GDT : Simplicial set and categories

Jérôme Milot

15 Décembre 2023

Quelques mots sur ce pdf

Ce pdf regroupe des notes que j'ai prises dans le cadre d'un groupe de travail sur les ∞-catégories (dans le sens de quasi-catégorie de Joyal) de l'équipe de topologie du laboratoire Paul Painlevé à Lille. Il s'agit du troisième exposé du groupe de travail : à ce titre, il manque très certainement de contexte. J'essayerai d'apporter celui-ci si j'en ai le temps, mais en attendant, j'espère qu'il saura suffisamment se suffir à lui-même pour vous apporter quelque chose. Bonne lecture !

Notations

- Tout au long de ce pdf, la terminologie ∞-catégorie désignera la notion de quasi-catégorie de Joyal.
- Δ désigne la catégorie simpliciale, c'est-à-dire que ses objets sont les ensembles totalement ordonnés $[n] := \{0, \dots, n\}$ et ses morphismes les applications croissantes.
- Un ensemble simplicial est un foncteur de $\Delta^{\mathrm{op}} \to \underline{Set}$.
- $\underline{sSet}$ désigne la catégorie des ensembles simpliciaux, c'est-à-dire que ses objets sont les ensembles simpliciaux et ses morphismes sont les morphismes d'ensembles simpliciaux.

1 Motivation

Au travers des exposés de Marvin Verstraete et Nicola Carissimi, nous avons pu regarder les ensembles simpliciaux par le prisme topologique, via le foncteur Sing et plus généralement les complexes de Kan, dans l'optique de faire de l'homotopie sur nos ensembles simpliciaux.

Mais ce n'était pas forcément satisfaisant : par exemple, les simplexes standards Δ^n n'étaient pas des complexes de Kan. On se propose alors d'essayer de regarder le problème sous un prisme plus catégorique.

2 Le nerf d'une catégorie

2.1 Le foncteur nerf

Ici encore, nous allons recourir à la théorie des ensembles simpliciaux, même cette fois-ci d'un point de vue catégorique. En effet, à une catégorie $\mathcal{C}$, il est un ensemble simplicial qu'il paraît naturel de considérer.

On dispose d'une inclusion de catégories pleinement fidèle

$$i : \Delta \to \underline{Cat}$$

duquel l'on définit le *foncteur d'évaluation en i*

$$\begin{array}{rcccc} i^* & : & \underline{Cat} & \to & \underline{sSet} \\ & & \mathcal{C} & \mapsto & \big([n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\underline{Cat}}([n], \mathcal{C})\big) \end{array} .$$

Définition 2.1.1 (Foncteur nerf)**.** *Le foncteur i^* est appelé **foncteur nerf** et est noté N.*

Remarque Le théorème de Kan (**??**) assure l'existence d'un foncteur adjoint à gauche de N, noté $\tau : \underline{sSet} \to \underline{Cat}$. Nous reviendrons sur ce foncteur ultérieurement, lors de l'étude de la catégorie homotopique d'une ∞-catégorie.

On peut alors s'intéresser plus particulièrement à l'image d'une catégorie par le foncteur nerf.

Définition 2.1.2 (Nerf d'une catégorie)**.** *Soit $\mathcal{C}$. On considère l'ensemble simplicial $N(\mathcal{C})$, que l'on appelle **nerf de la catégorie** $\mathcal{C}$, défini par ses n-simplexes pour $n \in \mathbb{N}$:*

$$N_n(\mathcal{C}) = Hom_{Cat}(\Delta^n, \mathcal{C}).$$

Remarque On peut également représenter un n-simplexe par une chaîne de morphismes :

$$C_0 \xrightarrow{\alpha_1} C_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_n} C_n.$$

