. De même pour

$$G(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(a^n t)}{a^n}$$

## 22 Expression de la fonction de Riemann en fonction des premiers

Référence : *Analyse pour l'agrégation*, Claude ZUILY, Hervé QUEFFÉLEC

### Théorème 22.1 : Fonction $\zeta$ et nombres premiers

On note  $\mathbb{P} = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  l'ensemble des nombres premiers. Alors pour tout  $s \in \{\Re > 1\}$ ,

$$\zeta(s) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{\gamma=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_\gamma^s}}$$

4. Dans le cas général, supposons que  $f$  soit dérivable en  $t_0$ . On cherche à se ramener à  $g$  telle que  $g(0) = g'(0) = 0$  de la forme

$$g(t) = f(t + t_0) - ae^{\lambda_1 t} - be^{\lambda_2 t}$$

Ainsi, les conditions  $g(0) = g'(0) = 0$  donne le système linéaire

$$\begin{cases} a + b = f(t_0) \\ \lambda_1 a + \lambda_2 b = \frac{f'(0)}{i} \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est  $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ , donc admet une solution. Donc on peut bien définir  $g$ . Si

$$g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon'_n e^{\lambda_n t}$$

Alors d'après 3.,

$$\varepsilon'_n \mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Puis, pour  $n \geq 3$ ,  $|\varepsilon_n| = |\varepsilon'_n|$ , et donc

$$\varepsilon_n \mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui conclut le théorème. La non-dérivabilité sous la condition  $\varepsilon_n \geq \frac{\delta}{\mu_n}$  provient de la contraposée de ce théorème.

On utilise pour cela le lemme suivant assez proche du théorème de sommation par paquets.

**Lemme 22.1 : Sommation sur des ensembles croissants**

On considère  $u_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum_n u_n$  converge absolument. Soit  $(A_j)_{j \geq 1}$  une famille d'ensembles de  $\mathbb{N}$  croissante pour l'inclusion :  $A_j \subset A_{j+1}$ , et telle que  $\mathbb{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_j$ . Alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{n \in A_j} u_n \right]$$

**Démonstration du lemme :** Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\sum |u_n|$  converge, il existe un rang  $N_0$  tel que

$$\sum_{n \geq N_0} |u_n| \leq \varepsilon$$

Par croissance des  $A_j$ , il existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\llbracket 1, N_0 \rrbracket \subset A_{j_0}$ . Ainsi,

$$\mathbb{N}^* \setminus A_{j_0} \subset \llbracket N_0 + 1, +\infty \llbracket$$

Il suit, pour tout  $j \geq j_0$  :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum_{n \in A_j} u_n \right| = \left| \sum_{n \in \mathbb{N}^* \setminus A_j} u_n \right|$$

Puis, par inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum_{n \in A_j} u_n \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^* \setminus A_j} |u_n|$$

Démontrons alors ce résultat.

**Démonstration :** • Pour  $j \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on note

$$A_{j,k} \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n = \prod_{\gamma=1}^j p_{\gamma}^{k_{\gamma}} \text{ où } \sum_{\gamma=1}^j k_{\gamma} = k \right\}$$

L'unicité de la décomposition en facteurs premiers permet d'affirmer que si  $k \neq k'$ , alors  $A_{j,k} \cap A_{j,k'} = \emptyset$ . On définit  $A_j$  l'ensemble des entiers qui se décomposent par le produit des  $j$  premiers nombres premiers (avec éventuellement une valuation nulle) :

$$A_j \stackrel{\text{déf.}}{=} \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} A_{j,k}$$

Alors,  $A_j \subset A_{j+1}$  pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ , et, par le théorème fondamental de l'arithmétique :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j$$

• Soit  $s \in \{\Re > 1\}$ . D'après le lemme,

Par croissance des  $A_j$  :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum_{n \in A_j} u_n \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^* \setminus A_{j_0}} |u_n|$$

Par inclusion,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum_{n \in A_j} u_n \right| \leq \sum_{n \geq N_0+1} |u_n|$$

D'où finalement,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum_{n \in A_j} u_n \right| \leq \varepsilon$$

D'où ce lemme. □

Puisque  $A_j$  est partitionnée par les  $A_{j,k}$ , il suit par théorème de sommation par paquets que

$$\zeta(s) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n \in A_j} \frac{1}{n^s} \right)$$

Or, par unicité de la décomposition en facteurs premiers,

$$A_{j,k} \simeq \left\{ (k_1, \dots, k_j) \in \mathbb{N}^j \mid \sum_{\gamma=1}^j k_{\gamma} = k \right\}$$

en faisant correspondre  $n$  avec  $\prod_{\gamma=1}^j p_{\gamma}^{k_{\gamma}}$ . Par conséquent,

$$\zeta(s) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{k_1 + \dots + k_j = k} \frac{1}{\prod_{\gamma=1}^j p_{\gamma}^{k_{\gamma} s}} \right) \right)$$

$$\zeta(s) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \prod_{\gamma=1}^j \left( \sum_{k_{\gamma}=0}^{+\infty} \left[ \frac{1}{p_{\gamma}^s} \right]^{k_{\gamma}} \right)$$

On reconnaît une somme de série géométrique. D'où finalement l'expression souhaitée.

$$\zeta(s) = \prod_{\gamma=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_{\gamma}^s}}$$

Il s'agit ici d'un développement de  $j$  facteurs (qui sont ici des sommes de séries) (on peut le montrer par récurrence sur  $j$ ) :

□

## 23 Prolongement analytique de la fonction Gamma sur le plan complexe

Référence : *Analyse pour l'agrégation*, Claude ZUILY, Hervé QUEFFÉLEC

### Théorème 23.1 : Prolongement de $\frac{1}{\Gamma}$ sur $\mathbb{C}$

Pour  $z \in \{\Re > 0\}$ , on définit

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

On définit aussi l'application  $F$  sur  $\mathbb{C}$  par :

$$F(z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^z n!} \prod_{k=0}^n (z + k)$$

Alors  $F$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , et vérifie

$$\forall z \in \{\Re > 1\}, F(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$$

## 24 Prolongement analytique de la fonction de Riemann sur le plan complexe privé de 1

Référence : *Analyse pour l'agrégation*, Claude ZUILY, Hervé QUEFFÉLEC

**Théorème 24.1 : Prolongement analytique de  $\zeta$  sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$**

On considère sur  $\{\Re > 1\}$  la fonction  $\zeta$  de RIEMANN :

$$\zeta(s) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Alors  $\zeta$  admet un prolongement analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Un peu plus précisément, il existe une application  $\eta \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  telle que

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \eta(s)$$

**Proposition 24.1 : Fonction  $\Theta$  de JACOBI**

On définit pour tout  $t > 0$  :

$$\Theta(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$$

Alors  $\Theta$  vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall t > 0, \Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

**Démonstration :** C'est une application de la formule sommatoire de POISSON, cf Tome I du vrac. Dans ce contexte précis, cela s'écrit :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2 t} e^{-2i\pi n x} dx$$

(on fait attention à la convention choisie pour montrer la formule de Poisson!). Une mise sous forme canonique donne

$$\Theta(t) = \frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left[y + i \frac{n\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}\right]^2 dy\right)$$

Un théorème des résidus sur le rectangle de hauteur  $\frac{n\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}$  et de longueur  $R \rightarrow +\infty$  donne alors

$$\Theta(t) = \frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy$$

C'est l'intégrale de Gauss, et donc on aboutit bien au résultat :

$$\forall t > 0, \Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

□

Cette fonction  $\Theta$  est majeure dans notre prolongement de  $\zeta$ , toute comme la fonction  $\Gamma$  et son prolongement.

**Démonstration :** On définit à partir de la fonction  $\Theta$  de Jacobi la fonction  $\tilde{\theta}$  définie elle aussi sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\tilde{\theta}(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

D'après la proposition précédente, il suit que  $\tilde{\theta}$  vérifie l'équation fonctionnelle

$$\tilde{\theta}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \left( 2\tilde{\theta}\left(\frac{1}{t}\right) \right) - \frac{1}{2}$$

1. Le point de départ est la fonction  $\Gamma$ . Soit  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re s > 1$ . Par définition de la fonction  $\Gamma$ , qui est elle définie par sa formulation intégrale sur  $\{\Re > 0\}$  :

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

On fait le changement de variables  $x = \pi n^2 y$  dans cette intégrale :

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} dy$$

Ainsi, pour  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} dy$$

Puisque le membre de gauche est le terme général d'une série convergent, c'est le cas du terme de droite, donc on obtient, pour tout  $s \in \{\Re > 1\}$  :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} dy$$

2. On souhaite intervertir série et intégrale. Dans cette sous-partie, on note  $\sigma$  la partie réelle de  $s$ . On note

$$f_N(y) = \sum_{n=1}^N e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1}$$

$f_N$  converge simplement vers la somme de la série, qui existe et est finie. De plus,

$$|f_N(y)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{\sigma}{2}-1} \stackrel{\text{déf.}}{=} g(y)$$

Montrons que  $g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}} |g| = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} y^{\frac{\sigma}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} dy$$

On reconnaît alors la fonction  $\Gamma$  par les mêmes calculs qu'au 1. :

$$\int_{\mathbb{R}} |g| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\pi^{\frac{\sigma}{2}}} < \infty$$

donc  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . D'après le théorème de convergence dominée, il suit donc que

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} \right] y^{\frac{s}{2}-1} dy$$

On reconnaît la fonction  $\tilde{\theta}$  :

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \tilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy$$

3. L'objectif est donc de montrer que la fonction de  $s$  à droite est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . On essaie d'exprimer l'intégrale fonction de  $s$ ,

$$I(s) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \tilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy$$

comme somme et produit de fonctions dont on peut déduire plus aisément qu'il s'agit d'applications holomorphes sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  (en évacuant la singularité en 0). On calcule l'intégrale en la découpant en deux, l'une sur  $[0, 1]$ , on la note

$I_1$ , et l'autre sur  $[1, +\infty]$ . D'après l'équation fonctionnelle vérifiée par  $\tilde{\theta}$ ,

$$I_1(s) = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2\sqrt{y}} \left( 2\tilde{\theta}\left(\frac{1}{y}\right) + 1 \right) - \frac{1}{2} \right] y^{\frac{s}{2}-1} dy$$

On développe, et on se trouve avec deux intégrales explicitement calculables, et une intégrale avec  $\tilde{\theta}$  :

$$I_1(s) = \int_0^1 \tilde{\theta}\left(\frac{1}{y}\right) y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} dy + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

On fait le changement de variables  $t = \frac{1}{y}$  :

$$I_1(s) = \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(t) t^{-\frac{s-1}{2}} dy + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

On a alors l'expression de  $I(s)$  suivante :

$$I(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(t) \left[ t^{\frac{s}{2}-1} + t^{-\frac{s-1}{2}} \right] dt$$

4. Pour  $\zeta$ , cela signifie donc que

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) s(s-1)} + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(t) \left[ t^{\frac{s}{2}-1} + t^{-\frac{s-1}{2}} \right] dt$$

Puis, en utilisant la relation  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  :

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) (s-1)} + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(t) \left[ t^{\frac{s}{2}-1} + t^{-\frac{s-1}{2}} \right] dt$$

C'est ce deuxième membre qui va nous être utile pour montrer que  $\zeta$  peut se prolonger par holomorphie sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

5. L'application  $\frac{1}{\Gamma}$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , on note  $\frac{1}{\Gamma}$  ce prolongement. Ainsi,

$$s \mapsto \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) (s-1)}$$

est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . De plus, par holomorphie sur  $\mathbb{C}$ , un développement en série entière en 1 donne

$$\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + (s-1)\psi(s)$$

avec  $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ . Ainsi,

$$\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) (s-1)} = \frac{1}{s-1} + \psi(s)$$

6. Montrons que le terme intégrale définit une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . On utilise le théorème d'holomorphie

sous l'intégrale sur tout compact  $K$  de  $\mathbb{C}$ . Par la manipulation effectuée pour se ramener à  $t \in [1, +\infty[$ , l'application

$$s \mapsto \tilde{\theta}(t) \left[ t^{\frac{s}{2}-1} + t^{\frac{-s-1}{2}} \right] \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$$

Puis, sur le compact  $K$ ,  $\Re s \in [a, b]$ , donc

$$\left| t^{\frac{s}{2}-1} + t^{\frac{-s-1}{2}} \right| \leq t^{\frac{b}{2}-1} + t^{\frac{-a-1}{2}}$$

Pour s'assurer de l'intégrabilité de la majoration, on estime  $\tilde{\theta}(t)$  :

$$|\tilde{\theta}(t)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n t} = \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}}$$

donc

$$|\tilde{\theta}(t)| \leq \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi}}$$

Ainsi,

$$\left| \tilde{\theta}(t) \left[ t^{\frac{s}{2}-1} + t^{\frac{-s-1}{2}} \right] \right| \leq \left( t^{\frac{b}{2}-1} + t^{\frac{-a-1}{2}} \right) \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi}}$$

Il s'agit d'une majoration intégrable sur  $[1, +\infty[$ , indépendante de  $s$ . Le théorème d'holomorphicité permet alors de conclure que

$$s \mapsto \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(t) \left[ t^{\frac{s}{2}-1} + t^{\frac{-s-1}{2}} \right] dt$$

est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

7. Morale de l'histoire, la formulation

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \psi(s) + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(t) \left[ t^{\frac{s}{2}-1} + t^{\frac{-s-1}{2}} \right] dt$$

permet de prolonger  $\zeta$  en une application holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . □

## 25 Théorème de Vitali

Référence : *Probabilités*, Philippe BARBÉ, Michel LEDOUX

### Définition 25.1

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de variables aléatoires réelles et intégrables sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .  $(X_i)_{i \in I}$  est dite *équi-intégrable* ou *uniformément intégrable* si

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{i \in I} \int_{\{|X_i| < c\}} |X_i| d\mathbb{P} = 0$$

C'est le cas de famille finie, ou des suites dominée par une variable aléatoire intégrable. Montrons une caractérisation utile pour montrer le théorème de VITALI des variables aléatoires uniformément intégrables.

### Proposition 25.1 : Caractérisation de l'uniforme intégrabilité

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille de variables aléatoires réelles intégrables sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(X_i)_{i \in I}$  est uniformément intégrable sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ;
- (ii)  $(X_i)_{i \in I}$  vérifie les deux assertions suivantes :
  - (a) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $A \in \mathcal{F}$  tel que  $\mathbb{P}(A) \leq \eta$ ,

$$\forall i \in I, \int_A |X_i| d\mathbb{P} \leq \varepsilon$$

- (b) Les espérances des  $X_i$  sont uniformément bornées :

$$\sup_{i \in I} \left\{ \int_{\Omega} |X_i| \, d\mathbb{P} \right\} < +\infty \left( \iff \sup_{i \in I} \{ \mathbb{E}[|X_i|] \} < +\infty \right)$$

**Démonstration :** [(i)  $\implies$  (ii)] Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse d'uniforme intégrabilité, il existe  $c_0 > 0$  tel que

$$\forall i \in I, \int_{\{|X_i| > c_0\}} |X_i| \, d\mathbb{P} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit  $A \in \mathcal{F}$ . Alors pour tout  $i \in I$ ,

$$\int_A |X_i| \, d\mathbb{P} = \int_{A \cap \{|X_i| \leq c_0\}} |X_i| \, d\mathbb{P} + \int_{A \cap \{|X_i| > c_0\}} |X_i| \, d\mathbb{P}$$

Ainsi,

$$\int_A |X_i| \, d\mathbb{P} \leq \int_{A \cap \{|X_i| \leq c_0\}} c_0 \, d\mathbb{P} + \int_{\{|X_i| > c_0\}} |X_i| \, d\mathbb{P}$$

D'où

$$\int_A |X_i| \, d\mathbb{P} \leq c_0 \mathbb{P}(A) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

pour  $\mathbb{P}(A) \leq \eta \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\varepsilon}{c_0}$ , d'où (a). Puis, en appliquant cette inégalité pour  $A = \Omega$ ,

$$\int_{\Omega} |X_i| \, d\mathbb{P} \leq c_0 + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\sup_{i \in I} \left\{ \int_{\Omega} |X_i| \, d\mathbb{P} \right\} \leq c_0 + \frac{\varepsilon}{2} < +\infty$$

d'où (b).

[(ii)  $\implies$  (i)] On note

$$M \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{i \in I} \left\{ \int_{\Omega} |X_i| \, d\mathbb{P} \right\} < +\infty$$

bien défini d'après (b). Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$  associé au point (a). On note  $c_0 \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{M}{\eta}$ . Alors tout  $c \geq c_0$ , l'inégalité de Markov donne pour tout  $i \in I$  :

$$\mathbb{P}(\{|X_i| > c\}) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{c} \leq \frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{c_0}$$

Par définition de  $c_0$ , il suit

$$\forall i \in I, \mathbb{P}(\{|X_i| > c\}) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{c} \leq \eta$$

Ainsi, d'après (a), pour tout  $c \geq c_0$ ,

$$\forall i \in I, \int_{\{|X_i| > c\}} |X_i| \, d\mathbb{P} \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour tout  $c \geq c_0$ ,

$$\sup_{i \in I} \left\{ \int_{\{|X_i| > c\}} |X_i| \, d\mathbb{P} \right\} \leq \varepsilon$$

donc  $(X_i)_{i \in I}$  est uniformément intégrable.  $\square$

On peut alors démontrer le théorème de VITALI qui raffine le théorème de convergence dominée, en donnant une condition nécessaire et suffisante.

### Théorème 25.1 : Théorème de VITALI

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles intégrables sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Enfin, soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur ce même espace. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(X_n)_n$  converge en probabilité vers  $X$  et la famille  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément intégrable ;
- (ii)  $X \in L^1$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|X_n - X\|_{L^1} = 0$$

On rappelle que  $(X_n)_n$  converge en probabilité vers  $X$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Et que cette convergence est caractérisée par : (en utilisant le lemme de BOREL-CANTELLI I) pour toute suite entière strictement croissante  $u_n$ , il existe une extraction  $u_{\phi(n)}$  telle que

$$X_{u_{\phi(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{ps}} X$$

**Démonstration : [(i)  $\implies$  (ii)]** On suppose que  $(X_n)_n$  converge en probabilités vers  $X$ , et que  $(X_n)_n$  est uniformément intégrable. Alors il existe  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une extraction telle que

$$X_{\phi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{ps}} X$$

D'après le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}[|X|] \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|X_{\phi(n)}|]$$

Puisque  $(X_n)_n$  est uniformément intégrable, il suit que

$$\mathbb{E}[|X|] \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$$

donc  $X \in L^1(\Omega)$ . Par conséquent, la famille  $((X_n)_{n \in \mathbb{N}}, X) \stackrel{\text{déf.}}{=} (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément intégrable : en effet, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{|X| > c} |X| \, d\mathbb{P} \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . On se donne  $\eta > 0$  (donné par **(a)** de la proposition précédente appliqué la famille  $(Y_n)_n$ ) tel que pour  $A \in \mathcal{F}$ , si  $\mathbb{P}(A) \leq \eta$  alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_A |Y_n| \, d\mathbb{P} \leq \varepsilon$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n - X|] &= \int_{\{|X_n - X| < \varepsilon\}} |X_n - X| \, d\mathbb{P} \\ &+ \int_{\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}} |X_n - X| \, d\mathbb{P} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] \leq \varepsilon + 2 \sup_{p \in \mathbb{N}} \left\{ \int_{\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}} |X_p| \, d\mathbb{P} \right\}$$

Or, par convergence en loi de  $(X_n)_n$  vers  $X$ , il existe un rang  $N_0$  tel que

$$\forall n \geq N_0, \mathbb{P}(\{|X_n - X| < \varepsilon\}) \leq \eta$$

Par conséquent, par définition de  $\eta$  :

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] \leq 3\varepsilon$$

Donc  $(X_n)_n$  converge au sens  $L^1$  vers  $X$ .