On peut alors expliciter le comportement des faces et dégénérescences sur cet ensemble simplicial. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, pour $0 \leqslant i \leqslant n$:

$$d_i^n\left(C_0 \xrightarrow{\alpha_1} C_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_n} C_n\right) =$$
$$\begin{cases} C_0 \xrightarrow{\alpha_1} C_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots C_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}\circ\alpha_i} C_{i+1} \dots \xrightarrow{\alpha_n} C_n & \text{si } i \notin \{0, n\} \\ C_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_n} C_n & \text{si } i = 0 \\ C_0 \xrightarrow{\alpha_1} C_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} C_{n-1} & \text{si } i = n \end{cases}$$

et

$$s_i^n\left(C_0 \xrightarrow{\alpha_1} C_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_n} C_n\right) = C_0 \xrightarrow{\alpha_1} C_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots C_i \xrightarrow{\mathrm{id}} C_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \dots \xrightarrow{\alpha_n} C_n.$$

L'intérêt du nerf d'une catégorie est de pouvoir donner un sens catégorique à la structure cellulaire des ensembles simpliciaux.

2.2 Structure catégorique d'un ensemble simplicial

Définition 2.2.1 (Structure de catégorie d'un ensemble simplicial)**.** *Soit X un ensemble simplicial.*

*Un **objet** de X est un 0-simplexe de X. Via le lemme de Yoneda, on a de manière équivalente : un objet de X est une application $x : \Delta^0 \to X$.*

*Une **flèche** de X est un 1-simplexe de X. Via le lemme de Yoneda, on a de manière équivalente : une flèche de X est une application $f : \Delta^1 \to X$. On définit la **source** de cette flèche comme étant le 0-simplexe $d_1^1(f)$. On définit de manière analogue le **but** de cette flèche comme étant le 0-simplexe $d_0^1(f)$.*

Exemple 1. *Soit x un objet d'un ensemble simplicial X. On dispose alors de la flèche **identité** de x, définie par $s_0^0(x)$.*

Ces définitions sont-elles cohérentes avec les notions de nerf d'une catégorie ? Heureusement, oui (puisque ce sont elles qui les motivent).
Remarque Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Alors :

- Les objets de l'ensemble simplicial $N(\mathcal{C})$ s'identifient aux objets de la catégorie $\mathcal{C}$;
- les flèches de l'ensemble simplicial $N(\mathcal{C})$ s'identifient aux morphismes de la catégorie $\mathcal{C}$;

Nous avons défini le nerf d'une catégorie fixée. On peut voir le nerf d'une catégorie comme l'image de cette catégorie par un foncteur, dit **foncteur nerf**, défini par $\mathcal{C} \in Cat \mapsto N(\mathcal{C}) \in sSet$. La question qui point alors naturellement, c'est : est-il possible de recouvrer une catégorie à partir de son nerf ? Autrement formulé, le foncteur nerf est-il pleinement fidèle ?

Proposition 2.2.2. *Le foncteur nerf est pleinement fidèle. Autrement dit, étant données deux petites catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, on a*

$$\theta : Hom_{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq Hom_{sSet}(N(\mathcal{C}), N(\mathcal{D})).$$

Démonstration. L'injectivité repose sur le fait qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est entièrement déterminé par son comportement sur les objets et les morphismes de sa catégorie source $\mathcal{C}$. Or, les objets et les morphismes d'une catégorie s'identifient aux objets et flèches de son nerf. La donnée du comportement du morphisme simplicial $\theta(F)$ sur les objets et flèches de $N(\mathcal{C})$ suffit à caractériser F, d'où l'injectivité de θ.

Pour la surjectivité, considérons un morphisme d'ensembles simpliciaux f (donc une transformation naturelle) de $N(\mathcal{C})$ dans $N(\mathcal{D})$. Ainsi, f est la donnée d'applications d'ensembles de $N_n(\mathcal{C})$ dans $N_n(\mathcal{D})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En particulier, pour $n = 0$, f envoie un objet de l'ensemble simplicial $N(\mathcal{C})$, donc un objet de $\mathcal{C}$, sur un objet de l'ensemble simplicial $N(\mathcal{D})$, donc un objet de $\mathcal{D}$. On note $F(c)$ cet objet.

Pour $n = 1$, f envoie une flèche de l'ensemble simplicial $N(\mathcal{C})$, donc un morphisme $u : c \to d$ de $\mathcal{C}$, sur une flèche de l'ensemble simplicial $N(\mathcal{D})$, notée $f(u)$.

Par construction, $f(u)$ est un morphisme de $d_1^1(f(u))$ dans $d_0^1(f(u))$. Or, f est un morphisme d'ensembles simpliciaux, donc f commute avec les opérateurs de faces (comme de dégénérescences). Ainsi, $f(u)$ est un morphisme de $F(c)$ dans $F(d)$. On peut en particulier le voir comme un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), F(d))$, que l'on note $F(u)$.

Maintenant, vérifions que F définit bien un foncteur. Déjà, on constate que pour tout objet c de $\mathcal{C}$, on a $F(1_c) = f(s_0^0(c)) = s_0^0(F(c)) = 1_{F(c)}$. Il ne reste donc qu'à vérifier la propriété de composition.

Soient deux morphismes $u : c \to d$ et $v : d \to e$. Le diagramme $c \xrightarrow{u} d \xrightarrow{v} e$ peut s'identifier à un 2-simplexe σ de $N(\mathcal{C})$. Puisque $d_i^2(f(\sigma)) = f(d_i^2(\sigma))$ ($i = 0, 2$), on constate que $f(\sigma)$ s'identifie au diagramme $F(c) \xrightarrow{F(u)} F(d) \xrightarrow{F(v)} F(e)$ dans $\mathcal{D}$. En particulier, $F(v) \circ F(u) = d_1^2(f(\sigma) = f(d_1^2(\sigma)) = F(v \circ u)$ d'où la propriété de composabilité.

Enfin, il ne reste qu'à vérifier que le foncteur F définit correspond bien à $\theta(f)$. C'est en fait clair, car c'est vérifier sur les 1-simplexes par construction, et que les n-simplexes se construisent par récurrence à partir des 1-simplexes. $\square$

Ce théorème est important, parce qu'il nous permet de considérer indifféremment une catégorie ou son nerf. Se pose alors naturellement la question de l'image essentielle du foncteur nerf, afin d'obtenir une caractérisation de ces ensembles simpliciaux qui nous intéressent.

Au vu de la construction de la structure catégorique sur les ensembles simpliciaux, on constate que ceux-ci ont presque déjà tous les ingrédients d'une catégorie. Ne reste finalement que la question de compositions des flèches. Comment s'assurer que deux flèches, avec un but et une source cohérentes, sont composables ?

Dans le cadre du nerf d'une catégorie, il paraît clair que nous pourrons toujours considérer de manière unique la composée de deux flèches (ce sera la flèche associée à la composée des deux morphismes de la catégorie). C'est en fait une manière de caractériser si un ensemble simplicial est le nerf d'une catégorie ou non.

2.3 Caractérisation des nerfs et conditions de remplissage des cornets

Théorème 2.3.1 (Image essentiel du foncteur nerf)**.** *Un ensemble simplicial X est le nerf d'une petite catégorie si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $0 < k < n$, tout morphisme d'ensemble simpliciaux $\Lambda_k^n \to X$ s'étend en un uniquement morphisme d'ensemble simpliciaux $\Delta^n \to X$ (ou autrement dit, il existe une bijection entre $Hom_{\underline{sSet}}(\Lambda_k^n, X)$ et $Hom_{\underline{sSet}}(\Delta^n, X)$).*

Remarque On retrouve, comme dans la définition des complexes de Kan, on condition de "remplissage de cornets". On peut se demander pour quelle raison on ne demande le remplissage que des cornets "intérieurs".

Pour comprendre cela, considérons le nerf d'une catégorie $\mathcal{C}$. Dans ce cas, un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : \Lambda^2_2 \to N(\mathcal{C})$ correspond au diagramme :

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[dr] & . \\ c_0 \arrow[r] & c_2 \end{tikzcd}$$

L'existence d'une extension reviendrait à demander l'existence d'une flèche pointillée de c_0 vers c_1. En particulier, en demander ce remplissage et le remplissage du cornert Λ^2_0, on demanderait que toute flèche soit inversible. C'est donc le cas si et seulement si $\mathcal{C}$ est un groupoïde (et c'est quand même vachement restrictif, comme condition !).