**[(ii)  $\implies$  (i)]** Supposons que  $X \in L^1$  et que

$$\|X_n - X\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Alors  $(X_n)_n$  converge en probabilité vers  $X$ , par l'inégalité de Markov. Montrons l'uniforme intégrabilité par la

caractérisation **(a)** et **(b)**. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,

$$\int_{\Omega} |X_n - X| \, d\mathbb{P} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire, pour tout  $n \geq N_0$ ,

$$\int_{\Omega} |X_n| \, d\mathbb{P} \leq \int_{\Omega} |X_n - X| \, d\mathbb{P} + \int_{\Omega} |X| \, d\mathbb{P}$$

Donc

$$\int_{\Omega} |X_n| \, d\mathbb{P} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mathbb{E}[|X|] < +\infty$$

donc, puisque le membre de gauche est indépendant de  $n$  :

$$\sup_{n \geq N_0} \left\{ \int_{\Omega} |X_n| \, d\mathbb{P} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mathbb{E}[|X|] < +\infty$$

d'où

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \int_{\Omega} |X_n| \, d\mathbb{P} \right\} < +\infty$$

ce qui montre le point **(b)**. Pour le point **(a)**, utilisons le fait que la famille finie  $((X_n)_{n \leq N_0}, X)$  est uniformément intégrable. Ainsi, par le point **(a)** de la caractérisation pour cette famille, il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $A \in \mathcal{F}$ , si  $\mathbb{P}(A) \leq \eta$  alors

$$\forall n \leq N_0, \int_A |X_n| \, d\mathbb{P} \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

et

$$\int_A |X| \, d\mathbb{P} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour  $n \geq N_0$ , d'après l'inégalité triangulaire,

$$\int_A |X_n| \, d\mathbb{P} \leq \int_A |X_n - X| \, d\mathbb{P} + \int_A |X| \, d\mathbb{P}$$

Le premier terme se majore par  $\mathbb{E}[|X_n - X|]$ , et l'autre en utilisant la remarque précédente. D'où pour  $n \geq N_0$ ,

$$\int_A |X_n| \, d\mathbb{P} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Bilan, pour  $\mathbb{P}(A) \leq \eta$ , on a :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \int_A |X_n| \, d\mathbb{P} \right\} \leq \varepsilon$$

La famille  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc bien uniformément intégrable.  $\square$

## 26 Théorème de Weierstrass par la convolution

Référence : *Les maths en tête : analyse*, Xavier GOURDON.

### Théorème 26.1 : Théorème de WEIERSTRASS

Soit  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction polynômiale  $P^\varepsilon \in \mathbb{R}[X]$  telle que

$$\|f - P^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$$

**Démonstration :** Il s'agit d'utiliser la propriété de densité suivante : si  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité, alors

$$\|f - \rho_n * f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

avec un choix particulier de  $\rho_n$ . Démontrons déjà ce fait.

1. Par définition,  $(\rho_n)_n$  est une suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs positives, de classe  $C^\infty$ , à support dans  $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$  et vérifiant  $\int_{\mathbb{R}} \rho_n = 1$ . Une application du théorème de convergence dominée permet d'affirmer que

$$\forall \eta > 0, \int_{\mathbb{R} \setminus [-\eta, \eta]} \rho_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On prolonge  $f$  par  $\tilde{f}$  sur  $\mathbb{R}$ , afin de pouvoir l'intégrer sur  $\mathbb{R}$ , et de pouvoir convoler  $f$  avec  $\rho_n$ , de la sorte :

$$\tilde{f}(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{cases} \chi(x)f(-1) & \text{si } x < -1 \\ f(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ \chi(x)f(1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

où  $\chi$  est une fonction plateau qui vaut 1 sur  $[-1, 1]$  et 0 en dehors de  $[-2, 2]$ . On note  $\tilde{f}$  ce prolongement. Par définition de la convolution, et par propriété de  $\rho_n$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f * \rho_n(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)(f(x-t) - f(x)) dt \right|$$

Donc, par inégalité triangulaire

$$|f * \rho_n(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt$$

Or,  $f$  est uniformément continue, car continue sur le compact  $[-1, 1]$  par hypothèse, et on l'a prolongé de façon continue par  $\chi \cdot f(-1)$  sur  $[-2, -1]$  et  $\chi \cdot f(1)$  de façon continue sur  $[1, 2]$ . Enfin, on l'a encore prolongé continuellement par 0 ailleurs.  $f$  est donc uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe alors  $\eta > 0$  tel que

$$\forall |x - y| \leq \eta, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Découpons l'intégrale en deux.

$$|f * \rho_n(x) - f(x)| \leq \int_{x-\eta}^{x+\eta} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt + \int_{\mathbb{R} \setminus [x-\eta, x+\eta]} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt$$

La première intégrale se majore alors en utilisant l'uniforme continuité de  $f$  :

$$\int_{x-\eta}^{x+\eta} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \rho_n = \varepsilon$$

La deuxième se fait en constatant que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  (par construction, et une fonction continue sur un compact est bornée), et par la remarque sur la convergence dominée en début de démonstration, avec un petit changement de variables :

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [x-\eta, x+\eta]} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt \leq 2\|f\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\eta, \eta]} \rho_n(t) dt$$

Donc, à partir d'un certain  $n_0$ ,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [x-\eta, x+\eta]} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt \leq 2\|f\|_{L^\infty} \varepsilon$$

Bilan, pour tout  $n \geq n_0$  :

$$|f * \rho_n(x) - f(x)| \leq (2\|f\|_{L^\infty} + 1)\varepsilon$$

C'est une majoration indépendante de  $x$ , donc

$$\|f * \rho_n - f\|_{L^\infty} \leq (2\|f\|_{L^\infty} + 1)\varepsilon$$

2. Il ne nous reste plus qu'à déterminer  $\rho_n$  tel que  $f * \rho_n$  ait une expression polynomiale sur  $[-1, 1]$ . On a ici utilisé le caractère continue de  $\rho_n$ , son caractère unitaire, pour la norme  $L^1$  et le fait que  $\int_{\mathbb{R} \setminus [-\eta, \eta]} \rho_n$  tende vers 0 lorsque  $[n \rightarrow \infty]$ . On va montrer ces trois faits pour l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\rho_n(t) = \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{a_n} & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

où  $a_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$ . Alors  $\rho_n$  est continue, positive, est d'intégrale 1. Soit  $\eta > 0$ . Si  $\eta > 1$ ,  $\int_{\mathbb{R} \setminus [-\eta, \eta]} \rho_n = 0$ . Supposons  $0 < \eta < 1$ . Par parité,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\eta, \eta]} \rho_n(t) dt = 2 \int_{\eta}^1 \rho_n(t) dt$$

Donc,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\eta, \eta]} \rho_n(t) dt \leq \frac{2(1-\eta^2)^n}{a_n}$$

Or,

$$a_n \geq 2 \int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\eta, \eta]} \rho_n(t) dt \leq 2(n+1)(1-\eta^2)^n$$

donc

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\eta, \eta]} \rho_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par le travail fait précédemment, il suit que

$$\|\rho_n * f - f\|_{L^\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Soit  $g$  continue définie par :

$$g(x) = f(4x)$$

Alors  $g$  est nulle en dehors de  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Montrons que  $\rho_n * g$  est polynômiale. Par définition,

$$\rho_n * f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y) \rho_n(x-y) dy$$

Puisque  $|x-y| \leq 1$ , on peut utiliser la formulation polynômiale de  $\rho_n$  :

$$\rho_n * g(x) = \frac{1}{a_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(y) (1-(x-y)^2)^n dy$$

Si on développe l'expression polynômiale en  $y$  et en  $x$ , on a :

$$(1-(x-y)^2)^n = \sum_{k=1}^{2n} q_k(t) y^k$$

avec  $q_k$  une application polynômiale. Enfin, par linéarité de l'intégrale,

$$\rho_n * g(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{a_n} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(y) y^k dy \right] q_k(x)$$

donc  $\rho_n * g$  est polynômiale.  $g$  étant continue, on a alors l'approximation avec  $\rho_n * g$ . On a alors montré le théorème de Weierstrass pour  $g$ . Pour le montrer pour  $f$ , sur  $[-1, 1]$ , et pour toute application continue définie sur un segment de  $\mathbb{R}$ , un petit changement de variables conclut.  $\square$

## 27 Densité d'une trajectoire de pas irrationnel sur le cercle

Référence : Analyse, Xavier GOURDON

### Proposition 27.1

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  irrationnel. Alors l'ensemble

$$\Gamma \stackrel{\text{déf.}}{=} \{n\alpha - [n\alpha], n \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans  $[0, 1]$ .

On supposera connu le théorème de WEIERSTRASS trigonométrique, démontré par le théorème de FÉJÉR : toute fonction continue  $2\pi$ -périodique peut être approchée par un polynôme trigonométrique pour la norme uniforme.

**Démonstration :** 1. On note pour toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  continue et  $2\pi$ -périodique :

$$S_n(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(2\pi\alpha k)$$

Montrons que

$$S_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

• Pour cela, considérons d'abord le cas de polynômes trigonométriques. On note  $f_p(t) = e^{ipt}$ . Alors

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi p\alpha k}$$

Il s'agit là d'une somme géométrique de raison différente de 1 puisque  $\alpha$  est irrationnel.

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \frac{1 - e^{2i\pi p\alpha(n+1)}}{1 - e^{2i\pi p\alpha}}$$

On réorganise en factorisant par l'angle moitié, pour avoir :

$$S_n(f) = \frac{e^{i\pi p\alpha}}{\sin(p\pi\alpha)} \cdot \frac{\sin(\pi p\alpha(n+1))}{n}$$

Ainsi,

$$|S_n(f)| \leq \frac{1}{n \sin(p\pi\alpha)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f$$

La linéarité de  $S$  permet de conclure le résultat pour toute application polynomiale d'un point de vue trigonométrique.

• Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$   $2\pi$ -périodique. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par le théorème de Weierstrass trigonométrique, il existe un polynôme trigonométrique  $p$  tel que

$$\|f - p\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$$

Ainsi, par un découpage, et pour  $n$  assez grand,

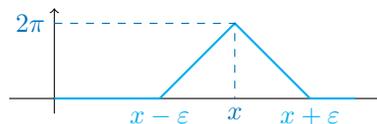
$$\left| S_n(f) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right| \leq 3\varepsilon$$

d'où le résultat.

2. Montrons la propriété. Supposons que  $\Gamma$  ne soit pas dense dans  $[0, 1]$ . Alors il existe une boule dans  $[0, 1]$  qui ne rencontre pas  $\Gamma$ . Autrement dit, il existe  $x \in [0, 1]$  et  $\varepsilon > 0$  tel que

$$[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap \Gamma = \emptyset$$

On construit  $f$  une application continue positive  $2\pi$ -périodique en triangle de sorte que  $f$  soit strictement positive sur  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ , et nulle ailleurs sur  $[0, 2\pi]$ .



Alors, puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n\alpha - [n\alpha] \notin [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(2\pi n\alpha) = 0$$

donc  $S_n(f) = 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc tend vers 0.

Or,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f = \varepsilon > 0$$

Et il s'agit de la limite de  $S_n(f)$  par 1. D'où la contradiction.  $\square$

## 28 Rayon spectral et normes

Référence : *Petit guide de calcul différentiel*, François ROUVIÈRE

Un petit pèle-mêle de résultat, dont le dernier qui est utile pour montrer par exemple le théorème de CAYLEY-HAMILTON sur  $\mathbb{C}$  par un argument analytique.

### Proposition 28.1 : Rayon spectral, norme et convergence

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une norme  $\|\cdot\|_E$  sur  $E$  telle que si  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}$  est sa norme subordonnée,  $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$  ;
- (ii)  $\rho(u) < 1$  ;
- (iii) La suite  $(u^n)_n$  converge vers l'endomorphisme nul.

Remarque : L'équivalence des normes en dimension finie nous dispense de préciser pour quelle norme les convergences ont lieu.

**Démonstration :** [(i)  $\implies$  (ii)] Soient  $\lambda \in \sigma(u)$  et  $x \in E$  vecteur propre associé. Alors

$$u(x) = \lambda x$$

Donc,

$$\|u(x)\|_E = |\lambda| \|x\|_E \leq \|u\|_{\mathcal{L}(E)} \|x\|_E$$

Puisque  $x \neq 0$ , il suit que

$$\forall \lambda \in \sigma(u), |\lambda| \leq \|u\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$$

d'où  $\rho(u) < 1$ .

[(ii)  $\implies$  (iii)] Le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux nous fournit la décomposition suivante :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(u)} \ker \left( (u - \lambda \text{id}_E)^{m(\lambda)} \right) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(u)} \Gamma_\lambda(u)$$

Soit  $x_\lambda \in \Gamma_\lambda(u)$ . Pour  $n > m(\lambda)$  :

$$u^n(x_\lambda) = (u - \lambda \text{id}_E + \lambda \text{id}_E)^n(x_\lambda)$$

On développe grâce au binôme de Newton, et on utilise le fait que  $(u - \lambda \text{id}_E)(x_\lambda)^k = 0$  pour  $k \geq m(\lambda)$  :

$$u^n(x_\lambda) = \sum_{p=0}^{m(\lambda)-1} \binom{n}{p} (u - \lambda \text{id}_E)^p(x_\lambda) \lambda^{n-p}$$

Par la décomposition de  $E$ , il suit que lorsque  $x = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} x_\lambda$ , et  $n > d$  :

$$u^n(x) = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \left[ \sum_{k=0}^{m(\lambda)} \lambda^{n-k} \binom{n}{k} (u - \lambda \text{id}_E)^k(x_\lambda) \right]$$

Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$ . Par l'inégalité triangulaire,

$$\|u^n(x)\| \leq \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \left[ \sum_{k=0}^{m(\lambda)} |\lambda|^{n-k} \binom{n}{k} \|(u - \lambda \text{id}_E)^k(x_\lambda)\| \right]$$

Or, par définition de la norme subordonnée (on la note de la même manière), et par propriété de sous-multiplicativité,

$$\|(u - \lambda \text{id}_E)^k(x_\lambda)\| \leq \|u - \lambda \text{id}_E\|_{\mathcal{L}(E)}^k \max_{\lambda \in \sigma(u)} \|x_\lambda\|$$

Il suit que

$$\|u^n(x)\| \leq \left[ \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \rho(u)^{n-m(\lambda)} P_{\lambda,u}(n) \right] \max_{\lambda \in \sigma(u)} \|x_\lambda\|$$

où  $P_{\lambda,u}$  est un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ , de coefficients composés de terme du type  $\|u - \lambda \text{id}_E\|$ , et de termes provenant du coefficient binomial. Or, on suppose ici  $\rho(u) < 1$ , et  $m(\lambda) \leq d$ , donc

$$\|u^n(x)\| \leq \rho(u)^{n-d} P_u(n) \|x_\lambda\|$$

Enfin,  $x \mapsto \max_{\lambda \in \sigma(u)} \|x_\lambda\|$  définit une norme sur  $E$ , et puisque toutes les normes sont équivalentes sur  $E$ , il suit finalement qu'il existe  $\kappa > 0$  tel que

$$\|u^n\| \leq \kappa \rho(u)^{n-d} P_u(n)$$

qui tend vers 0 lorsque  $[n \rightarrow +\infty]$ . Par équivalence des normes, c'est le cas pour toute norme.

[(iii)  $\implies$  (i)] Soit  $N$  une norme, de norme subordonnée  $\tilde{N}$ . Par hypothèse, il existe  $p_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\tilde{N}(u^{p_0+1}) < 1$$

On définit alors une nouvelle norme  $\|\cdot\|_E$  sur  $E$  par :

$$\|x\|_E \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{p_0} N(u^k(x))$$

Il s'agit bien d'une norme, puisque  $N(x) \leq \|x\|_E$ . De plus, par construction, et télescopage :

$$\|u(x)\|_E - \|x\|_E = N(u^{p_0+1}) - N(x)$$

Donc, par définition de la norme subordonnée sur  $N$ , pour tout  $x \neq 0$  :

$$\|u(x)\|_E - \|x\|_E = (\tilde{N}(u^{p_0+1}) - 1) N(x) < 0$$

Ainsi,

$$\forall x \in E, \|u(x)\|_E < \|x\|_E$$

Et puisque  $\{x \in E, \|x\|_E = 1\}$  est compact, la norme subordonnée associée est atteinte, et donc

$$\max_{\|x\|=1} \|u(x)\| < \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

Autrement dit,

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$$

Ce qui conclut la démonstration.  $\square$

**Proposition 28.2 : Infimum sur les normes subordonnées**

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors

$$\rho(u) = \inf_{\|\cdot\| \in \nu_{\text{sub}}} \|u\|$$

où  $\nu_{\text{sub}}$  désigne l'ensemble des normes subordonnées dans  $E$ .

**Démonstration :** Soit  $\|\cdot\|_E$  une norme sur  $E$ . Pour tout  $\lambda \in \sigma(u)$ ,

$$|\lambda| \leq \|u\|_{\mathcal{L}(E)}$$

Ainsi, pour toute norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)} \in \nu_{\text{sub}}$ , et pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,

$$\rho(u) \leq \|u\|_{\mathcal{L}(E)}$$

Puis, constatons que pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,

$$\rho(\alpha u) = |\alpha| \rho(u)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors d'après la remarque,

$$\rho\left(\frac{u}{\rho(u) + \varepsilon}\right) = \frac{\rho(u)}{\rho(u) + \varepsilon} < 1$$

On est alors en présence du point (ii) de la proposition précédente. D'après (i), il existe alors une norme  $\|\cdot\|_\varepsilon \in \nu_{\text{sub}}$  telle que

$$\left\| \frac{u}{\rho(u) + \varepsilon} \right\|_\varepsilon < 1$$

D'où

$$\|u\|_\varepsilon < \rho(u) + \varepsilon$$

Bilan : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un élément  $\|\cdot\|_\varepsilon \in \nu_{\text{sub}}$  tel que

$$\rho(u) \leq \|u\|_\varepsilon < \rho(u) + \varepsilon$$

Par propriété de la borne inférieure, il suit alors que

$$\rho(u) = \inf_{\|\cdot\| \in \nu_{\text{sub}}} \|u\|$$

Constatons que cette borne inférieure n'est pas atteinte, car  $\rho$  n'est pas une norme :  $\rho(u) = 0$  pour  $u$  nilpotent. □

**Proposition 28.3 : Rayon spectral et norme**

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$  et pour tout norme  $\|\cdot\|$  de  $E$ ,

$$\rho(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}}$$

**Démonstration :** • Constatons dans un premier temps que si  $\sigma(u) = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq n\}$  alors

$$\sigma(u^k) = \{\lambda_i^k, 1 \leq i \leq n\}$$

En effet, si  $\lambda \in \sigma(u)$ , alors  $\lambda^n \in \sigma(u^n)$ , d'où l'inclusion réciproque. Puis, si  $\mu \in \sigma(u^n)$ , on note  $F \stackrel{\text{déf.}}{=} \ker(u^n - \mu \text{id}_E)$ . L'endomorphisme  $u|_F$  admet une valeur propre, puisque  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, et que  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos. On la note  $\lambda$ . Si  $y \in F$  est vecteur propre associé,

$$u(y) = \lambda y$$

donc

$$u^n(y) = \lambda^n y$$

Puisque  $y \in F$ , on a aussi

$$u^n(y) = \mu y$$

d'où, puisque  $y$  est non nul,  $\mu = \lambda^n$ , d'où l'inclusion directe.