Démonstration. Idée : pour le sens direct, on regarde un morphisme défini sur un cornet intérieur. Le cornet intérieur contient tous les $\Delta^{i,i+1}$: on peut donc regarder la restriction de ce morphisme à ces simplexes. On peut alors construit un n-simplexe à partir de ces restrictions, et celui-ci est unique par construction.

Pour le sens indirect, on utilise la structure de catégorie de X définit précédemment. La composition provient du remplissage du cornet Λ^2_1, l'associativité du remplissage du cornet Λ^3_2. Puis on constate que l'isomorphisme d'ensembles simpliciaux implique les conditionn de remplissages des cornets intérieurs à tout ordre. $\square$

Mais pour les ensembles simpliciaux qui ne sont pas des nerfs, on se heurte à un problème concernant la composition des flèches. En effet, visualisons à présent les 2-simplexes. Un 2-simplexe σ d'un ensemble simplicial X devrait être vu comme un diagramme triangulaire dans lequel h et $g \circ f$ sont reliés par une homotopie. Ainsi, un morphisme θ pourrait être vu comme la composition de deux morphismes s'il existe un tel 2-simplexe. Problème : pour un ensemble simplicial général n'assure pas nécessairement cette existence.

Dès lors, on se demande quelle propriété pourrait encoder l'existence de tels 2-simplexes pour toute paire de flèches. Pour ce faire, on constate que la donnée de deux morphismes $f : \Delta^1 \to X$ et $g : \Delta^1$ est équivalente à la donnée d'un morphisme simplicial $\Lambda^2_1 \to X$. Ainsi, la condition d'existence de σ peut se reformuler comme une condition d'extension, où l'on demande à ce qu'il existe un morphisme d'ensembles simpliciaux $\Delta^2 \to X$ qui est une extension du précédent.

En d'autres termes, une **composition** h de deux flèches f, g (tels que le but de f coïncide avec la source de g) est une flèche de X telle qu'il existe un 2-simplexe σ vérifiant $d^2_0(\sigma) = g, d^2_1(\sigma) = h$ et $d^2_2(\sigma) = f$.

Néanmoins, la question se pose de l'unicité de ce 2-simplexe. La demander, c'est trop restrictif : on cherche à construire une théorie de l'homotopie. On peut se contenter de demander l'existence et s'assurer que les différentes compositions possibles sont égales à *homotopie près*.

Nous avons vu que les conditions pour être un complexe de Kan et être le nerf d'une catégorie sont très similaires, il paraît raisonnable de considérer ainsi une propriété plus faible que celles-ci. On tient un bon candidat pour la notion d'∞-catégorie.

3 ∞-catégories

3.1 Définition et exemples

Définition 3.1.1. *Une* ∞***-catégorie*** *est un ensemble simplicial* X *tel que, pour tous entiers* $n \geqslant 2, 0 < k < n$*, tout morphisme d'ensembles simpliciaux de la forme* $\Lambda_k^n \to X$ *s'étend à* Δ^n*.*

En d'autre termes, l'opération de restriction le long de la k*-ème cornet induit une surjection*

$$Hom(\Delta^n, X) \to Hom(\Lambda_k^n, X).$$

Remarque On notera $\mathcal{C}$ ou X une ∞-catégorie selon qu'on la considère en tant qu'∞-catégorie ou ensemble simplical.

Exemple 2.

- *Le nerf d'une catégorie* $\mathcal{C}$ *est une* ∞*-catégorie (pour laquelle il y a même unicité de l'extension);*
- *Un complexe de Kan est une* ∞*-catégorie (pour laquelle la propriété d'extension est également valable pour les cornets extérieures). En particulier, pour un espace topologique* K*, Sing(*K*) est une* ∞*-catégorie.*

Les ∞-catégories sont munies d'une structure analogue à celles des catégories, puisque ce sont des ensembles simpliciaux.

Définition 3.1.2. *Soit* $\mathcal{C}^\infty = S$ *une* ∞*-catégorie. Alors, les objets et morphismes de* $\mathcal{C}$ *sont les objets et flèches de* S *en tant qu'ensemble simplicial. Ainsi, un morphisme de* $\mathcal{C}^\infty$ f *de* X *dans* Y *est un élément* f *de* S_1 *de source* $X = d_1^1(f)$ *et de but* $Y = d_0^1(f)$*. Pour tout objet* $c \in \mathcal{C}^\infty$*, on peut définir le morphisme identité de* c *comme la flèche* $s_0^0(c)$*.*

Exemple 3.