• Par conséquent, pour tout norme  $\|\cdot\| \in \nu_{\text{sub}}$  :

$$\rho(u)^n = \rho(u^n) \leq \|u^n\|$$

D'où

$$\rho(u) \leq \|u^n\|^{\frac{1}{n}}$$

• Puis, parle même type d'astuce que la proposition précédente, on se donne  $\varepsilon > 0$ . Alors

$$\rho\left(\frac{u}{\rho(u) + \varepsilon}\right) = \frac{\rho(u)}{\rho(u) + \varepsilon} < 1$$

donc par la première proposition,

$$\left(\frac{u}{\rho(u) + \varepsilon}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, il existe un rang  $N_0$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,

$$\|u^n\|^{\frac{1}{n}} < \rho(u) + \varepsilon$$

• Bilan, pour toute norme  $\|\cdot\| \in \nu_{\text{sub}}$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N$  pour tout  $n > N$ ,

$$\left| \|u^n\|^{\frac{1}{n}} - \rho(u) \right| \leq \varepsilon$$

donc pour toute norme  $\|\cdot\| \in \nu_{\text{sub}}$ ,

$$\rho(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Enfin, l'équivalence des normes permet de conclure au résultat pour toutes les normes de  $E$ , puisque

$$\forall C > 0, C^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

□

## 29 Théorème des extrema liés par le théorème d'inversion locale

Références :

- Calcul différentiel, André AVEZ ;
- Petit guide de calcul différentiel, François ROUVIÈRE ;
- Analyse, Xavier GOURDON

### Théorème 29.1 : Théorème des extrema liés

Soient  $f, g_1, \dots, g_r$  des applications définies sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs réelles de classe  $C^1$ . On note

$$X \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$$

On suppose que :

- \*  $f$  admet un extremum local en  $a \in X$  ;
- \* la famille de formes linéaires  $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$  est libre.

Alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  tels que

$$df(a) = \sum_{k=1}^r \lambda_k dg_k(a)$$

**Démonstration :** On note  $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ , avec  $r + s = n$ . La famille  $(dg_k(a))_{1 \leq k \leq r}$  est libre dans  $(\mathbb{R}^n)'$ , donc  $r \leq n$ . Si  $r = n$ , alors cette famille forme une base de  $(\mathbb{R}^n)'$ , donc le résultat est vrai. Supposons que  $r \leq n - 1$ . Alors la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$

est de rang  $r$ . On peut en extraire une sous-matrice de rang  $r$ . Quitte à changer les variables, on suppose que la ma-

trix en question est  $\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a)\right)_{1 \leq i, j \leq r}$ . Elle est alors inversible. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe  $U' \subset \mathbb{R}^s$  voisinage de  $\alpha$ , il existe  $\Omega \subset \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$  voisinage de  $a = (\alpha, \beta)$  et une application  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_r) : U' \rightarrow \mathbb{R}^r$  de classe  $C^1$  tel que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$  :

$$\begin{cases} (x, y) \in \Omega \\ g_1(x, y) = 0 \\ \vdots \\ g_r(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in U' \\ y = \phi(x) \end{cases}$$

Autrement dit,  $X \cap \Omega \stackrel{\text{déf.}}{=} \Gamma$  s'écrit :

$$\Gamma = \{z \in \Omega, \exists x \in U', z = (x, \phi(x))\}$$

On définit pour tout  $x \in U'$  :

$$h(x) = f(x, \phi(x))$$

Alors  $h$  admet un extremum local en  $\alpha$ , puisque  $h(\alpha) = f(a)$ . Enfin,  $\alpha \in U'$  ouvert, donc par caractérisation d'un point critique, pour tout  $1 \leq i \leq s$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = 0$$

Par le théorème des fonctions composées,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(\alpha) \frac{\partial f}{\partial y_k}(a) = 0$$

Puis, en dérivant par rapport à la  $i$ -ème variable  $g_k(x, \phi(x)) = 0$  sur  $U'$  en  $\alpha$  :

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(\alpha) \frac{\partial g_k}{\partial x_k}(a) = 0$$

Autrement dit, la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$

est de rang au plus  $r$  en constatant les relations de dépendance décrites précédemment sur les colonnes. Ainsi, les  $r + 1$  lignes sont liées : il existe  $\mu_0, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}$  tels que

$$\mu_0 df(a) + \sum_{k=1}^r \mu_k dg_k(a) = 0$$

Avec  $\mu_0 \neq 0$  sans quoi la famille  $(dg_k(a))_k$  est liée. Donc, on a bien

$$df(a) = \sum_{k=1}^r \lambda_k dg_k(a)$$

□

### 30 Théorème spectral par le théorème des extrema liés

Référence : Calcul différentiel, André AVEZ

#### Théorème 30.1 : Théorème spectral

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel préhilbertien de dimension finie. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme symétrique :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Alors il existe une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  orthonormée dans laquelle  $u$  est diagonalisable.

**Démonstration :** Pour tout  $x \in E$ , on définit

$$F(x) \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \langle u(x), x \rangle$$

Alors  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $E$  avec pour tout  $x \in E$  et  $h \in E$  :

$$dF(x) \cdot h = 2\langle Ax, h \rangle$$

Puisque  $E$  est de dimension finie, la sphère  $S = \partial B(0, 1)$  est compacte. Il existe alors  $x_0 \in S$  tel que

$$F(x_0) = \max_{y \in S} F(y)$$

Utilisons le théorème des extrema liés sur la sous-variété  $S$  :

$$S = \left\{ \|x\|^2 - 1 = 0 \right\}$$

Notons  $g(x) = \|x\|^2 - 1$ . Alors pour tout  $x \in E$  et  $h \in E$  :

$$dg(x) \cdot h = 2\langle x, h \rangle$$

La forme différentielle  $dg(x)$  est non nulle, donc forme une famille libre. Par le théorème des extrema liés, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$dF(x_0) = \lambda dg(x_0)$$

Ainsi, pour tout  $h \in \mathbb{E}$  :

$$2\langle u(x_0), h \rangle = 2\lambda \langle x_0, h \rangle$$

d'où

$$u(x_0) = \lambda x_0$$

Pour  $h = x_0$ , on obtient  $\lambda = \langle u(x_0), x_0 \rangle = F(x_0)$ . Ainsi, si  $x_0$  réalise le maximum de  $F$ ,  $x_0$  est vecteur propre pour  $u$  pour la valeur propre  $F(x_0)$ . De plus, si  $y \in \text{Vect}(x_0)^\perp$  alors

$$\langle u(y), x_0 \rangle = \langle y, u(x_0) \rangle = F(x_0) \langle y, x_0 \rangle$$

Soit encore

$$\langle u(y), x_0 \rangle = 0$$

Donc l'espace  $F \stackrel{\text{déf.}}{=} \text{Vect}(x_0)^\perp$  est stable par  $u$ . De plus,  $u|_F$  est symétrique, avec  $\dim F = \dim E - 1$ . Ainsi, par récurrence, on conclut sur le fait que  $u$  admet une base de vecteurs propres deux à deux orthogonaux, et de norme 1. Donc  $u$  admet une base orthonormée de vecteurs propres.  $\square$

## 31 Minimisation de l'entropie dans le cas d'un équilibre thermique

Références :

- *Petit guide de calcul différentiel*, François ROUVIÈRE ;
- *Thermodynamique fondamentale*, Robert BÉDORET

La situation de physique statistique est la suivante : on considère un système  $\Sigma$  à  $\Omega$  états ( $\#\Sigma = \Omega$ ). Chaque état possède une énergie  $E_i$ , supposée constante dans le cas d'un équilibre thermique. On cherche les probabilités  $p_i$  d'être dans l'état  $i$  qui maximise l'entropie  $S$  :

$$S(p) \stackrel{\text{déf.}}{=} -k_B \sum_{i=1}^{\Omega} p_i \ln(p_i)$$

Dans le cas du système considéré, on suppose que l'énergie totale est constante, définie ici par

$$E = \sum_{i=1}^{\Omega} E_i p_i$$

Enfin, on suppose qu'un état est uniquement déterminé par la donnée de son énergie  $E_i$  : on suppose que les  $E_i$  sont distincts.

### Proposition 31.1 : Entropie dans un état d'équilibre thermique

Soit  $\Omega \geq 2$ . On considère  $E_1, \dots, E_\Omega \in \mathbb{R}$  deux à deux distincts, et  $E \in \mathbb{R}$ . On considère

$$\mathcal{P}_\Omega \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{ (p_1, \dots, p_\Omega) \in \mathbb{R}^\Omega \left| \begin{array}{l} p_i > 0 \\ \sum_{i=1}^{\Omega} p_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{\Omega} E_i p_i = E \end{array} \right. \right\}$$

Alors l'application  $S : (\mathbb{R}_+^*)^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$S(p) \stackrel{\text{déf.}}{=} - \sum_{i=1}^{\Omega} p_i \ln p_i$$

admet un unique maximum sur  $\mathcal{P}_\Omega$ , atteint en  $p^*$  donné par :

$$p_i^* = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$$

avec  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $Z = \sum_{i=1}^{\Omega} e^{-\beta E_i}$ .

**Démonstration :** • L'espace  $(\mathbb{R}_+^*)^\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^\Omega$ , et on cherche à minimiser  $S$  sur  $\mathcal{P}_\Omega$ .  $S$  est de classe  $C^1$ . Les applications  $p \mapsto \sum_{i=1}^\Omega p_i - 1$  et  $p \mapsto \sum_{i=1}^\Omega p_i E_i - E$  sont  $C^1$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^\Omega$ . Enfin, ces applications ont pour gradient (pris en  $p$ )  $\mathbf{1} \stackrel{\text{déf.}}{=} (1)_{1 \leq i \leq \Omega}$  et  $(E_i)_{1 \leq i \leq \Omega}$ , qui sont libres car les  $E_i$  sont deux à deux distincts. De plus,  $-\partial_i^2 S = \frac{1}{p_i} > 0$ , donc  $-S$  est convexe, donc  $S$  admet un unique maximum sur  $(\mathbb{R}_+^*)^\Omega$ . Supposons que ce minimum  $p^*$  soit dans  $\mathcal{P}_\Omega$ .

• On se trouve alors dans le cadre de l'application du théorème des extrema liés. Il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que

$$\nabla S(p^*) = \alpha \mathbf{1} + \beta \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_\Omega \end{pmatrix}$$

Autrement dit, pour tout  $i \in \llbracket 1, \Omega \rrbracket$ ,

$$-\ln(p_i) = \alpha' + \beta E_i$$

La condition de normalisation de  $p$  implique que

$$e^{\alpha'} = \sum_{i=1}^\Omega e^{-\beta E_i} \stackrel{\text{déf.}}{=} Z(\beta)$$

La condition d'équilibre thermique implique elle que

$$\frac{1}{Z(\beta)} \sum_{i=1}^\Omega E_i e^{-\beta E_i} = E$$

D'où

$$\frac{1}{Z(\beta)} \sum_{i=1}^\Omega (E_i - E) e^{-\beta E_i} = 0$$

Enfin, une multiplication par  $e^{\beta E}$  donne finalement la condition

$$\sum_{i=1}^\Omega (E_i - E) e^{-\beta(E_i - E)} = 0$$

On définit sur  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^\Omega (E_i - E) e^{x(E_i - E)}$$

• Montrons que  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . D'une part, il existe un élément  $i_0$  tel que  $E_{i_0} - E > 0$ . En effet, si cela n'est pas le cas, puisque

$$\sum_{i=1}^\Omega (E_i - E) p_i = 0$$

Alors tous les  $E_i$  sont égaux à  $E$ , ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi, le terme en  $i_0$  permet d'affirmer (les autres termes tendent soit vers 0 vers  $+\infty$ ) :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

De même, il existe  $i_1$  tel que  $E_{i_1} - E < 0$ , donc

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$

Enfin,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \sum_{i=1}^\Omega (E_i - E)^2 e^{x(E_i - E)} > 0$$

donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Il suit que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, définir  $\beta$  comme solution de  $f(-\beta) = 0$  permet d'affirmer qu'il existe un unique  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $p_i^* = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_i}$ .  $\square$

## 32 Espaces de Hölder : complétude, compacité, connexité

Référence : *Analyse pour l'agrégation*, Claude ZUILY, Hervé QUEFFÉLEC

### 32.1 Complétude

#### Proposition 32.1 : Autour de l'espace $C^{0,\alpha}$

Pour  $0 < \alpha < 1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ , l'espace  $C^{0,\alpha}(\Omega)$  défini par :

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{ u \in L^\infty(\Omega) \mid \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$$

est un espace vectoriel normé complet, pour la norme

$$\|u\|_{0,\alpha} \stackrel{\text{déf.}}{=} \|u\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Cette norme définit de plus une norme d'algèbre sur  $C^{0,\alpha}(\Omega)$ , à constante près :

$$\forall u, v \in C^{0,\alpha}(\Omega), \exists C > 0, \|uv\|_{0,\alpha} \leq C \|u\|_{0,\alpha} \|v\|_{0,\alpha}$$

Cette propriété se généralise sur  $\mathbb{R}^n$ , d'où la présentation avec  $\Omega$  de cette propriété.

**Démonstration :** • Soit  $(f_n)_n$  une suite de Cauchy sur  $C^{0,\alpha}(\Omega)$ , pour la norme  $\|\cdot\|_{0,\alpha}$  : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N$  tel que

$$\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \|f_{n+p} - f_n\|_{0,\alpha} \leq \varepsilon$$

Alors en particulier

$$\left| \|f_{n+p}\|_{0,\alpha} - \|f_n\|_{0,\alpha} \right| \leq \|f_{n+p} - f_n\|_{0,\alpha} \leq \varepsilon$$

donc la suite  $(\|f_n\|_{0,\alpha})_n$  est de Cauchy sur  $\mathbb{R}$ , donc bornée. On note  $M$  un majorant de  $\|f_n\|_{0,\alpha}$ .

Soit  $x \in \Omega$ . Alors

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \|f_{n+p} - f_n\|_{L^\infty} \leq \|f_{n+p} - f_n\|_{0,\alpha}$$

donc la suite  $(f_n(x))_n$  est de Cauchy sur  $\mathbb{R}$ , donc converge vers un élément  $f(x) \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $f \in C^{0,\alpha}$ . D'une part, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $x \in \Omega$  :

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{0,\alpha} \leq M$$

donc  $|f(x)| \leq M$ , donc  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Puis, pour tout  $x, y \in \Omega$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \|f_n\|_{0,\alpha} |x - y|^\alpha \leq M |x - y|^\alpha$$

Donc, par convergence simple

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\alpha$$

donc  $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ , ce qui conclut sur la complétude de  $C^{0,\alpha}(\Omega)$  muni de sa norme.

• Montrons qu'il s'agit d'une algèbre. Notons

$$[u]_{0,\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Soient  $u, v \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ . Alors, de la même manière qu'on le montre pour montrer que le produit de limites et la limite de produits,

$$|u(x)v(x) - u(y)v(y)| \leq |u(x)||v(x) - v(y)| + |v(y)||u(y) - u(x)|$$

Ainsi,

$$|u(x)v(x) - u(y)v(y)| \leq (\|u\|_{L^\infty} [v]_{0,\alpha} + \|v\|_{L^\infty} [u]_{0,\alpha}) |x - y|^\alpha$$

donc  $uv \in C^{0,\alpha}$ .

• De plus,

$$[uv]_{0,\alpha} \leq \|u\|_{L^\infty} [v]_{0,\alpha} + \|v\|_{L^\infty} [u]_{0,\alpha}$$

Et puisque

$$\|uv\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{L^\infty}$$

Il suit qu'en fait

$$\|uv\|_{0,\alpha} \leq \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{0,\alpha} + \|v\|_{L^\infty} \|u\|_{0,\alpha}$$

D'où le résultat sur la norme d'algèbre à constante près. □

Il suit que l'inclusion  $C^{0,\alpha} \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  est continue (de norme égale à 1).

**Proposition 32.2 : Autour de l'espace  $C^{k,\alpha}$**

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $0 < \alpha < 1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ , l'espace  $C^{k,\alpha}(\Omega)$  défini par récurrence :

$$C^{k,\alpha}(\Omega) \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{ u \in C^k(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \mid \forall 0 \leq \beta \leq k, u^{(\beta)} \in C^{0,\alpha} \right\}$$

est un espace vectoriel normé complet, pour la norme

$$\|u\|_{k,\alpha} \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\beta=0}^k \|u^{(\beta)}\|_{0,\alpha}$$

Cette norme définit de plus une norme d'algèbre sur  $C^{k,\alpha}(\Omega)$ , à constante près :

$$\forall u, v \in C^{k,\alpha}(\Omega), \exists C > 0, \|uv\|_{k,\alpha} \leq C \|u\|_{k,\alpha} \|v\|_{k,\alpha}$$

Il suit que l'inclusion  $C^{k,\alpha} \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  est continue (de norme égale à 1).

## 32.2 Compacité des injections entres espaces de Hölder

### Proposition 32.3 : Inclusion compacte entre les espaces $C^{k,\alpha}$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $0 < \alpha < \alpha' < 1$ . Alors l'inclusion

$$i : (C^{0,\alpha'}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{0,\alpha'}) \rightarrow (C^{0,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{0,\alpha'})$$

est compacte : si  $B$  désigne la boule unité de  $C^{k,\alpha'}$  pour la norme  $\|\cdot\|_{k,\alpha'}$  alors  $\overline{i(B)}$  est compact. Autrement dit, si une suite  $(u_n)_n$  est bornée dans  $C^{k,\alpha'}$  alors il existe  $u \in C^{k,\alpha'}$  et une extractrice  $\phi$  telle que  $u_{\phi(n)}$  converge vers  $u$  pour la norme associée à  $C^{k,\alpha}$ , pour tout  $0 < \alpha < \alpha'$ .

2. Plus généralement, soient  $k, k'$  deux entiers, et  $\alpha, \alpha' \in ]0, 1[$ . Si  $k + \alpha > k' + \alpha'$  alors l'inclusion

$$j : (C^{k,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{k,\alpha}) \rightarrow (C^{k',\alpha'}(\Omega), \|\cdot\|_{k',\alpha'})$$

est compacte.

### Lemme 32.1 : Estimation entre $C^{0,\alpha}$

Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}$ . Soient  $0 < \alpha' < \alpha < 1$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{0,\alpha'} \leq \left(\frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}} + 1\right) \|u\|_{L^\infty} + \varepsilon^{\alpha-\alpha'} \|u\|_{0,\alpha}$$

**Démonstration du lemme :** Par définition, pour tout

$u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{\alpha'} = \|u\|_{L^\infty} + [u]_{0,\alpha'}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Si  $|x - y| \geq \varepsilon$ , alors

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha'}} \leq \frac{2\|u\|_{L^\infty}}{\varepsilon^{\alpha'}}$$

Si  $|x - y| \leq \varepsilon$ , alors

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha'}} \leq \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \varepsilon^{\alpha-\alpha'} \leq \|u\|_{0,\alpha} \varepsilon^{\alpha-\alpha'}$$

Bilan,

$$[u]_{0,\alpha'} \leq \sup_{\substack{x \neq y \\ |x-y| \leq \varepsilon}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} + \sup_{\substack{x \neq y \\ |x-y| \leq \varepsilon}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

donc

$$[u]_{0,\alpha'} \leq \frac{2\|u\|_{L^\infty}}{\varepsilon^{\alpha'}} + \|u\|_{0,\alpha} \varepsilon^{\alpha-\alpha'} \qquad \|u\|_{0,\alpha'} \leq \left(\frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}} + 1\right) \|u\|_{L^\infty} + \varepsilon^{\alpha-\alpha'} \|u\|_{0,\alpha}$$

D'où □

Le lemme suivant utilise le théorème d'ASCOLI.

**Lemme 32.2 : Compacité entre espace de Hölder et espace de fonctions continues**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}$ . Alors il existe une injection

$$\iota : \left(\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{0,\alpha}\right) \longrightarrow \left(\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{L^\infty}\right)$$

qui soit compacte.

**Démonstration du lemme :** 1. Construisons cette injection. Soit  $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ .

• Soit  $x_0 \in \partial\Omega$  (si  $\partial\Omega$  est vide, l'inclusion est une inclusion triviale). Alors  $x_0 \in \bar{\Omega}$ , donc est limite d'une suite  $(x_n)_n \in \Omega^{\mathbb{N}}$ . Pour tout  $n, p \in \mathbb{N}$  :

$$|u(x_{n+p}) - u(x_n)| \leq [u]_{0,\alpha} |x_{n+p} - x_n|^\alpha$$

Ainsi,  $(u(x_n))_n$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  donc converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ .

• Pour affirmer qu'on a su définir  $u(x_0) = \lim u(x_n)$ , il reste à montrer que cette limite ne dépend pas de  $x_n$ . Supposons que  $(y_n)_n \in \Omega^{\mathbb{N}}$  converge vers  $x_0$ . Alors  $(u(y_n))_n$  converge vers  $\ell' \in \mathbb{R}$ . Or, puisque  $u$  est dans l'espace de Hölder,

$$|u(x_n) - u(y_n)| \leq [u]_{0,\alpha} |x_n - y_n|^\alpha$$

Un passage à limite, et la continuité de  $u$ , permet de conclure que  $\ell = \ell'$ .

• On définit alors le prolongement de  $u$ , que l'on note  $\tilde{u}$  par :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{sur } \Omega \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec  $(x_n)_n \in \Omega^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $x$ . Montrons que  $\tilde{u} \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ . On va même montrer une propriété plus forte :  $\tilde{u} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Soient  $x, y \in \bar{\Omega}$ . Alors il existe une suite  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$  de  $\Omega$  qui convergent respectivement vers  $x$  et  $y$  (si  $x$  ou  $y \in \Omega$ , on peut choisir une suite constante). Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|u(x_n) - u(y_n)| \leq [u]_{0,\alpha} |x_n - y_n|^\alpha$$

Avec ces deux lemmes démontrés, on est paré à démontrer la compacité des applications de la proposition 32.3.

Par définition du prolongement, il suit immédiatement que

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq [u]_{0,\alpha} |x - y|^\alpha$$

d'où  $\tilde{u} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ .

2. Montrons la compacité de cette injection. On se donne une suite  $(u_n)_n$  bornée par un constante  $M$  de  $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ . Montrons que  $(\tilde{u}_n)_n$  admet une extraction convergente. Pour cela, on utilise le théorème d'Ascoli, en montrant que

$$U \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\tilde{u}_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$$

est relativement compact dans  $(\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{L^\infty})$ . Notons que  $\bar{\Omega}$  est compact, ce qui nous place bien dans le cadre de l'application de ce théorème.

▷ Soit  $x \in \bar{\Omega}$ . Alors  $U$  est équicontinue en  $x$ . En effet, pour  $\delta > 0$ , pour  $\tilde{u}_n \in U$  et  $|x - y| \leq \delta$ ,

$$|\tilde{u}_n(x) - \tilde{u}_n(y)| \leq M\delta^\alpha$$

▷ Soit  $x \in \bar{\Omega}$ . Alors puisque

$$\|\tilde{u}_n\|_{0,\alpha} \leq M$$

Il suit que  $(\tilde{u}_n(x))_n$  est une suite bornée, donc l'ensemble

$$\{\tilde{u}_n(x), n \in \mathbb{N}\} \subset \bar{\Omega}$$

est relativement compact.

▷ Les deux hypothèses du théorèmes sont vérifiées, il suit d'après Ascoli que  $U$  est relativement compact pour  $\|\cdot\|_{\infty}$ , c'est-à-dire que la suite  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet bien une extraction qui converge pour la norme de la convergence uniforme. □

**Démonstration : [1.]** On considère une suite  $(u_n)_n \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ . On note  $M$  un majorant de cette suite. D'après le deuxième lemme, il existe une extraction  $\phi$  et  $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  telle que

$$\|u_{\phi(n)} - u\|_{L^\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Or, puisque  $u_n$  est bornée pour  $\|\cdot\|_{0,\alpha}$ , on a pour tout  $x, y \in \Omega$  :

$$|u_{\phi(n)}(x) - u_{\phi(n)}(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

Donc, par convergence simple

$$|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

donc  $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ . Donc  $u_{\phi(n)} - u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par le premier lemme, il suit que pour  $\varepsilon > 0$  et  $\alpha' < \alpha$  :

$$\|u_{\phi(n)} - u\|_{0,\alpha'} \leq \left(\frac{2}{\varepsilon^{\alpha'}} + 1\right) \|u_{\phi(n)} - u\|_{L^\infty} + \varepsilon^{\alpha-\alpha'} \|u - u_{\phi(n)}\|_{0,\alpha}$$

Pour  $n$  assez grand, il suit alors que

$$\|u_{\phi(n)} - u\|_{0,\alpha'} \leq 2M\varepsilon^{\alpha-\alpha'} + 2\varepsilon^{1-\alpha} + \varepsilon$$

Puisque  $0 < \alpha < \alpha' < 1$ , cela conclut que

$$\|u_{\phi(n)} - u\|_{0,\alpha'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'où la compacité de l'inclusion

$$i : \left(\mathcal{C}^{0,\alpha'}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{0,\alpha'}\right) \longrightarrow \left(\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{0,\alpha'}\right)$$

□

Une conséquence très utile pour la dernière sous-parties est l'estimation suivante :

**Proposition 32.4 : Estimation entre espaces  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}$ . Soient  $k \leq k'$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_\varepsilon > 0$  telle que pour tout  $u \in \mathcal{C}^{k',\alpha}(\Omega)$  :

$$\|u\|_{k,\alpha} \leq \varepsilon \|u\|_{k',\alpha} + C_\varepsilon \|u\|_{L^\infty}$$

**Démonstration :** Par l'absurde, supposons qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout constante  $C > 0$ , il existe  $u_C \in \mathcal{C}^{k',\alpha}(\Omega)$  qui vérifie

$$\|u_C\|_{k,\alpha} > \varepsilon_0 \|u_C\|_{k',\alpha} + C \|u_C\|_{L^\infty}$$

On dispose alors d'une suite  $(u_n)_n$  qui vérifie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\|u_n\|_{k,\alpha} > \varepsilon_0 \|u_n\|_{k',\alpha} + n \|u_n\|_{L^\infty}$$

Puisque  $\|u_n\|_{k,\alpha} > 0$ , il suit que  $u_n \neq 0$ . On définit alors

$$v_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{u_n}{\|u_n\|_{k',\alpha}}$$

Alors  $\|v_n\|_{k',\alpha} = 1$  et

$$\|v_n\|_{k,\alpha} > \varepsilon_0 + n \|v_n\|_{L^\infty}$$

On la réécrit

$$\|v_n\|_{L^\infty} + \frac{\varepsilon_0}{n} < \frac{\|v_n\|_{k,\alpha}}{n}$$

Or, par compacité de l'inclusion

$$\mathcal{C}^{k',\alpha}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$$

Il existe une extraction  $\phi$  de  $v$  qui converge vers un certain  $v \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$  pour  $\|\cdot\|_{k,\alpha}$  :

$$\|v_{\phi(n)} - v\|_{k,\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par continuité de l'inclusion

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$$

il suit que

$$\|v_{\phi(n)} - v\|_{L^\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, en passant la limite dans

$$\|v_{\phi(n)}\|_{L^\infty} + \frac{\varepsilon_0}{n} < \frac{\|v_{\phi(n)}\|_{k,\alpha}}{n}$$

On obtient  $\|v\|_\infty = 0$ , donc  $v = 0$ . Or,

$$\|v_n\|_{k,\alpha} > \varepsilon_0$$

donc  $\|v\|_{k,\alpha} \geq \varepsilon_0 > 0$ , ce qui contredit  $v = 0$ . On a donc montré l'inégalité par l'absurde.

□

### 32.3 Résolution d'une équation différentielle dans les espaces de Hölder en utilisant la connexité

#### Théorème 32.1

Soient  $\alpha \in ]0, 1]$ ,  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $q \in C^{0,\alpha}(]a, b[)$ . Alors pour toute fonction  $f \in C^{0,\alpha}(]a, b[)$ , et tous réels  $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ , il existe une unique application  $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R})$  telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) &= f(x) \text{ sur } ]a, b[ \\ u(a) &= u_0 \\ u(b) &= u_1 \end{cases}$$

Montrons d'abord l'unicité. Pour cela, on aura besoin de deux lemmes.

#### Lemme 32.3 : Principe du maximum pour les opérateurs différentiels quadratiques

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . On définit pour  $u \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R})$  l'opérateur  $L$  :

$$Lu(x) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x) \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i(x) - c(x)$$

avec  $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ,  $b(x) \in \mathbb{R}^n$  et  $c(x) > 0$ . On suppose que  $A$  et  $b$  sont bornés, et qu'il existe  $i_0$  et une constante  $C_0 > 0$  tels que

$$\forall x \in \Omega, a_{i_0, i_0}(x) \geq C_0$$

Alors, si pour tout  $u \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $Lu \geq 0$  sur  $\Omega$  alors

$$\forall x \in \Omega, u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u^+(y)$$

où  $u^+$  désigne le max entre  $u$  et 0.

#### Démonstration du lemme : 1.

Notons  $L_0$  l'opérateur  $L$  auquel on a amputé le terme en  $c$  :

$$L_0 u(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}(x) \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i(x)$$

Puisque  $b$  est une fonction bornée, il existe  $K > 0$  tel que

$$\forall x \in \Omega, |b_{i_0}(x)| \leq K$$

La stratégie est la suivante : on veut établir le principe du maximum pour  $L_0$  dans ce point. Supposons alors que  $L_0 u \geq 0$  sur  $\Omega$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On va considérer  $v^\varepsilon$  "proche de  $u$ " qui va vérifier  $L_0 v^\varepsilon \geq Lu(x) + f(\varepsilon) > 0$ , où  $f$  est une perturbation, en déduire que  $v^\varepsilon < \sup_{\partial\Omega} v^\varepsilon$  sur  $\Omega$  et conclure en faisant tendre  $[\varepsilon \rightarrow 0^+]$ .

• Pour faciliter le calcul de  $L_0 v$ , on se place dans un cadre exponentiel : on considère pour  $\lambda > 0$  que l'on choisira et  $x \in \bar{\Omega}$  :

$$v^\varepsilon(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_{i_0}}$$

Alors

$$L_0 v^\varepsilon(x) = L_0 u(x) + (a_{i_0, i_0}(x) \lambda^2 + b_{i_0}(x) \lambda) \varepsilon e^{\lambda x_{i_0}}$$

On veut faire une majoration indépendante de  $x$  du deuxième terme. Puisque  $\Omega$  est borné, il existe  $M > 0$  tel que  $|x_{i_0}| \leq M$ . Par les hypothèses sur  $a_{i_0, i_0}$  et  $b_{i_0}$ , on a :

$$L_0 v^\varepsilon(x) \geq L_0 u(x) + (C_0 \lambda^2 + K \lambda) \varepsilon e^{-\lambda M}$$

Choisissons alors  $\lambda > \frac{K}{C_0}$  :

$$L_0 v^\varepsilon(x) \geq L_0 u(x) + \lambda^2 \left( C_0 + \frac{K}{\lambda} \right) \varepsilon e^{-\lambda M} > 0$$

• Or,  $v^\varepsilon$  est continue sur le compact  $\bar{\Omega}$  donc il existe  $x_0 \in \bar{\Omega}$  tel que

$$v^\varepsilon(x_0) = \sup_{y \in \bar{\Omega}} v^\varepsilon(y)$$

Montrons que  $x_0 \in \partial\Omega$ . Supposons que  $x_0 \in \Omega$ . Alors par caractérisation d'un point critique sur un ouvert :

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_i}(x_0) = 0$$

Et puisqu'il s'agit d'un maximum, la matrice hessienne de  $v^\varepsilon$  en  $x_0$  est négative :

$$H \stackrel{\text{déf.}}{=} \left( \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \leq 0$$

On note aussi  $A_0 = A(x_0)$ . Il suit alors que

$$Lv^\varepsilon(x_0) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}(x_0) \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \text{Tr}(A_0 H)$$

Pour aboutir à une contradiction, montrons que  $\text{Tr}(A_0 H) \leq 0$ . Pour cela, puisque  $A_0$  est symétrique positive,  $A_0$  est diagonalisable avec des valeurs propres positives. Ainsi,

$$\text{Tr}(A_0 H) = \text{Tr}(DH)$$

où  $D$  est diagonale composée de coefficients positifs. Puisque  $H$  est composé de coefficients tous négatifs, il suit que  $\text{Tr}(A_0 H) \leq 0$ , soit encore

$$L_0 v^\varepsilon(x_0) \leq 0$$

ce qui contredit

$$L_0 v^\varepsilon(x_0) > 0$$

donc  $x_0 \in \partial\Omega$ , donc pour tout  $x \in \Omega$ ,

$$v^\varepsilon(x) < \sup_{y \in \partial\Omega} v^\varepsilon(y)$$

• Ainsi, pour tout  $x \in \Omega$  et  $\varepsilon > 0$  :

Le deuxième lemme est conséquence de ce premier.

**Lemme 32.4**

Soient  $a < b$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $q \in \mathcal{C}^{0,\alpha}([a, b])$  positive. Si  $M$  désigne  $\|q\|_{L^\infty}$ , il existe une constante  $C(M) > 0$  telle que

$$\forall u \in \mathcal{C}^2([a, b]), \|u\|_{L^\infty} \leq |u(a)| + |u(b)| + C(M) \|u'' - qu\|_{L^\infty}$$

**Démonstration du lemme :** On note  $P \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{d^2}{dx^2} - q$ .

1. On note  $v$  le second membre, avec un terme qui est fonction de  $x$  :

$$v(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} |u(a)| + |u(b)| + g(x) \|Pu\|_{L^\infty}$$

$$u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_{i_0}} < \sup_{y \in \partial\Omega} u(y) + \varepsilon e^{-\lambda M} \lambda^2 \left( C_0 + \frac{K}{\lambda} \right)$$

Ce qui donne lorsque  $[\varepsilon \rightarrow 0]$  :

$$\forall x \in \Omega, u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u(y)$$

d'où le principe du maximum pour  $L_0$  id est  $c = 0$ .

2. Revenons au cas général. On définit

$$\Omega_+ \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in \Omega, u(x) > 0\}$$

Si  $\Omega_+ = \emptyset$  alors  $u(x) \leq 0$  sur  $\Omega$ , donc sur  $\bar{\Omega}$ , et donc cela montrerait bien que pour tout  $x \in \Omega$  :

$$u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u^+(y)$$

Supposons cette fois que  $\Omega_+ \neq \emptyset$ . C'est un ouvert bornée de  $\mathbb{R}^n$  sur lequel  $Lu(x) \geq 0$ . Autrement dit,

$$L_0 u(x) \geq c(x)u(x) \geq 0$$

Par le principe du maximum du premier point, pour tout  $x \in \Omega_+$  :

$$u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega_+} u(y) = u^+(y_0)$$

avec  $y_0 \in \partial\Omega_+$ , qui est bien atteint par compacité de  $\partial\Omega_+$ . Montrons que  $y_0 \in \partial\Omega$ . Si  $y \in \Omega$  alors il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $y \in B(y_0, \delta)$ ,  $u(y) > 0$ , donc  $y_0 \in \Omega_+$ , ce qui contredit  $y_0 \in \partial\Omega_+$ . Ainsi, pour tout  $x \in \Omega_+$  :

$$u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u(y) = \sup_{y \in \partial\Omega} u^+(y)$$

C'est un résultat encore vrai sur  $\Omega \setminus \Omega_+$  puisque  $u(x) \leq 0$  dans ce cas. On a bien finalement montré que pour tout  $x \in \Omega$  :

$$u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u^+(y)$$

ce qui conclut la démonstration. □

avec  $g$  une bonne fonction que l'on va choisir après. On souhaite montrer que :

$$|u(x)| \leq v(x)$$

Si  $g$  est bornée, on aura le résultat. Pour cela, on souhaite utiliser le principe du maximum avec  $u$  et  $v$ . On suppose donc  $g$  de classe  $C^2$ . Si on montre que  $Pu \leq Pv$ , on aura alors

$$u(x) - v(x) \leq \sup_{y \in \{a,b\}} (u - v)^+(y)$$

Afin d'assurer que  $u(x) \leq v(x)$ , on impose que  $|u(a)| \leq v(a)$  et  $|u(b)| \leq v(b)$ . Autrement dit,  $g$  est supposée positive. On fait de même avec  $-u$ , c'est-à-dire on souhaite avoir  $Pv \leq -Pu$ , qui impliquera  $-u \leq v$ . Enfin,

$$Pv(x) = Pg(x) \|Pu\|_{L^\infty}$$

Il serait bien venu que  $Pg(x) \leq -1$  pour avoir

$$Pv(x) \leq -\|Pu\|_{L^\infty} \leq |Pu(x)|$$

Ce qui permet d'utiliser deux fois le principe du maximum. Après toutes ces observations, on peut alors construire  $g$ , et dérouler la démonstration. Afin de déterminer facilement la condition sur les dérivées de  $g$ , on va choisir une expression du type exponentielle. Pour  $\lambda > 0$ , on pose pour tout  $x \in [a, b]$  :

$$g(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} e^{\lambda(b-a)} - e^{\lambda(x-a)}$$

$g$  est de classe  $C^\infty$ , positive, décroissante (donc bornée). De plus,

$$Pg(x) = (-\lambda^2 + q(x))e^{\lambda(x-a)} - q(x)e^{\lambda(b-a)}$$

Ainsi,

Nous pouvons alors conclure en l'existence et l'unicité de la solution de l'équation du théorème **32.1**.

**Démonstration :** • Montrons l'unicité. Si  $u_1, u_2$  sont solutions alors  $v = u_1 - u_2$  vérifie  $Pv = 0$ , avec  $v(a) = v(b) = 0$ . Le lemme précédent conclut alors que  $\|v\|_{L^\infty} \leq 0$ , d'où  $v = 0$ . (tous ces lemmes pour ces quatre lignes d'unicité...)

• Reste à montrer l'existence de telles solutions. On va utiliser la notion de connexité ici, c'était ici le but initial de toute cette section. L'unicité étant démontrée, on va l'utiliser de manière cruciale dans ce contexte.

1. Quitte à poser  $v = u - \tilde{u}$  avec  $\tilde{u}$  affine qui vérifie  $\tilde{u}(a) = u(a)$  et  $\tilde{u}(b) = u(b)$ , (et à changer  $f$  en  $\tilde{f}$ ), on peut supposer que les conditions aux bords sont nulles, pas que nous allons franchir ici. Supposons alors que  $u(a) = u(b) = 0$ .

$$Pg(x) \leq (-\lambda^2 + M)$$

Pour imposer  $Pg(x) \leq 1$ , il ne reste plus qu'à considérer que  $\lambda^2 = M + 1$ . On a donc construit  $g$ , et conclut la phase d'analyse. On fait ensuite la synthèse.