- *Si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie, alors les objets et morphismes de* $N(\mathcal{C})$ *en tant qu'*∞*-catégorie coïncident avec les objets et morphismes de* $\mathbb{C}$*.*
- *Si* K *est un espace topologique, alors Sing(*K*) est une* ∞*-catégorie dont :*
  - *Les objets sont les points de* K*;*
  - *Les morphismes sont les chemins continus* f *dans* K*, de source* $f(0)$ *et de but* $f(1)$*;*
  - *Pour tout point* $x \in K$*, le morphisme identité est le chemin constant égal à* x*.*

Remarque Puisque le foncteur nerf est pleinement fidèle et que le nerf d'une catégorie est une ∞-catégorie, on peut considérer indifférement une catégorie en tant que catégorie ou en tant qu'∞-catégorie (ce qui est satisfaisant dans le cadre de notre quête de généraliser les catégories).

À partir d'une ∞-catégorie, on peut également en construire une autre : sa catégorie opposée.

En effet, considérons $\rho : \Delta \to \Delta$ le foncteur défini comme l'identité sur les objets et défini sur les morphismes par la formule

$$\rho(f)(i) = n - f(m-i)$$

pour $f : [m] \to [n]$ et $0 \leqslant i \leqslant m$ (c'est en fait l'unique candidat pour un tel rôle, car seul automorphisme non trivial). Alors, la composition par ρ définit un automorphisme ρ^* dans la catégorie des ensembles simpliciaux.

Pour un ensemble simplicial X, on définit son ensemble simplicial oppposé $X^{\text{op}} := \rho^*(X)$. Par fonctorialité, un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : X \to Y$ est envoyé sur un morphisme $f^{\text{op}} := \rho^*(f) : X^{\text{op}} \to Y^{\text{op}}$.

Enfin, de manière analogue aux catégories, on souhaite construire des notions de foncteur et de transformation naturelle entre deux ∞-catégories.

Définition 3.1.3.

3.2 ∞-catégorie et complexe de Kan

Définition 3.2.1. *Un morphisme $f : x \to y$ dans une ∞-catégorie est dit **inversible** s'il existe deux morphismes $g : y \to x$ et $h : y \to x$ tel que 1_x est une composition de f et de g et 1_y est une composition de h et de f.*

Définition 3.2.2. *Une ∞-catégorie dont tous les morphismes sont inversibles est appelée ∞**-groupoïde**.*

Proposition 3.2.3. *Un complexe de Kan est un ∞-groupoïde.*

Démonstration. Cela repose sur le fait que le remplissage des cornets pour un complexe de Kan est faisable pour toutes les faces, dont les faces extérieures. Le remplissage du cornet Λ^2_0 permet par exemple de construire le morphisme g, et le remplissage du cornet Λ^2_2 permet de construire le morphisme h. □

Remarque On peut en fait prouver qu'une catégorie est un groupoïde si et seulement si son nerf est un complexe Kan.

Par définition, on sait que les compositions ne sont pas uniques. Nous allons toutefois montrer que la condition de surjection à tout rang permet d'outrepasser ce défaut apparent, via une notion d'homotopie qui sera cohérente : si h et h' sont deux composition de deux mêmes morphismes, on souhaite qu'il existe une homotopie entre h et h'.

3.3 Homotopie des ∞-catégories

Nous commençons par introduire une notation pour la composition : si $h : x \to z$ est la composition de $f : x \to y$ et de $g : y \to z$, on note $fg \sim h$. On souhaiterait, en quelque sorte, que la commutativité des diagrammes

$$
\begin{tikzcd}
y \arrow[dr, "g"] & \\
x \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"'] & z
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
y \arrow[dr, "g"] & \\
x' \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"'] & z
\end{tikzcd}
$$

induisent la commutativité d'un troisième diagramme pour lequel h est une composition de h' et de 1, ou alors h' est la composition de h et de 1. Cependant, on dispose alors de quatre manières de demander une telle condition :