2. On note  $\lambda \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{M+1}$ . On définit sur  $[a, b]$  :

$$\forall x \in [a, b], g(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} e^{\lambda(b-a)} - e^{\lambda(x-a)}$$

$g$  est positive, et majorée par  $e^{\lambda(b-a)}$ , constante que l'on note  $C(M)$ . De plus,

$$\forall x \in [a, b], Pg(x) \leq -1$$

On définit alors sur  $[a, b]$  :

$$v(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} |u(a)| + |u(b)| + g(x) \|Pu\|_{L^\infty}$$

Alors  $v(a) \geq |u(a)|$  et  $v(b) \geq |u(b)|$ . Enfin,

$$Pv(x) = Pg(x) \|Pu\|_{L^\infty} \leq -\|Pu\|_{L^\infty} \leq |Pu(x)|$$

Donc en particulier  $P(u - v) \geq 0$  sur  $]a, b[$ . D'après le principe du maximum du lemme précédent,

$$u(x) - v(x) \leq \sup_{\{a,b\}} (u - v)^+ \leq 0$$

d'où  $u(x) \leq v(x)$ . De même avec  $-u$  : on a  $P(u+v) \geq 0$ , ce qui donne

$$-u(x) \leq v(x)$$

D'où sur  $[a, b]$  :

$$|u(x)| \leq v(x) \leq |u(a)| + |u(b)| + C(M) \|Pu\|_{L^\infty}$$

□

2. Introduisons l'ensemble suivant :

$$A \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{ t \in [0, 1] \mid \begin{array}{l} \exists! u \in C^{2,\alpha}(]a, b[) \text{ tel que} \\ -u'' + t \cdot qu = f \text{ sur } ]a, b[ \\ u(a) = u(b) = 0 \end{array} \right\}$$

On veut montrer que  $A = [0, 1]$ , auquel cas  $t = 1$  permettra de conclure au théorème **32.1**. Pour cela, on utilise la connexité de  $[0, 1]$  : montrons que  $A$  est non vide, ouvert et fermé dans  $[0, 1]$ . On va pour cela interpréter  $A$  différemment : pour tout  $t \in [0, 1]$ , on définit l'opérateur  $P_t$  par :

$$P_t : \left( \begin{array}{l} E \longrightarrow C^{0,\alpha}(]a, b[) \\ u \longmapsto -u'' + tqu \end{array} \right)$$

où

$$E \stackrel{\text{déf.}}{=} \{u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}([a, b]), u(a) = u(b) = 0\}$$

D'après l'unicité, puisque  $0 \leq tq \leq \|q\|_{L^\infty}$ , si  $u$  est solution de  $P_t u = f$ , cette solution est unique. Autrement dit, si  $u$  est solution de  $P_t u = f$  alors  $t \in A$ . Puisque  $A$  est l'ensemble des points  $t$  tels que  $P_t$  est inversible, on vient de montrer qu'il s'agit plus généralement de l'ensemble des points où  $P_t$  est surjectif. En d'autres termes, il suffit d'exhiber une solution pour conclure à l'appartenance de  $t$  à  $A$  ou non.

**3.**  $A$  est non vide. En effet,  $0 \in A$ . Une solution de  $-u'' = f$  avec  $u(a) = u(b) = 0$  est donnée par :

$$u(x) = - \int_a^x \left( \int_a^t f(s) ds \right) dt + C(x - a)$$

où

$$C = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left( \int_a^t f(s) ds \right) dt$$

donc  $0 \in A$ .

**4.** Montrons que  $A$  est ouvert. Soit  $t_0 \in A$ . Par l'interprétation de  $A$  avec l'opérateur  $P_t$ , il existe un opérateur  $R_{t_0}$  tel que

$$P_{t_0} \circ R_{t_0} = \text{id}_{\mathcal{C}^{0,\alpha}([a,b])}$$

Notons  $F = \mathcal{C}^{0,\alpha}([a, b])$  pour faciliter les notations. Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$P_t \circ R_{t_0} = \text{id}_F + (P_t - P_{t_0}) \circ R_{t_0}$$

Puisque  $(\mathcal{C}^{0,\alpha}, \|\cdot\|_{0,\alpha})$  est un espace de Banach par la première sous-section, montrons qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$  et pour tout  $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}([a, b])$  :

$$\sup_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \frac{\|(P_t - P_{t_0})u\|_{0,\alpha}}{\|u\|_{2,\alpha}} < 1$$

Cela conclura en l'inversibilité de  $P_t$ .

$$\|(P_t - P_{t_0})u\|_{0,\alpha} = |t - t_0| \|qu\|_{0,\alpha}$$

Or, par définition de la norme  $\|\cdot\|_{0,\alpha}$  :

$$\|qu\|_{0,\alpha} = \|qu\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|qu(x) - qu(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \|q\|_{L^\infty} \|u\|_{0,\alpha}$$

Il suit

$$\|(P_t - P_{t_0})u\|_{0,\alpha} \leq M|t - t_0| \|u\|_{0,\alpha}$$

Enfin, par définition de la norme  $\|\cdot\|_{2,\alpha}$  :

$$\|u\|_{0,\alpha} \leq \sum_{k=0}^2 \|u^{(k)}\|_{0,\alpha} = \|u\|_{2,\alpha}$$

on obtient :

$$\|(P_t - P_{t_0})u\|_{0,\alpha} \leq M|t - t_0| \|u\|_{2,\alpha}$$

D'où

$$\sup_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \frac{\|(P_t - P_{t_0})u\|_{0,\alpha}}{\|u\|_{2,\alpha}} \leq M|t - t_0| < 1$$

pour  $|t - t_0| < \frac{1}{M}$ . Par conséquent,  $P_t$  est inversible pour  $t \in ]t_0 - \frac{1}{M}, t_0 + \frac{1}{M}[$ , donc  $]t_0 - \frac{1}{M}, t_0 + \frac{1}{M}[ \subset A$ , donc  $A$  est ouvert dans  $[0, 1]$ .

**5.** Montrons que  $A$  est fermé par caractérisation séquentielle. Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  une suite convergente vers  $t^* \in [0, 1]$ . Montrons que  $t^* \in A$ . Par hypothèse, on dispose d'une suite  $(u_n)_n$  d'éléments de  $\mathcal{C}^{2,\alpha}([a, b])$  tels que

$$\begin{cases} -u_n'' + t_n q u_n = f \\ u_n(a) = u_n(b) = 0 \end{cases}$$

Le plan est le suivant :

- \* Montrons que  $(u_n)_n$  est bornée pour la norme  $\|\cdot\|_{2,\alpha}$  ;
- \* La compacité de l'injection entre  $\mathcal{C}^{2,\alpha}([a, b])$  et  $\mathcal{C}^{2,\alpha'}([a, b])$  pour  $0 < \alpha' < \alpha$  nous fournit une extraction de  $(u_n)_n$  qui va converger, pour la norme  $\|\cdot\|_{2,\alpha'}$  ;
- \* Cette valeur d'adhérence est solution de  $P_{t^*} u = f$ .

► Montrons que  $(u_n)_n$  est bornée sur  $\mathcal{C}^{2,\alpha}([a, b])$ . Par définition de cette norme :

$$\|u_n\|_{2,\alpha} = \|u_n\|_{0,\alpha} + \|u_n'\|_{0,\alpha} + \|u_n''\|_{0,\alpha}$$

Notre mission, si nous l'acceptons, est de s'occuper de chacun de ces termes, et de les majorer par une constante ou une constante multipliée par  $\|u_n\|_{2,\alpha}$ . D'abord, il s'agit de constater que

$$\|u_n\|_{2,\alpha} = \|u_n\|_{1,\alpha} + \|u_n''\|_{0,\alpha}$$

Le premier terme provient des lemmes et propositions précédentes (c'est ici que cela sert). Par l'estimation entre les espaces  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$  de la proposition **32.4**, on a aussi pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'existence de  $C_\varepsilon > 0$  tel que

$$\|u_n\|_{1,\alpha} \leq \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + C_\varepsilon \|u_n\|_{L^\infty}$$

Or, puisque  $0 \leq t_n q \leq M$ , le lemme **32.4** assure alors que

$$\|u_n\|_{L^\infty} \leq C(M) \|f\|_{L^\infty}$$

Ainsi, en se fixant  $\varepsilon > 0$  que l'on choisira par la suite :

$$\|u_n\|_{1,\alpha} \leq \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + C_\varepsilon C(M) \|f\|_{L^\infty}$$

Pour le deuxième terme, on utilise le théorème belge et le secret de l'analyse :

$$\|u_n''\|_{0,\alpha} \leq \|u_n'' - t_n q u_n\|_{0,\alpha} + t_n \|q u_n\|_{0,\alpha}$$

Le premier terme n'est autre que  $\|f\|_{0,\alpha}$ . Quand au deuxième, on fait apparaître  $M$  et on constate que  $t_n \leq 1$  :

$$\|u_n''\|_{0,\alpha} \leq \|f\|_{0,\alpha} + M \|u_n\|_{0,\alpha}$$

Or,  $\|u_n\|_{0,\alpha} \leq \|u_n\|_{1,\alpha}$  (on pourrait aussi s'en convaincre que c'est inférieur à  $\|\cdot\|_{2,\alpha}$ , mais cela ne nous aidera pas pour conclure), donc par l'estimation en fonction de  $\varepsilon$  :

$$\|u_n''\|_{0,\alpha} \leq \|f\|_{0,\alpha} + MC(M)C_\varepsilon \|f\|_{L^\infty} + \varepsilon M \|u_n\|_{2,\alpha}$$

Il ne reste plus qu'à tout remettre en place :

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{2,\alpha} &\leq \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + C_\varepsilon C(M) \|f\|_{L^\infty} \\ &\quad + \|f\|_{0,\alpha} + MC(M)C_\varepsilon \|f\|_{L^\infty} + \varepsilon M \|u_n\|_{2,\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(1 - \varepsilon - M\varepsilon) \|u_n\|_{2,\alpha} \leq \begin{aligned} &C_\varepsilon C(M) \|f\|_{L^\infty} + \|f\|_{0,\alpha} \\ &+ MC(M)C_\varepsilon \|f\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Le terme de droite est indépendant de  $n$ . Choisissons  $\varepsilon > 0$  assez petit tel que

$$1 - \varepsilon - M\varepsilon \geq \frac{1}{3}$$

Pour finalement avoir

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{2,\alpha} &\leq 3C_\varepsilon C(M) \|f\|_{L^\infty} + 3\|f\|_{0,\alpha} \\ &\quad + 3MC(M)C_\varepsilon \|f\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Ainsi, on a enfin bien réussi à montrer que  $(u_n)_n$  est bornée pour  $\|\cdot\|_{2,\alpha}$ .

▷ Soit  $0 < \alpha' < \alpha$ . L'application

$$\iota : \left( \mathcal{C}^{2,\alpha}([a, b]), \|\cdot\|_{2,\alpha} \right) \longrightarrow \left( \mathcal{C}^{2,\alpha'}([a, b]), \|\cdot\|_{2,\alpha'} \right)$$

est compacte : toute suite bornée de  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$  admet des valeurs d'adhérence pour la norme  $\mathcal{C}^{2,\alpha'}$ . Il existe alors  $u^* \in \mathcal{C}^{2,\alpha'}([a, b])$  et  $\phi$  une extractrice telle que

$$\|u_{\phi(n)} - u^*\|_{2,\alpha'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Alors  $u^* \in \mathcal{C}^{2,\alpha'}([a, b])$ . Pour cela, si  $M_2$  est un majorant de  $(u_n)_n$  pour la norme  $\|\cdot\|_{2,\alpha'}$ , on a :

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq M_2 |x - y|^\alpha$$

Idem pour ses dérivées. Un passage à la limite permet de conclure que  $u^* \in \mathcal{C}^{2,\alpha}$  (l'interversion limite dérivée provient des convergences uniformes des dérivées vers  $u^*$ ).

▷ Il suit alors, toujours par convergence uniforme, en passant à la limite dans

$$-u_n'' + t_n q u_n = f$$

que

$$-(u^*)'' + t^* q u^* = f$$

avec  $u^*(a) = u^*(b) = 0$ . Ainsi,  $t^* \in A$ . On a donc conclu à propos du caractère fermé de  $A$ .

**6.** On a fini la démonstration :  $A$  est non vide, ouvert et fermé dans le connexe  $[0, 1]$ . Il suit que  $A = [0, 1]$ . En particulier, pour  $1 \in A$ , on a démontré le théorème avec l'existence et l'unicité de solutions.  $\square$

### 33 Topologie engendrée, topologie produit, connexité d'une topologie produit

Référence : *Topologie générale*, Hervé QUEFFÉLEC

Plus qu'un résultat pouvant être inscrit dans une leçon, cette section est une section de révision de topologie générale.

Le cadre est le suivant. Soit  $I$  un ensemble,  $(Y_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques munie de la topologie  $\mathcal{T}_i$ ,  $X$  un ensemble et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille d'applications de  $X$  à valeurs dans  $Y_i$ . On souhaiterait définir le terme «  $f_i$  est continue », donc définir une structure d'espace topologique  $(X, \mathcal{T}_\Pi)$  ( $\Pi$  comme « produit ») telle que

$$\forall i \in I, \forall \Omega_i \in \mathcal{T}_i, f_i^{-1}(\Omega_i) \in \mathcal{T}_\Pi$$

Autrement dit, on voudrait une propriété du type

$$\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(\Omega_i) \in \mathcal{T}_\Pi$$

On considère alors la *topologie engendrée* par ces intersections finies.

### Définition 33.1

Soit  $X$  un ensemble. On considère  $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ . Alors la *topologie engendrée* par  $\Sigma$ , que l'on note  $\mathcal{T}(\Sigma)$ , est la plus petite topologie qui contient  $\Sigma$  :

$$\mathcal{T}(\Sigma) \stackrel{\text{déf.}}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \text{ topologie} \\ \Sigma \subset \mathcal{T}}} \mathcal{T}$$

On peut donner une description plus explicite de cette topologie :  $\mathcal{T}(\Sigma)$  est constituée des unions d'intersections finies d'éléments de  $\Sigma$  :

$$\mathcal{T}(\Sigma) = \left\{ \bigcup_{k \in K} \bigcap_{i \in I_k} S_i \mid \begin{array}{l} K \text{ ensemble quelconque} \\ \forall k \in K, \#I_k < \infty \\ S_i \in \Sigma \end{array} \right\}$$

avec la convention  $\bigcap_{\emptyset} = X$  et  $\bigcup_{\emptyset} = \emptyset$ .  $\Sigma$  est alors appelée *pseudo-base* de  $\mathcal{T}(\Sigma)$ .  $\Sigma$  est une *base* de cette topologie si tout ouvert de cette topologie s'écrit comme union (quelconque) d'éléments de  $\Sigma$ .

On définit alors la notion de topologie initiale.

### Définition 33.2

Soient  $X$  un ensemble,  $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques, et  $f_i : X \rightarrow Y_i$  des applications. On définit la *topologie initiale* pour les  $f_i$  par :

$$\mathcal{T}_f \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{T} \left( \left\{ \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(\Omega_j) \mid \begin{array}{l} J \subset I \\ \#J < +\infty \\ \Omega_j \in \mathcal{T}_j \end{array} \right\} \right)$$

Une *base* de cette topologie est alors donnée par ces intersections finies.

Cette topologie dépend de la famille  $(f_i)_{i \in I}$ . C'est la topologie la *moins fine* qui rende toutes les  $f_i$  continues : pour toute topologie  $\mathcal{T}'$  sur  $X$ , si pour tout  $\Omega_i \in \mathcal{T}_i$ ,  $f_i^{-1}(\Omega_i) \in \mathcal{T}'$ , alors  $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}'$ .

Ce résultat peut s'appliquer dans le cas des espaces topologiques produits. Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille d'ensemble, on définit son produit cartésien de la sorte :

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i \in I, f(i) \in X_i \right\}$$

Lorsque les  $(X_i)_{i \in I}$  sont des espaces topologiques munis d'une topologie  $\mathcal{T}_i$ , on souhaite munir  $\prod_{i \in I} X_i$  d'un espace topologique qui rende compte des propriétés topologiques de  $X_i$ . On définit les projections  $\pi_i$  sur produit  $\prod_{i \in I} X_i$  par :

$$\pi_i : \left( \begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} X_i & \longrightarrow & X_i \\ f & \longmapsto & f(i) \end{array} \right)$$

On pose alors pour  $X = \prod_{i \in I} X_i$  la *topologie produit*, que l'on note  $\mathcal{T}_\Pi$  ( $\Pi$  comme « produit ») comme étant la topologie initiale associée aux  $\pi_i$  :

$$\mathcal{T}_\Pi = \mathcal{T} \left( \left\{ \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(\Omega_j) \mid \begin{array}{l} \#J < \infty \\ J \subset I \\ \Omega_j \in \mathcal{T}_j \end{array} \right\} \right)$$

Munie de la topologie produit, montrons la propriété de connexité suivante.

**Proposition 33.1**

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques, munie des topologies  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout  $i \in I$ ,  $X_i$  est connexe ;
- (ii) Le produit  $\prod_{i \in I} X_i$  muni de la topologie produit est connexe.

On rappelle qu'un espace topologique  $X$  est connexe si et seulement si toute application  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{Z}$  continue pour la topologie de  $\mathbb{R}$  liée à la valeur absolue induite sur  $\mathbb{Z}$  (c'est aussi la topologie discrète sur  $\mathbb{Z}$ , donc c'est juste  $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ) est constante.

**Démonstration :** [(ii)  $\implies$  (i)] Supposons que  $\prod_{i \in I} X_i$  est connexe, pour la topologie produit. L'application  $\pi_i$  de projection est alors continue. De plus,

$$X_i = \pi_i \left( \prod_{j \in I} X_j \right)$$

L'image d'un espace connexe par une application continue est connexe. Donc  $X_i$  est connexe pour tout  $i \in I$ .

[(i)  $\implies$  (ii)] Supposons que pour tout  $i \in I$ ,  $X_i$  est connexe. Soit  $\varphi : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \mathbb{Z}$  une application continue. Soit  $a \in \prod_{i \in I} X_i$ . Par continuité de  $\varphi$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que

$$\forall x \in V, |\varphi(x) - \varphi(a)| < 1$$

Donc  $\varphi(x) = \varphi(a)$  sur  $V$ . Puisque  $V \in \mathcal{T}_\Pi$ , de base les intersections finies  $\bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(\Omega_j)$ , où  $\Omega_j \in \mathcal{T}_j$ ,  $V$  contient un ouvert de la forme

$$V \supset \left\{ \left( \prod_{j \in J} \Omega_j \right) \times \left( \prod_{i \notin J} X_i \right) \mid \#J < \infty \right\}$$

De sorte que

$$X = \left( \prod_{j \in J} X_j \right) \times \left( \prod_{i \notin J} X_i \right)$$

Quitte à réindexer, supposons que  $J = \llbracket 1, n \rrbracket$ . L'élément  $a \in \prod_{i \in I} X_i$  s'écrit  $a = (a_1, \dots, a_n, y)$ , avec  $y \in \prod_{j \notin J} X_j$ . L'application

$$\left( \begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x_1 & \longmapsto & \varphi(x_1, a_2, \dots, a_n, y) \end{array} \right)$$

est continue, et  $X_1$  est connexe, donc cette application est constante, donc égale à  $\varphi(a)$ . Ainsi,

$$\forall x \in X_1, \varphi(x_1, a_2, \dots, a_n, y) = \varphi(a)$$

De la même manière, c'est vrai pour toutes les applications  $x_k \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n, y)$ , pour tout  $x_i \in X_i$ . Ainsi, pour tout  $y \in \prod_{j \notin J} X_j$ ,

$$\left( \begin{array}{ccc} \prod_{j \in J} X_j & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \varphi(x_1, \dots, x_n, y) \end{array} \right)$$

est constante. Puisque  $\varphi$  est déjà constante sur  $V \supset \prod_{j \in J} \Omega_j \times \prod_{j \notin J} X_j$ ,  $\varphi$  est en fait constante sur tout  $X$ . Donc  $\prod_{i \in I} X_i$  est connexe.  $\square$

## 34 Équation de la chaleur en dimension 1

Référence : *Analyse pour l'agrégation*, Claude ZUILY, Hervé QUEFFÉLEC

**Théorème 34.1 : Équation de la chaleur en dimension 1**

Soit  $L > 0$ . On note  $Q \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} ]0, L[ \times ]0, +\infty[$ . Soit  $h \in \mathcal{C}^1([0, L])$  tel que  $h(0) = h(L) = 0$ . Alors il existe une unique fonction  $u \in \mathcal{C}^0(\bar{Q}) \cap \mathcal{C}^2(Q)$  telle que :

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u \text{ sur } Q \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ pour } t \geq 0 \\ u(x, 0) = h(x) \text{ sur } [0, L] \end{cases}$$

Elle est donnée par

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{L^2}\right)$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

On va faire une démonstration avec d'une part existence et d'autre part unicité. Pour l'unicité, on va montrer le lemme suivant.

**Lemme 34.1 : Principe du maximum pour l'équation de la chaleur**

Pour  $L > 0$ , on note  $Q = ]0, L[ \times ]0, +\infty[$ . Soit  $u \in \mathcal{C}^0(\bar{Q}) \cap \mathcal{C}^2(Q)$  telle que

$$(\partial_x^2 - \partial_t)u \geq 0$$

sur  $Q$ . Alors

$$\forall T > 0, \sup_{[0, L] \times [0, T]} u = \sup_{[0, L] \times [0, T] \cap \partial Q} u$$

**Démonstration du lemme :** On note  $P \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \partial_x^2 - \partial_t$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . On définit

$$\forall (x, t) \in Q, u_\varepsilon(x, t) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} u(x, t) + \varepsilon x^2$$

Soit  $T > 0$ . On note  $K \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} [0, L] \times [0, T]$ . Par cette définition de  $u_\varepsilon$ , on a alors

$$\sup_K u \leq \sup_K u_\varepsilon$$

et

$$\sup_K u_\varepsilon \leq \sup_K u + \varepsilon L^2$$

Montrons que

$$\sup_K u_\varepsilon = \sup_{K \cap \partial Q} u_\varepsilon$$

Sur  $Q$ , on a

$$P u_\varepsilon = P u + 2\varepsilon \geq 2\varepsilon$$

Puisque  $K$  est compact,  $u_\varepsilon$  admet un maximum qu'il atteint en un point que l'on nomme  $m_\varepsilon \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} (x_\varepsilon, t_\varepsilon)$  :

$$u_\varepsilon(m_\varepsilon) = \sup_{m \in K} u_\varepsilon(m)$$

On veut montrer que  $m_\varepsilon \in K \cap \partial Q$ . Supposons que cela ne soit pas le cas. Alors  $0 < x_\varepsilon < L$  et  $0 < t_\varepsilon \leq T$ . Puisque  $x_\varepsilon$  est dans un ouvert, et qu'il s'agit d'un point critique, on a

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(m_\varepsilon) = 0$$

Et puisqu'il s'agit d'un maximum,

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(m_\varepsilon) \leq 0$$

Puis, puisque  $t_\varepsilon > 0$ ,

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(m_\varepsilon) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon - h) - u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{-h}$$

Et puisque  $u_\varepsilon(m_\varepsilon)$  est le maximum de  $u_\varepsilon$  sur  $K$ , il suit que

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(m_\varepsilon) \geq 0$$

Ainsi,

$$Pu_\varepsilon(m_\varepsilon) \leq 0$$

Ce qui contredit  $Pu_\varepsilon \geq 2\varepsilon$ . Ainsi, on a bien  $m_\varepsilon \in K \cap \partial Q$ . On peut alors conclure. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$\sup_K u \leq \sup_K u_\varepsilon$$

D'après ce qu'on vient de montrer :

Montrons alors l'existence et l'unicité de la solution.

**Démonstration :** • Pour l'unicité, supposons que  $u$  et  $v$  sont solutions du problème posé dans le théorème 34.1. On note  $w = u - v$ . Alors  $w = 0$  sur  $\partial Q$  par les conditions au bord. De plus,  $Pw = 0$ , où  $P = \partial_x^2 - \partial_t$ . Par le principe du maximum, pour tout  $T > 0$  et  $K = [0, L] \times [0, T]$  :

$$\sup_K w = \sup_{K \cap \partial Q} w = 0$$

D'où  $w \leq 0$  sur  $[0, L] \times [0, T]$ . Or,  $P(-w) = 0$ , et le même principe du maximum donne  $w \geq 0$  sur  $[0, L] \times [0, T]$ . Ainsi, pour tout  $T > 0$ ,  $w = 0$  sur  $[0, L] \times [0, T]$ , donc  $w = 0$  sur  $\bar{Q}$ , donc  $u = v$  sur  $\bar{Q}$ , d'où l'unicité de la solution.

• Pour l'existence, on pourrait se contenter de vérifier que la solution donnée dans l'énoncé est bien solution en utilisant les théorèmes de Fubini et de dérivation sous les symboles de sommation. On conclura de la sorte après avoir expliqué la phase d'analyse qui mène à cette solution.

1. L'idée ici est de chercher une solution découplée en espace et en temps. Autrement dit, on cherche  $u$  de la forme

$$u(x, t) = f(x)g(t)$$

avec  $f, g$  de régularité quelconque pour l'instant. Alors sur  $Q$ , on a :

$$f(x)g'(t) = f''(x)g(t)$$

Supposons que  $f$  ne s'annule pas sur  $]0, L[$  et que  $g$  ne s'annule pas sur  $]0, +\infty[$ . Alors pour tout  $(x, t) \in Q$  :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda \in \mathbb{R}$$

On obtient alors les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} f''(x) = \lambda f(x) \\ g'(t) = \lambda g(t) \end{cases}$$

2. Supposons que la solution recherchée  $u$  est une autre solution que la solution nulle. Montrons que  $\lambda < 0$ . Si  $\lambda \geq 0$ , alors l'équation en  $f$  donne une solution du type

$$\sup_K u = \sup_{K \cap \partial Q} u_\varepsilon$$

Et par la définition de  $u_\varepsilon$  :

$$\sup_K u \leq \sup_{K \cap \partial Q} u + \varepsilon L^2$$

D'où

$$\sup_K u \leq \sup_{K \cap \partial Q} u$$

Ce qui conclut. □

$$f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

La condition au bord  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  se traduit par :

$$u(0, t) = g(t)f(0) = g(t)(A + B) = 0$$

soit, puisque  $g$  n'est pas la fonction nulle,

$$A + B = 0$$

Puis

$$u(L, t) = Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 0$$

$L$  étant non nul, il suit que  $A = B = 0$ , donc  $f = 0$ , ce qui contredit le fait que l'on recherche une solution non identiquement nulle.

Si  $\lambda = 0$ , alors  $f(x) = Ax + B$ , et ces mêmes conditions au bord donnent  $A = B = 0$ . Finalement, il ne reste plus que  $\lambda < 0$ .

3. Puisque  $\lambda < 0$ , il suit que  $f$  est de la forme

$$f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ . Puisque  $f(0) = 0$ , alors  $A = 0$ . Pour éviter que  $f$  soit la solution nulle, on suppose  $B \neq 0$ . La condition  $f(L) = 0$  impose que

$$B \sin(kL) = 0$$

d'où  $k = \frac{n\pi}{L}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Petit souci :  $f(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  peut s'annuler, et la condition  $u(x, 0) = h(x)$  n'est pas possible en général ici. La résolution par rapport à  $g$  ne pose pas de problèmes,  $g$  ne s'annule pas, et est donnée par

$$g(t) = g(0)e^{-k^2 t}$$

4. On a alors une famille de solution pour l'équation de la chaleur avec la première condition de bord respectée.

Pour conclure sur la deuxième, constatons qu'une combinaison linéaire de solutions est solution ici. On note pour  $(b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  :

$$u_n(x, t) \stackrel{\text{déf.}}{=} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{L^2}\right)$$

L'idée est de déterminer une solution de la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, t)$$

Si  $u$  est solution, alors

$$h(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Autrement dit, on se retrouve face à un développement en série de FOURIER de  $h$ , si  $h$  est impaire,  $2L$ -périodique. Or, on a supposé  $h$  de classe  $C^1$  sur  $[0, L]$ , donc on peut construire  $h_1(x) = -h(-x)$  pour  $[-L, 0]$  qui prolonge  $h$  et la rend impaire. Puisque  $h_1(-L) = h_1(L) = 0$ , on peut prolonger  $h$  sur  $\mathbb{R}$  par  $2L$ -périodisation en une fonction continue et  $C^1$  par morceaux. Alors sur  $\mathbb{R}$ , en notant  $\tilde{h}$  la fonction prolongée, on a :

$$\tilde{h}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Le terme en 0 est nul puisque  $h(0) = 0$ , et l'imparité de  $h$  permet de conclure qu'en des coefficients en sinus.  $b_n$  est donné par le  $n$ -ème coefficient de Fourier dans le cas réel impair :

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

5. Les coefficients  $(b_n)_n$  étant contruits, on définit alors sur  $\bar{Q}$  :

$$u(x, t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{L^2}\right)$$

Puisque  $h$  est continue, et  $C^1$  par morceaux, on a  $\sum_n |b_n| < +\infty$ , ce qui montre la convergence normale de  $u$  sur  $\bar{Q}$ , donc sa continuité. Elle est même de classe  $C^\infty$  sur  $Q$ , par convergence normale sur  $\bar{Q}$  des dérivées de  $u$ . (Dans ce cadre  $u$  est de classe  $C^2$  si et seulement si  $u$  admet des dérivées partielles à l'ordre 2 continues).  $u$  vérifie alors l'équation de la chaleur, grâce aux théorèmes de dérivation sous les symboles de sommation. De plus,  $u$  vérifie aussi les conditions au bord. On a bien montré l'existence d'une fonction  $u$  continue sur  $\bar{Q}$  et de classe  $C^2$  sur  $Q$ . □

## 35 Méthode de Newton pour une fonction convexe croissante

Référence : *Petit guide de calcul différentiel*, François ROUVIÈRE

### Théorème 35.1 : Méthode de NEWTON

Soient  $a < b$ ,  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ . On suppose que  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$  et  $f'(x) > 0$  sur  $[a, b]$ . On note  $x^*$  l'unique zéro de  $f$  sur  $[a, b]$ . On définit la suite pour  $x_0 \in [a, b]$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \stackrel{\text{déf.}}{=} x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = F(x_n)$$

On suppose enfin que  $f''$  est strictement positive sur  $[a, b]$ . Alors, pour tout  $x_0 \in [x^*, b]$ , la suite  $(x_n)_n$  converge géométriquement à l'ordre 2 :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2$$

De plus, on a un équivalent de l'erreur :

$$x_{n+1} - x^* \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} (x_n - x^*)^2$$

**Démonstration : 1.** Constatons que puisque  $f$  est continue, avec  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ , le théorème des valeurs intermédiaires nous fournit un élément  $x^* \in ]a, b[$  tel que  $f(x^*) = 0$ . De plus, puisque  $f' > 0$  sur  $[a, b]$ ,  $f$  est strictement croissante, donc injective. Ainsi,  $x^*$  est bien unique.

**2.** Soit  $x \in [a, b]$ . D'après le théorème de Taylor-Lagrange, centré en  $x^*$ , il existe  $\xi \in ]x^*, x[$  ou  $]x, x^*[$  tel que

$$f(x^*) = f(x) + (x^* - x)f'(x) + \frac{(x - x^*)^2}{2}f''(\xi)$$

Or,  $f(x^*) = 0$ . Il suit que, puisque sur  $[a, b]$  :

$$F(x) - x^* = \frac{-f(x) + f'(x)(x - x^*)}{f'(x)}$$

Alors

$$F(x) - x^* = \frac{(x - x^*)^2 f''(\xi)}{2f'(x)}$$

On en déduit que puisque  $f'$  est continue et strictement positive sur le compact  $[a, b]$ ,  $f'$  admet un minimum, et cette valeur minimum est non nulle. Pour  $f''$ , la continuité de  $f''$  sur le compact  $[a, b]$  assure que  $f''$  admet un maximum atteint. Il suit que pour tout  $x \in [a, b]$  :

$$|F(x) - x^*| \leq C|x - x^*|^2$$

**3.** Notons  $I = [x^*, b]$ . Montrons que  $[x^*, b]$  est stable par  $F$ . Pour cela, il s'agit d'observer que si  $x \in [x^*, b]$ , alors

$$F(x) - x^* = x - x^* - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

avec  $f \geq 0$  sur  $[x^*, x]$  et  $f' > 0$ , donc

$$F(x) - x^* \leq x - x^*$$

Puis, par le calcul fait en **2.**,

$$F(x) - x^* = \frac{(x - x^*)^2 f''(\xi)}{f'(x)}$$

On a supposé que  $f''$  est strictement positif, tout comme  $f'$ , donc

$$F(x) - x^* \geq 0$$

D'où

$$x^* \leq F(x) \leq x \leq b$$

**4.** Montrons que la suite  $(x_n)_n$  converge vers  $x^*$  si  $x_0 \in I$ . Si  $x_0 = x^*$ , alors la suite  $(x_n)_n$  est constante égale à  $x^*$ , donc converge effectivement vers  $x^*$ . Supposons que  $x_0 \in ]x^*, b]$ . Alors  $f(x_n) > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et donc

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$$

donc  $(x_n)_n$  est strictement décroissante, minorée par  $x^*$ , donc converge. De plus, l'unique point fixe de  $F$  est  $x^*$ , donc  $(x_n)_n$  converge vers  $x^*$ . De plus,

$$|F(x_n) - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2$$

donc

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2$$

Soit encore

$$0 \leq x_{n+1} - x^* \leq C(x_n - x^*)^2$$

d'où la convergence géométrique.

**5.** Quand à l'équivalent, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$x_{n+1} - x^* = \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(x_n - x^*)^2$$

avec  $\xi_n \in ]x^*, x_n[$ , donc converge vers  $x^*$ . Puisque  $x_n \neq x^*$ , il suit que

$$x_{n+1} - x^* \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}(x_n - x^*)^2$$

□

### Corollaire 35.1 : Application à l'approximation d'une racine carrée

On considère  $a > 0$ , et  $(x_n)_n$  une suite provenant de la méthode de NEWTON pour  $f(x) = x^2 - a$ . On a une estimation de l'erreur donnée par, lorsque  $x_0 > \sqrt{a}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x_n - a \leq 2\sqrt{a} \left( \frac{x_0 - a}{2\sqrt{a}} \right)^{2^n}$$

**Démonstration :**  $f$  est strictement convexe, de classe  $C^\infty$ , et vérifie même  $f'' > 0$  sur  $\mathbb{R}$ . Sa dérivée est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$ . Plaçons nous sur le compact  $[1, a+1]$  pour être dans le cadre du théorème. Alors  $F$  vérifie

$$F(x) = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{1}{2} \left( x - \frac{a}{x} \right)$$

et, guidé par la démonstration précédente

$$F(x) - \sqrt{a} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x}$$

De plus, par exemple en itérant la méthode sur  $[-a - 1, -1]$  et par un changement de variables, on se retrouve avec

$$F(x) + \sqrt{a} = \frac{(x + \sqrt{a})^2}{2x}$$

D'où

$$\frac{F(x) + \sqrt{a}}{F(x) - \sqrt{a}} = \left( \frac{x + \sqrt{a}}{x - \sqrt{a}} \right)^2$$

Et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = \left( \frac{x_0 - a}{x_0 + a} \right)^{2^n}$$

Soit, en réorganisant,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = \left( 1 + \frac{2\sqrt{a}}{x_0 - \sqrt{a}} \right)^{2^n}$$

Par un développement du binôme, il suit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} \geq 1 + \left( \frac{2\sqrt{a}}{x_0 - \sqrt{a}} \right)^{2^n}$$

En réorganisant de la sorte pour le membre de gauche, il suit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{2\sqrt{a}}{x_n - \sqrt{a}} \geq \left( \frac{2\sqrt{a}}{x_0 - \sqrt{a}} \right)^{2^n}$$

D'où l'estimation finale, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$0 < x_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a} \left( \frac{x_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \right)^{2^n}$$

□

## 36 Une condition de convergence sur un segment

Référence : *Oraux X-ENS, Analyse 1*, S. FRANCINO, H. GIANELLA, S. NICOLAS

### Proposition 36.1

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], [0, 1])$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La suite  $(u_n)_n$  définie par récurrence par :  $u_0 \in [0, 1]$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

converge.

(ii) La différence entre chaque terme tend vers 0 :

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La propriété est fausse en général :  $\sum_n \frac{1}{n}$  en témoigne.

On notera  $\omega(u)$  l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $u$ .

**Démonstration :** [(i)  $\implies$  (ii)] Si  $(u_n)_n$  converge vers  $\ell$ , alors par linéarité de la limite,

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0$$

[(ii)  $\implies$  (i)] Supposons que la différence des termes tende vers 0. Puisque  $(u_n)_n$  est bornée, le théorème Bolzano Weierstrass assure l'existence d'une valeur d'adhérence. Montrons qu'elle est unique. Pour cela, on suppose que  $\alpha < \beta$  sont deux valeurs d'adhérence de  $u$ .

• Montrons que  $]\alpha, \beta[ \subset \omega(u)$ . Autrement dit, pour  $\ell \in ]\alpha, \beta[$ , montrons que pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout entier  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\exists n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Quitte à réduire  $\varepsilon$ , supposons que

$$\alpha < \ell - 2\varepsilon < \ell + 2\varepsilon < \beta$$

(le résultat tient si on remplace tous les  $\varepsilon$  de ce point par  $k\varepsilon$  avec  $k$  suffisamment petit). Par hypothèse de convergence de  $(u_{n+1} - u_n)_n$ , il existe un rang  $N_0$  à partir duquel

$$\forall n \geq N_0, |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$$

On définit  $N_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \max(N, N_0)$ . Puisque  $\alpha \in \omega(u)$ , il existe un rang  $N_2 \geq N_1$  tel que

$$|u_{N_2} - \alpha| \leq \varepsilon$$

Ainsi,

$$u_{N_2} \leq \varepsilon + \alpha < \ell - \varepsilon$$

Puisque  $\beta \in \omega(u)$ , il existe  $N_3 \geq N_2$  tel que

$$u_{N_3} \geq \beta - \varepsilon > \ell + \varepsilon$$

On peut alors définir l'entier qui permettra de conclure que  $\ell$  est valeur d'adhérence :

$$n \stackrel{\text{déf.}}{=} \max \{p \in \llbracket N_2, N_3 \rrbracket, u_p < \ell - \varepsilon\}$$

$n$  est bien défini et fini car il s'agit d'un maximum d'une partie finie non vide ( $N_2$  est dans cet ensemble). Alors

$$u_{n+1} \geq \ell + \varepsilon$$

De plus, par hypothèse de convergence, puisque  $n \geq N_0$ ,

$$u_{n+1} \leq u_n + |u_{n+1} - u_n| \leq u_n + \varepsilon < \ell$$

Il suit que  $u_{n+1} \in [\ell - \varepsilon, \ell]$ , ou encore

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \varepsilon$$

donc  $\ell$  est bien valeur d'adhérence de  $u$ .

• Montrons que toute valeur d'adhérence de  $u$  est point fixe de  $f$ . Pour cela, si  $\ell \in \omega(u)$  alors il existe une extractrice  $\phi$  telle que

$$u_{\phi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

Or,

$$u_{\phi(n)+1} - u_{\phi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Soit encore

$$f(u_{\phi(n)}) - u_{\phi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

d'où  $f(\ell) = \ell$ .

• Puisque  $\frac{\alpha+\beta}{2}$  est valeur d'adhérence de  $u$ , il existe un entier  $n_0$  tel que

$$u_{n_0} \in [\alpha, \beta]$$

Puisque  $\omega(u)$  est inclus dans l'ensemble des points fixes de  $f$ , il suit que  $f(u_{n_0}) = u_{n_0}$ , et par récurrence,

$$\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$$

La suite  $(u_n)_n$  converge donc. Cela contredit le fait que  $\alpha < \beta$ .

• On a donc montré par l'absurde que  $u$  n'admet qu'une seule valeur d'adhérence, donc  $u$  converge. □

## 37 Critère de Weyl

Référence : *Oraux X-ENS, Analyse 2*, S. FRANCINO, H. GIANELLA, S. NICOLAS

### Proposition 37.1 : Première caractérisation de l'équirépartition

Pour toute suite  $(u_n)_n \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ , on note

$$\forall a \leq b, \forall n \in \mathbb{N}, X_n(a, b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \#\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k \in [a, b]\}$$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout  $a \leq b$ ,

$$\frac{X_n(a, b)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b - a$$

(ii) Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f(t) dt$$

Dans ce cas, la suite  $(u_n)_n$  est dite *équirépartie*.