$$
h \sim_1 h' \iff h1_x \sim h' : \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "h"] & \\
x \arrow[u, "1_x"] \arrow[r, "h'"'] & z
\end{tikzcd}
\qquad
h \sim_2 h' \iff 1_z h \sim h' : \quad
\begin{tikzcd}
z \arrow[dr, "1_z"] & \\
x \arrow[u, "h"] \arrow[r, "h'"'] & z
\end{tikzcd}
$$

$$
h \sim_3 h' \iff h'1_x \sim h : \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "h'"] & \\
x \arrow[u, "1_x"] \arrow[r, "h"'] & z
\end{tikzcd}
\qquad
h \sim_4 h' \iff 1_z h' \sim h : \quad
\begin{tikzcd}
z \arrow[dr, "1_z"] & \\
x \arrow[u, "h'"] \arrow[r, "h"'] & z
\end{tikzcd}
$$

On se heurte donc à un petit problème : on a quatre candidats pour une notion d'homotopie satisfaisante. Fort heureusement, il s'agit d'un faux problème, car ces quatre notions coïncident. Pour le prouver, on utilise le

Lemme 3.3.1. *Si l'on a le diagramme*

$$
\begin{tikzcd}
 & & x_2 \arrow[dd] \\
x_0 \arrow[r] \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\circlearrowleft"] & x_1 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
 & & x_3
\end{tikzcd}
$$

alors

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[dr] & \\
x_0 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & x_3
\end{tikzcd}
\iff
\begin{tikzcd}
x_2 \arrow[dr] & \\
x_0 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & x_3
\end{tikzcd}
.
$$

Autrement dit, si les faces extérieures d'un diagramme tétraédrale sont des triangles commutatifs, alors une face intérieure est un triangle commutatif si et seulement si l'autre face intérieure est un triangle commutatif.

On a alors :

Théorème 3.3.2. *Les quatres relations $(\sim_i)_{i=1,2,3,4}$ coïncident et définissent une relation d'équivalence sur l'ensemble des morphismes de x vers z dans X.*

Démonstration. Pour démontrer le résultat, commençons par remarquer que l'on a évidemment, pour tout; morphisme $h : x \to z$, $h \sim_i h$ pour les quatre relations. Par exemple, $h \sim_1 h$ via $s_0^1(h)$ et $h \sim_2 h$ via $s_1^1(h)$.

Ainsi, on peut considérer les deux diagramme tétraédraux :

$$\begin{tikzcd} & & z \arrow[dd, "1_z"] \\ x \arrow[r, "1_x"] \arrow[urr, "h"] \arrow[drr, "h'"'] & x \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ & & z \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} & & z \arrow[dd, "1_z"] \\ x \arrow[r, "1_x"] \arrow[urr, "h"] \arrow[drr, "h"'] & x \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "h'"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ & & z \end{tikzcd}$$

.

Le lemme de cohérence de Joyal appliqué au premier nous donne :

$$h \sim_2 h' \iff h \sim_1 h'.$$

Puis, le lemme de cohérence de Joyal appliqué au deuxième nous donne :

$$h \sim_2 h' \Rightarrow h \sim_3 h'.$$

On utilise ensuite le même résultat, appliqué à la catégorie opposée, afin d'obtenir $h \sim_4 h' \iff h \sim_3 h'$ et $h \sim_3 h' \Leftarrow h \sim_2 h'$: les quatre relations coïncident en une relation que l'on note $\sim$.

Vérifions maintenant que cette relation est une relation d'équivalence.

- Réflexivité : On a déjà vu $h \sim_1 h$ au début de cette preuve.

- Symétrie : On constate qu'on a clairement $h \sim_2 h' \iff h' \sim_4 h$, d'où $h \sim h' \iff h' \sim h$.

- Transitivité : Soient trois morphismes h, h', h'' tels que $h \sim h'$ et $h' \sim h''$.

  On regarde en particulier : $h'1_x \sim h$, $1_z h' \sim h''$ et $h''1_x \sim h''$. On a ainsi le diagramme :

  $$\begin{tikzcd} & & z \arrow[dd, "