**Démonstration :** [(i)  $\implies$  (ii)] Observons que par définition de  $X_n$ ,

$$\frac{X_n(a, b)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a, b]}(u_k)$$

Pour toute fonction étagée, donc du type  $\sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbf{1}_{[a_k, b_k]}$ , avec  $[a_k, b_k]$  disjoints deux à deux, la linéarité de la limite de l'intégrale et de la somme permet d'assurer le résultat souhaité.

De plus, toute fonction continue sur  $[0, 1]$  est limite uniforme de fonctions en escalier. Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $g$  en escalier telle que

$$\|f - g\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$$

On note

$$\Delta_n(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) - \int_0^1 f(t) dt \right|$$

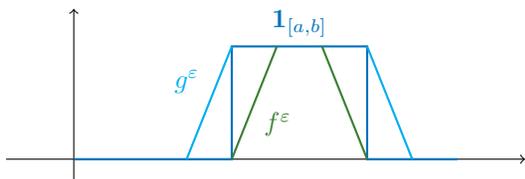
Alors, par découpage avec l'inégalité triangulaire,

$$\Delta_n(f) \leq 2\varepsilon + \Delta_n(g)$$

Le deuxième terme est plus petit que  $\varepsilon$  pour  $n$  assez grand. Ainsi, on a bien

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

[(ii)  $\implies$  (i)] On veut montrer le résultat pour  $f = \mathbf{1}_{[a, b]}$ , mais qui n'est pas continue. Qu'à cela ne tienne! On approche  $\mathbf{1}_{[a, b]}$  par deux fonctions continues. Soit  $\varepsilon > 0$ .



On dispose d'un critère plus utile pour des calculs explicites.

**Proposition 37.2 : Critère de WEYL (1916)**

Soit  $(u_n)_n \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(u_n)_n$  est équirépartie ;
- (ii) Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2ik\pi pu_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

**Démonstration :** [(i)  $\implies$  (ii)] Le résultat est vrai en prenant  $f = \cos$ , puis  $f = \sin$  et conclure linéarité de la limite avec  $f = \cos + i \sin$ .

Il existe  $f^\varepsilon$  et  $g^\varepsilon$  continues telles que

$$f^\varepsilon \leq \mathbf{1}_{[a, b]} \leq g^\varepsilon$$

Puis

$$\int_0^1 \mathbf{1}_{[a, b]} - f^\varepsilon = \varepsilon$$

et

$$\int_0^1 g^\varepsilon - \mathbf{1}_{[a, b]} = \varepsilon$$

Ainsi construits, il ne reste plus à écrire :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^\varepsilon(u_k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a, b]}(u_k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g^\varepsilon(u_k)$$

Or, le terme de gauche converge par hypothèse vers  $\int_0^1 f^\varepsilon = b - a - \varepsilon$ , et celui de droite vers  $\int_0^1 g^\varepsilon = b - a + \varepsilon$ . Ainsi, il existe un rang à partir duquel

$$b - a - 2\varepsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a, b]}(u_k) \leq b - a + 2\varepsilon$$

(atterrissage en douceur). Il suit donc que

$$\frac{X_n(a, b)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b - a$$

□

[(ii)  $\implies$  (i)] C'est une application du théorème de Weierstrass trigonométrique. Soit  $\varepsilon > 0$ . Si  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ , il existe un polynôme trigonométrique  $P$  tel que

$$\|f - P\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$$

Or, pour tout polynôme trigonométrique, par hypothèse

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Il suit, en notant

On peut appliquer ce résultat à la suite  $(n\alpha)_n$  pour  $\alpha$  irrationnel, pour retrouver le même résultat qu'à la section 27.

**Proposition 37.3 : Densité de trajectoire sur le cercle**

La suite  $(\{n\alpha\})_{n \in \mathbb{N}}$  est équirépartie sur  $[0, 1]$  si et seulement si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , où  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ .

**Démonstration :** • Supposons  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . Alors pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on peut calculer la somme géométrique :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi pk\alpha} = \frac{e^{2i\pi p\alpha}}{n} \frac{1 - e^{2i\pi p(n+1)\alpha}}{1 - e^{2i\pi p\alpha}}$$

Le premier facteur tend vers 0, l'autre est borné, puisque  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi pk\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Delta_n(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) - \int_0^1 f(t) dt \right|$$

$$\Delta_n(f) \leq 2\varepsilon + \Delta_n(P) \leq 3\varepsilon$$

pour  $n$  assez grand. Donc, par le critère (ii) de la proposition précédente,  $(u_n)_n$  est équirépartie. □

donc la suite  $(\{n\alpha\})_n$  est équirépartie.

• Pour  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , alors  $\alpha = \frac{p}{q}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\{(n+q)\alpha\} = \{n\alpha + p\} = \{n\alpha\}$$

donc la suite  $(\{n\alpha\})_n$  est périodique, donc par le point (i) de l'équirépartition, la suite ne peut être équirépartie. □

Une des conséquences de l'équirépartition est la densité de  $(u_k)_k$  sur  $[0, 1]$  (ou sur  $[a, b]$  plus généralement), on retrouve donc bien le résultat sur la trajectoire sur le cercle.

### 38 Densité des fonctions continues nulle part dérivables

Référence : *Analyse pour l'agrégation*, Claude ZUILY, Hervé QUEFFÉLEC

**Proposition 38.1**

On note  $A$  l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$  nulle part dérivable. Alors  $A$  contient un ensemble  $G_\delta$ -dense pour la norme  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  : *id est*  $A$  contient une intersection dénombrable d'ouverts denses dans  $\mathcal{C}^0([0, 1])$ .

En conséquence, puisque  $\mathcal{C}^0([0, 1])$  muni de la norme infini est complet, le théorème de BAIRE nous indique que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables sont denses dans  $\mathcal{C}^0([0, 1])$ .

**Démonstration :** On va montrer ce résultat en passant au complémentaire. Si  $B = \mathcal{C}_{\mathcal{C}^0([0,1])} A$ , montrons qu'il existe une suite de fermés  $(F_n)_n$  d'intérieur vide tels que  $B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ . Par définition,  $B$  est l'ensemble des fonctions qui sont dérivables en au moins un point. Si  $f \in B$ , alors  $f$  est dérivable en un certain  $x_0 \in [0, 1]$ , et l'application

$$h \mapsto \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$$

est bornée. Le chemin est tout tracé, on note alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$F_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \left| \begin{array}{l} \exists x \in [0,1], \\ \forall y \in [0,1], \\ |f(y) - f(x)| \leq n|x - y| \end{array} \right. \right\}$$

Alors  $B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrons que  $F_n$  est fermé, et d'intérieur vide.

• Montrons que  $F_n$  est fermé. On utilise pour cela une caractérisation séquentielle. On considère  $(f_k)_k \in F_n^{\mathbb{N}}$  une suite qui converge vers  $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$  pour la norme de la convergence uniforme. Par définition de  $F_n$ , on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  l'existence de  $x_k \in [0,1]$  tel que

$$\forall y \in [0,1], |f_k(y) - f_k(x_k)| \leq n|y - x_k|$$

Puisque  $(x_k)_k$  est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass nous fournit une extraction  $\phi$  telle que  $(x_{\phi(k)})_k$  converge. On note encore cette suite  $(x_k)$ . On note  $x_0$  la limite de cette suite. Montrons que

$$\forall y \in [0,1], |f(x_0) - f(y)| \leq n|x_0 - y|$$

Pour cela, on fait le découpage suivant, pour  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(y)| &\leq |f(x_0) - f(x_k)| \\ &+ |f(x_k) - f_k(x_k)| \\ &+ |f_k(x_k) - f_k(y)| \\ &+ |f_k(y) - f(y)| \end{aligned}$$

Les deuxième et quatrième termes se majorent par  $\|f - f_k\|_{L^\infty}$ . Le premier se contrôlera par caractérisation séquentielle de la limite. Quand au troisième, on utilise le fait que  $f_k \in F_n$ . Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(y)| &\leq |f(x_0) - f(x_k)| \\ &+ 2\|f - f_k\|_{L^\infty} \\ &+ n|x_k - y| \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un rang  $N_1$  tel que

$$\forall k \geq N_1, \|f - f_k\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$$

Il existe un rang  $N_2$  tel que

$$\forall k \geq N_2, |x_0 - x_k| \leq \varepsilon$$

Il existe enfin un rang  $N_3$  tel que

$$\forall k \geq N_3, |f(x_0) - f(x_k)| \leq \varepsilon$$

Par inégalité triangulaire, on a aussi pour  $k \geq N_2$

$$|x_k - y| \leq \varepsilon + |y - x_0|$$

D'où finalement, pour  $k \geq \max(N_i)$  :

$$|f(x_0) - f(y)| \leq (3 + n)\varepsilon + n|x_0 - y|$$

Ce qui est indépendant de  $k$  et vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , d'où  $f \in F_n$ .  $F_n$  est donc bien fermé dans  $\mathcal{C}^0([0,1])$ .

• Montrons que  $F_n$  est d'intérieur vide *id est* pour tout  $f \in F_n$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathcal{C}^0([0,1]) \cap B(f, \varepsilon) \neq \emptyset$$

On se fixe  $f$  et  $\varepsilon$ . On cherche à déterminer  $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$  telle que  $\|f - g\|_{L^\infty} < \varepsilon$  et

$$\forall x \in [0,1], \exists y \in [0,1], |g(x) - g(y)| \geq (n+1)|x - y|$$

Partons pour cela du théorème de Weierstrass : il existe une fonction polynomiale  $P$  telle que

$$\|f - P\|_{L^\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$$

On veut poser  $g = P + g_0$ . Pour assurer les conditions sur  $g$ , on souhaite que  $g_0$  soit de norme  $\frac{\varepsilon}{4}$ , pour avoir  $\|f - g\|_{L^\infty} < \varepsilon$ , et que pour tout  $x \in [0,1]$ , il existe  $y \in [0,1]$  tel que

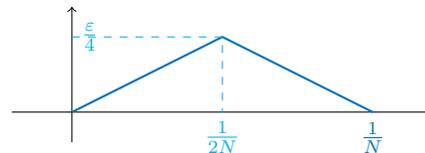
$$|g_0(x) - g_0(y)| \geq \left( n + 1 - \sup_{x \in [0,1]} |P'| \right) |x - y|$$

Pour avoir

$$|g(x) - g(y)| \geq \left( n + 1 - \sup_{x \in [0,1]} |P'| + \sup_{x \in [0,1]} |P'| \right) |x - y|$$

On cherche donc à l'aide du théorème des accroissements finis une fonction de dérivée supérieure à  $M + n + 1$  où  $M$  désigne  $\sup_{[0,1]} |P'|$ . Proposons alors la fonction  $g_0$  suivante : une fonction en pic que l'on périodise. Pour assurer la bonne estimation de la dérivée, on se donne  $N \in \mathbb{N}^*$ , et on définit la partie principale de  $g_0$  sur  $[0, \frac{1}{N}]$  par :

$$g_0(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon N}{2}x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2N}] \\ \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon N}{2}x & \text{si } x \in [\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}] \end{cases}$$



$g_0$  est dérivable sauf en un nombre fini de points, et là où elle est dérivable, on a :

$$|g'_0(x)| = \frac{\varepsilon N}{2}$$

D'après le théorème des accroissements finis, pour tout  $x \in [0,1]$ , il existe  $y \in [0,1]$  et  $c \in ]0,1[$  tels que

$$g_0(x) - g_0(y) = g'_0(c)(x - y)$$

Notons enfin que  $\|g_0\|_{L^\infty} = \frac{\varepsilon}{4}$ . On définit donc comme voulu  $g = P + g_0$ . Alors

$$\|f - g\|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

donc  $g \in B(f, \varepsilon)$ . Puis,  $g \in \mathcal{C}^0([0,1])_{F_n}$ . En effet, par inégalité triangulaire inversée, pour tout  $x, y \in [0, 1]$ ,

$$|g(x) - g(y)| \geq |g_0(x) - g_0(y)| - |P(x) - P(y)|$$

Par l'égalité des accroissements finis décrites auparavant, pour tout  $x \in [0, 1]$ , il existe  $y \in [0, 1]$  tel que

$$|g(x) - g(y)| \geq \frac{\varepsilon N}{2} |x - y| - |P(x) - P(y)|$$

Et par l'inégalité des accroissements finis pour  $P$  :

$$|g(x) - g(y)| \geq \left( \frac{\varepsilon N}{2} - M \right) |x - y|$$

On choisit alors  $N$  tel que

$$\frac{\varepsilon N}{2} - M \geq n + 1$$

(un choix de  $N$  construit la fonction  $g_0$  qui construit  $g$ , donc il aurait fallu dire il y a une dizaine de lignes "soit  $N \geq \frac{2(n+1+M)}{\varepsilon}$ ", mais cela aurait-il été plus clair?). Il suit que pour tout  $x \in [0, 1]$ , il existe  $y \in [0, 1]$  tel que

$$|g(x) - g(y)| \geq (n + 1)|x - y|$$

donc  $g \in \mathcal{C}^0([0,1])_{F_n}$ . Il suit alors que  $\overset{\circ}{F}_n = \emptyset$ .

• Concluons. On a montré que  $B$ , le complémentaire de  $A$ , est inclus dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide. Donc  $A$  contient une intersection d'ouverts denses. □

### 39 Inégalité de Hadamard par les extrema liés

Référence : *Petit guide de calcul différentiel*, François ROUVIÈRE

#### Proposition 39.1 : Inégalité de HADAMARD

Soient  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ . Alors

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|v_k\|$$

avec égalité si et seulement si l'un des vecteurs est nul ou la famille des vecteurs est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .

**Démonstration :** On se place sur le sous-variété de  $(\mathbb{R}^n)^n$  :

$$X = \bigcap_{k=1}^n \{ \|v_k\|^2 - 1 = 0 \}$$

$X$  est compact. Ainsi, il existe une famille  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  telle que

$$\det(v_1^*, \dots, v_n^*) = \max_X \det$$

Et puisque  $I_n \in X$  vérifie  $\det(I_n) = 1$ , il suit que

$$1 \leq \det(v_1^*, \dots, v_n^*)$$

En notant

$$g_i(v_1, \dots, v_n) = \|v_i\|^2 - 1$$

on a pour  $v \in (\mathbb{R}^n)^n$  et  $h \in (\mathbb{R}^n)^n$  :

$$dg_i(v) \cdot h = 2\langle v_i, h_i \rangle$$

Pour tout  $v \in (\mathbb{R}^n)^n$ , la famille  $(dg_i(v))_{1 \leq i \leq n}$  est libre. Par le théorème des extrema liés, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tel que

$$df(v^*) = \sum_{k=1}^n \lambda_k dg_k(v^*)$$

où  $f = \det$ . Ainsi, pour  $h \in (\mathbb{R}^n)^n$  :

$$df(v^*) \cdot h = 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle h_k, v_k^* \rangle$$

En appliquant le résultat à  $h = (0, \cdot, h_i, \cdot, 0)$ , on a par  $n$ -linéarité de  $f$  :

$$df(v^*) \cdot h = f(v_1^*, \dots, h_i, \dots, v_n^*)$$

Et donc

$$f(v_1^*, \dots, h_i, \dots, v_n^*) = 2\lambda_i \langle h_i, v_i^* \rangle$$

Soit, avec  $h_i = v_i^* : :$

$$\det(v^*) = 2\lambda_i \|v_i\|^2 \geq 1$$

donc  $\lambda_i \neq 0$ . En appliquant  $h_i = v_j^*$  avec  $i \neq j$ , il suit que

$$0 = 2\lambda_i \langle v_i^*, v_j^* \rangle$$

avec  $\lambda_i \neq 0$ , donc la famille  $v^*$  est une famille orthogonale. Puisque chaque vecteur de  $v^*$  est de norme 1, la famille est orthonormée, et donc  $\det(v^*) = 1$ . Il suit que

$$\max_X \det = 1$$

Ce maximum est atteint pour une famille orthonormée directe. Ainsi, pour tout famille de vecteurs  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  de vecteurs non nuls :

$$\det \left( \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right) \leq 1$$

Donc par  $n$ -linéarité :

$$\det(v_1, \dots, v_n) \leq \prod_{k=1}^n \|v_k\|$$

avec égalité si l'un des vecteurs est nul, ou la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est orthonormée directe. De même si on échange  $v_1$  avec  $-v_1$ , on obtient finalement :

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|v_k\|$$

avec égalité si et seulement si  $(v_1, \dots, v_n)$  est orthonormée, ou l'un des vecteurs est nul.  $\square$

## 40 Théorèmes de Dini

Référence : *Les maths en tête : Analyse*, Xavier GOURDON.

Les deux théorèmes ont des énoncés très similaires, mais n'ont pas du tout la même démonstration. L'une est une application du théorème de HEINE, et l'autre du théorème des compacts emboîtés.

### Proposition 40.1 : Premier théorème de DINI

Soient  $(f_n)_n$  une suite croissante de fonctions réelles définies sur  $[a, b]$  :

$$\forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

On suppose que  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $[a, b]$  vers une fonction continue  $f$ . Alors  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$ .

**Démonstration :** Soit  $\varepsilon > 0$ . On souhaite montrer l'existence d'un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

On s'intéresse pour cela au complémentaire de ce fait : on note pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$F_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in [a, b], f(x) \geq f_n(x) + \varepsilon\}$$

Par continuité de  $f_n$  et  $f$ ,  $F_n$  est fermé, et borné dans  $\mathbb{R}$ , donc est compact. De plus, par croissance de la suite  $(f_n)_n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n$$

Enfin, par convergence simple de  $(f_n)_n$ , pour tout  $x \in [a, b]$ , il existe un rang  $N_x \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N_x, f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon$$

donc  $x \notin F_{N_x}$ .

Autrement dit :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$$

Sinon, si  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ , alors  $\forall N \in \mathbb{N}, x \in F_n$ , ce qui contredit  $x \notin F_{N_x}$ . Or, d'après le théorème des compacts emboîtés, si chaque  $F_n$  est non vide, alors par décroissance des compacts  $F_n$ ,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ . Par contraposée, il suit

$$\exists N \in \mathbb{N}, F_N = \emptyset$$

Soit, par décroissance :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, F_n = \emptyset$$

Donc il existe un rang  $N$  tel que

$$\forall n \geq N, \forall x \in [a, b], f(x) - f_n(x) < \varepsilon$$

Et par croissance de la suite  $(f_n)_n$  :

Ce qui signifie que  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ . □

$$\forall n \geq N, \forall x \in [a, b], 0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon$$

**Proposition 40.2 : Second théorème de DINI**

Soient  $(f_n)_n$  une suite de fonctions croissantes réelles définies sur  $[a, b]$  :

$$\forall x \leq y \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \leq f_n(y)$$

On suppose que  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $[a, b]$  vers une fonction continue  $f$ . Alors  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$ .

**Démonstration :** Par convergence simple de fonctions croissantes,  $f$  est croissante.  $f$  est de plus continue sur  $[a, b]$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par le théorème de Heine, il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x, y \in [a, b]$  :

$$|x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit  $M \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\lfloor \frac{b-a}{\eta} + 1 \right\rfloor$ , un entier tel que

$$\eta > \frac{b-a}{M}$$

On considère enfin une subdivision régulière de  $[a, b]$  de pas  $\frac{b-a}{M} < \eta$ , donné par  $x_0 = a$ , puis

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{M}$$

et  $x_M = b$ . Alors  $x_{k+1} - x_k < \eta$ . De plus, par convergence simple, pour tout  $k \in \llbracket 0, M \rrbracket$ , il existe un rang  $N_k$  tel que

$$\forall n \geq N_k, |f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \varepsilon$$

Puis, avec  $N \stackrel{\text{déf.}}{=} \max_{0 \leq k \leq M} N_k$ , il suit

$$\forall n \geq N, \forall k \in \llbracket 0, M \rrbracket, |f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \varepsilon$$

Concluons. Soit  $x \in [a, b]$ . Il existe  $i$  tel que  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ . Par croissance de  $f$  et de  $f_n$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$f(x_i) - f_n(x_{i+1}) \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x_{i+1}) - f_n(x_i)$$

Or, par inégalité triangulaire :

$$|f(x_{i+1}) - f_n(x_i)| \leq |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)|$$

Le premier terme est inférieur à  $\varepsilon$  par continuité uniforme. L'autre est inférieur à  $\varepsilon$  pour  $n > N$ . Ainsi, indépendamment de  $i$ , donc de  $x$ , on a pour tout  $n \geq N$  :

$$|f(x_{i+1}) - f_n(x_i)| \leq 2\varepsilon$$

De même,

$$|f(x_i) - f_n(x_{i+1})| \leq 2\varepsilon$$

Finalement, pour tout  $n \geq N$ , pour tout  $x \in [a, b]$  :

$$-2\varepsilon \leq f(x) - f_n(x) \leq 2\varepsilon$$

Donc pour  $n \geq N$  :

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

d'où la convergence uniforme de  $(f_n)_n$  vers  $f$ . □

## 41 Problème de Bâle, trois solutions parmi des dizaines

Référence : *Analyse*, Xavier GOURDON.

**Théorème 41.1 : Problème de BÂLE**

On a l'identité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On va distinguer trois démonstrations : l'une utilise les relations racines-coefficients d'un polynôme et la fonction cotangente, l'autre le développement en série entière de la fonction arcsinus et la dernière la théorie des séries de FOURIER.

Commençons par l'outil relations-racines coefficients.

**Démonstration : 1.** On définit la suite de fonctions suivantes :

$$f_m : \left( \begin{array}{ccc} ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \frac{\sin((2m+1)\theta)}{\sin^{2m+1}(\theta)} \end{array} \right)$$

Montrons que

$$f_m(\theta) = P_m(\cotan^2 \theta)$$

où  $P_m \in \mathbb{R}_m[X]$ . Rappelons que la fonction cotangente vérifie :

$$\cotan^2(x) + 1 = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

Pour cela, comme pour les polynôme de Tchebychev, développons la formule de Moivre pour exprimer  $\sin((2m+1)\theta)$  comme somme d'éléments du type  $\sin^k \cos^p$  :

$$\Im \left[ \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} i^k \sin^k \theta \cos^{2m+1-k} \theta \right]$$

Or,  $i^k$  est imaginaire pur si et seulement si  $k$  est impair. Il suit :

$$\sin([2m+1]\theta) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \in 2\mathbb{N}+1}}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \sin^k \theta \cos^{2m+1-k} \theta$$

Exprimons  $k = 2k' + 1$  dans cette somme :

$$\sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1} \theta \cos^{2(m-k)} \theta$$

D'où

$$f_m(\theta) = \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k \sin^{2(k-m)} \theta \cos^{2(m-k)} \theta$$

Soit encore

$$f_m(\theta) = P_m(\cotan^2 \theta)$$

avec

$$P_m(X) = \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k X^{m-k}$$

**2.** La relation

$$f_m(\theta) = P_m(\cotan^2 \theta)$$

permet de déterminer toutes les racines de  $P_m$ . En effet, il s'agit d'un polynôme de degré  $m$ , donc admet au plus  $m$  racines distinctes. De plus,

$$\sin((2m+1)\theta) = 0 \iff \theta = \frac{n\pi}{2m+1}$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, pour  $k \in [1, m]$ ,

$$f_m\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = 0 = P_m\left(\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$$

et par stricte décroissance de  $\cotan^2$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , il suit que l'ensemble

$$\left\{ \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) \right\}_{1 \leq k \leq m}$$

est l'ensemble des  $m$  racines distinctes de  $P_m$ . Les relations racines coefficients donnent alors que

$$\sum_{k=1}^m \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{\binom{2m+1}{3}}{2m+1} = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

**3.** Pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , deux inégalités des accroissements finis donnent

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

D'où

$$\cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cotan^2(x)$$

Ainsi,

$$\frac{2m(2m-1)}{6} \leq \sum_{k=1}^m \frac{(2m+1)^2}{(k\pi)^2} \leq 1 + \frac{2m(2m-1)}{6}$$

D'où

et donc par théorème d'encadrement :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} \left[ \frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2} \right] & \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \leq \left( \frac{1}{2m+1} \right)^2 + \frac{\pi^2}{6} \left[ \frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2} \right] \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} & = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

□

La deuxième démonstration utilise le développement en série entière de la fonction arcsinus, et les intégrales de WALLIS. Rappelons d'où provient ce développement. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a sur  $] -1, 1[$  :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left[ \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right] x^n$$

Qui se montre à l'aide du théorème de TAYLOR avec reste intégral pour  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Puis, pour  $\alpha = \frac{-1}{2}$ , en l'appliquant à  $x^2$ , cela donne :

$$\forall x \in ] -1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left( \frac{-1}{2} - k \right) x^{2n}$$

Soit encore

$$\forall x \in ] -1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \right] x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{\prod_{k=1}^n 2k} x^{2n}$$

On intègre pour obtenir le développement de la fonction arcsinus sur  $] -1, 1[$  :

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{(2n+1)2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \right] x^{2n+1} = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{(2k)!}{4^n (n!)^2} x^{2n+1}$$

**Démonstration :** On considère la série de fonctions sur  $\left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2n+1} \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n (2k)} \sin^{2n+1}(t)$$

On note  $u_n(t) = a_n \sin^{2n+1}(t)$  le terme général de cette série. Montrons sa convergence normale. Pour cela, observons que  $a_n \geq 0$  et que pour  $x \in \left[ \frac{1}{2}, 1[ \right.$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  :

$$x + \sum_{n=1}^N a_n x^{2n+1} \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

Donc en faisant tendre  $[x \rightarrow 1^-]$  :

$$1 + \sum_{n=1}^N a_n \leq \frac{\pi}{2}$$

donc par positivité de  $a_n$  :  $\sum a_n = \sum |a_n| = \sum \|u_n\|_\infty < \infty$ , et le développement en série d'arcsin se prolonge en 1 par continuité. De plus, pour  $t \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  :

$$t = \sin t + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin^{2n+1}(t)$$

s'intègre termes à termes. L'intégration entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  donne :

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 - \cos t + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t) dt$$

On reconnaît là une intégrale de Wallis (on fait des rappels sur ces intégrales à la section suivante), que l'on explicite par intégrations par parties successives, et on obtient alors

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2n+1} \right)^2$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

La dernière démonstration que l'on propose provient des séries de FOURIER.

**Démonstration :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-\pi, \pi]$  par :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$$

On périodise cette fonction sur  $\mathbb{R}$  en une fonction  $2\pi$ -périodique. Par parité,  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , et de classe  $C^1$  par morceaux. Elle est alors développable en série de Fourier sur  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$$

avec

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

On calcule alors cette intégrale. D'abord, pour  $n = 0$ , on a

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \left( 2\pi - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

Puis, pour  $n \neq 0$  :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 - \frac{t^2}{\pi^2} \right) e^{int} dt$$

Le terme en 1 donne une intégrale nulle, donc

$$c_n(f) = \frac{-1}{2\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{int} dt$$

Grâce à cette méthode, pour  $x = 0$ , on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$$

et la formule de PARSEVAL donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

## 42 Intégrale de Wallis et formule de Stirling

Référence : *Analyse*, Xavier GOURDON.

Une première intégrations par parties donne

$$c_n(f) = \frac{-2}{2in\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{int} dt$$

Et la deuxième donne

$$c_n(f) = \frac{-2 \cos(n\pi)}{\pi^2 n^2} = \frac{-2(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

d'où

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx}$$

Soit

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

On conclut en faisant  $x = \pi$  :

$$0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**Proposition 42.1 : Intégrales de WALLIS**

Les intégrales de WALLIS sont définies sur  $\mathbb{N}$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

Alors :

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

2. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$W_{2p} = \frac{\prod_{k=1}^{p-1} (2k+1) \pi}{\prod_{k=1}^p 2k} \frac{\pi}{2}$$

et

$$W_{2p+1} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k)}{\prod_{k=0}^p (2k+1)}$$

3. Un équivalent de  $(W_n)_n$  est donné par :

$$W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

**Démonstration :**

[1.] Une intégration par parties sur  $W_{n+2}$  donne

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t) dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^n(t) dt$$

Le théorème fondamental de la trigonométrie permet alors de conclure en la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

[2.] Donc, on obtient les relations de récurrences sur  $W_{2p}$  et  $W_{2p+1}$  :

$$W_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p}$$

D'où

$$W_{2p} = \frac{\prod_{k=1}^{p-1} (2k+1)}{\prod_{k=1}^p 2k} W_0 = \frac{\prod_{k=1}^{p-1} (2k+1) \pi}{\prod_{k=1}^p 2k} \frac{\pi}{2}$$

Expression que l'on peut simplifier et présenter avec des factorielles. De même pour  $W_{2p+1}$  :

$$W_{2(p+1)+1} = \frac{2p+2}{2p+3} W_{2p+1}$$

Ce qui donne

$$W_{2p+1} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k)}{\prod_{k=0}^p (2k+1)} W_1$$

avec  $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = 1$ . On peut aussi présenter ce résultat sous forme de produits de factorielles.

[3.] On peut déterminer un équivalent de  $(W_n)_n$ . Pour cela, constatons d'abord que  $W_{n+1} \sim W_n$  :

$$\sin^{2p-1}(t) \leq \sin^{2p}(t) \leq \sin^{2p+1}(t)$$

donc en intégrant :

$$W_{2p-1} \leq W_{2p} \leq W_{2p+1}$$

Donc,

$$1 \leq \frac{W_{2p}}{W_{2p-1}} \leq \frac{W_{2p+1}}{W_{2p-1}} = \frac{2p+1}{2p}$$

Donc  $W_{2p} \sim W_{2p+1}$ . Donc  $W_n \sim W_{n+1}$ . Or,

$$\frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = \frac{(2p+1)\pi}{2} \left[ \frac{\prod_{k=1}^p 2k}{\prod_{k=1}^{p-1} (2k+1)} \right]^2 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 1$$

Donc

$$\frac{\prod_{k=1}^p 2k}{\prod_{k=1}^{p-1} (2k+1)} \sim \sqrt{\frac{1}{p\pi}}$$

On retrouve l'expression de  $W_{2p}$ , donc on dispose alors de l'équivalent :

$$W_{2p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{p\pi}} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot 2p}}$$

Et puisque  $W_{n+1} \sim W_n$ , on obtient finalement

$$W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

□

### Proposition 42.2 : Formule de STIRLING

On dispose de l'équivalent suivant :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

**Démonstration : 1.** Montrons d'abord que

$$n! \sim \kappa n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

par calcul d'équivalents successifs. Les intégrales de WILLIS permettront alors de connaître  $\kappa$ . Le point de départ de ce calcul d'équivalent est de se dire que recherche un équivalent de  $u_n$  est comme rechercher un développement asymptotique en  $o(1)$  de son logarithme.

• Partons alors d'une comparaison série-intégrale du logarithme :

$$\int_1^n \ln(x) dx \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \int_0^{n+1} \ln(x) dx$$

Ces deux intégrales se calculent :

$$\int_1^n \ln(x) dx = n \ln(n) - n + 1$$

et

$$\int_1^{n+1} \ln(x) dx = (n+1) \ln(n+1) - n$$

Puisque  $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ , il suit que ces deux intégrales sont équivalentes, et donc

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) \sim n \ln(n)$$

Autrement dit,

$$\ln(n!) = n \ln(n) + o(n \ln(n))$$

• Affinons ce «  $o(n \ln(n))$  ». On note  $u_n = \ln(n!) - n \ln(n)$ . Alors

$$u_{n+1} - u_n = -n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim -1$$

Par théorème de sommation des équivalents dans le cas divergent, il suit, puisque  $u_1 = 0$  :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n + o(n)$$

Soit

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n) - n + o(n)$$

• Affinons ce «  $o(n)$  ». On note  $v_n = u_n + n$ . Alors

$$v_{n+1} - v_n = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1$$

On développe par Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 1$$

d'où

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Or,  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, et on dispose de plus d'un équivalent grâce à une comparaison série-intégrale de la série harmonique :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sim \ln(N)$$

Il suit que

$$v_n = \frac{\ln(n)}{2} + o(\ln(n))$$

donc

$$\ln(n!) = n \ln(n) + n + \frac{\ln(n)}{2} + o(\ln(n))$$

• Affinons ce «  $o(\ln(n))$  ». On pose  $w_n = v_n - \frac{\ln(n)}{2}$ . Alors

d'où avec  $\kappa = e^k > 0$  :

$$w_{n+1} - w_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$n! \sim \kappa n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

On développe à l'ordre 3 :

$$w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

Tout se simplifie, et il reste à l'ordre 2 :

$$w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{-1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par théorème de sommation des relations de comparaison dans le cas convergent ( $\frac{-1}{12n^2}$  ne change pas de signe, donc ce théorème est applicable en changeant les signes), il suit que  $(w_n)_n$  converge. Notons  $k$  sa limite. On a alors

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} k + o(1)$$

Soit

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) + n + \frac{\ln(n)}{2} + k + o(1)$$

d'où

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^k \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{o(1)}$$

2. Déterminons  $\kappa$ . Pour cela, réexprimons l'expression de  $W_{2p}$  en termes de factorielles, en multipliant haut et bas par le produit des pairs :

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Et on utilise son équivalent que l'on a déterminé sans utiliser ladite formule de Stirling :

$$\frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

On remplace ces factorielles par l'équivalent, en fonction de  $\kappa$  :

$$\frac{\kappa \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p} \sqrt{2p}}{4^p \kappa^2 \left(\frac{p}{e}\right)^{2p} p} \sim \frac{1}{\sqrt{p\pi}}$$

Le tout se simplifie, et donne  $\kappa = \sqrt{2\pi}$ , d'où

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

□

Petit rappel sur les théorèmes de sommations des comparaisons de fonctions (équivalent, petit et grand O).

**Théorème 42.1 : Sommation des relations de comparaison, cas de la domination**

Soient  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux suites réelles positives (à partir d'un certain rang).

1. Si  $u_n = o(v_n)$  et  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge et

$$\sum_{n=0}^N u_n \underset{N \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{n=0}^N v_n\right)$$

2. Si  $u_n = o(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge et

$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n \underset{N \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{n=N}^{+\infty} v_n\right)$$

**Démonstration :** [1.] Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq n_0, -\varepsilon v_n \leq u_n \leq \varepsilon v_n$$

$$\sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

Constatons alors que puisque  $\sum u_n$  diverge et que  $u_n \geq 0$ , alors

Par théorème de minoration, c'est aussi le cas de  $(v_n)_n$ . De plus, pour  $n \geq n_0$ , on dispose de l'encadrement suivant :

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k - \varepsilon \sum_{k=n_0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \varepsilon \sum_{k=n_0}^n v_k$$

De plus, par divergence de  $\sum v_k$ ,  $\sum_{k=0}^n v_k$  est non nulle à partir d'un certain rang. Ainsi, le terme de gauche vaut

$$\left( \sum_{k=0}^n v_k \right) \left( \frac{\sum_{k=0}^{n_0} u_k}{\sum_{k=0}^n v_k} - \varepsilon \left[ 1 - \frac{\sum_{k=0}^{n_0} v_k}{\sum_{k=0}^n v_k} \right] \right)$$

Or, par positivité de  $(v_n)_n$  :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n_0} u_k}{\sum_{k=0}^n v_k} - \varepsilon \left[ 1 - \frac{\sum_{k=0}^{n_0} v_k}{\sum_{k=0}^n v_k} \right] \geq \frac{\sum_{k=0}^{n_0} u_k}{\sum_{k=0}^n v_k} - \varepsilon$$

Et par divergence de  $\sum v_n$ , il existe un rang à partir duquel

$$\frac{\sum_{k=0}^{n_0} u_k}{\sum_{k=0}^n v_k} - \varepsilon \left[ 1 - \frac{\sum_{k=0}^{n_0} v_k}{\sum_{k=0}^n v_k} \right] \geq -\varepsilon - \varepsilon$$

D'où

$$-2\varepsilon \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k - \varepsilon \sum_{k=n_0}^n v_k$$

Ce théorème ne suffit pas à montrer directement le résultat de sommation d'équivalents dans le cas divergent sans remettre les mains dans le moteur.

**Théorème 42.2 : Sommation des relations de comparaison, cas de l'équivalent**

Soient  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux suites réelles positives (à partir d'un certain rang).

1. Si  $u_n \sim v_n$  et  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge et

$$\sum_{n=0}^N u_n \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=0}^N v_n$$

2. Si  $u_n \sim v_n$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge et

$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$$

**Démonstration :** [1.] Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$$

Constatons alors que puisque  $\sum u_n$  diverge et que  $u_n \geq 0$ , alors

$$\sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

De même pour le terme de droite, à partir d'un certain rang :

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \varepsilon \sum_{k=n_0}^n v_k \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$$

D'où pour  $n$  assez grand :

$$-2\varepsilon \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^n u_k \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$$

d'où la relation de négligence des sommes partielles.

[2.] Soit  $\varepsilon > 0$ . On a dispose toujours d'un rang  $n_0$  à partir duquel

$$-\varepsilon v_n \leq u_n \leq \varepsilon v_n$$

Par théorème de majoration, puisque  $\sum v_n$  converge de façon croissante et  $(u_n)_n$  est une suite positive, il suit que  $\sum u_n$  converge. Il suit alors que pour  $n \geq n_0$  :

$$-\varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

Ce qui conclut sur la relation de négligences des restes de séries. □

Par théorème de minoration, c'est aussi le cas de  $(v_n)_n$ . De plus, pour  $n \geq n_0$ , on dispose de l'encadrement suivant :

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + (1 - \varepsilon) \sum_{k=n_0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + (1 + \varepsilon) \sum_{k=n_0}^n v_k$$

De plus, par divergence de  $\sum v_k$ ,  $\sum_{k=0}^n v_k$  est non nulle à partir d'un certain rang et le terme de gauche est équivalent à (quitte à traiter le cas  $\varepsilon = 1$  à part) :

d'où la relation d'équivalence des sommes partielles.

[2.] Soit  $\varepsilon > 0$ . On a dispose toujours d'un rang  $n_0$  à partir duquel

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + (1 - \varepsilon) \sum_{k=n_0}^n v_k \sim (1 - \varepsilon) \sum_{k=0}^n v_k$$

Ainsi, il existe un rang à partir duquel

$$(1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$$

$$(1 - 2\varepsilon) \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + (1 - \varepsilon) \sum_{k=n_0}^n v_k$$

Par théorème de majoration, puisque  $\sum v_n$  converge de façon croissante et  $(u_n)_n$  est une suite positive, il suit que  $\sum u_n$  converge. Il suit alors que pour  $n \geq n_0$  :

De même pour le terme de droite, à partir d'un certain rang :

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + (1 + \varepsilon) \sum_{k=n_0}^n v_k \leq (1 + 2\varepsilon) \sum_{k=0}^n v_k$$

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} v_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_n \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} v_n$$

D'où pour  $n$  assez grand :

Ce qui conclut sur la relation d'équivalence des restes de séries. □

$$(1 - 2\varepsilon) \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^n u_k \leq (1 + 2\varepsilon) \sum_{k=0}^n v_k$$

Une application directe de ce théorème est le théorème de CÉSARO : supposons que  $(u_n)_n$  converge vers  $l \neq 0$ . Alors, quitte à changer  $l$  en  $-l$ , on peut supposer que  $(u_n)_n$  est positive à partir d'un certain rang. Alors  $u_n \sim l$ . Puisque  $\sum l$  est divergente ( $l \neq 0$ ), le théorème de sommation des équivalents dans le cas divergent donne

$$\sum_{k=1}^n u_k \sim nl$$

donc  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ .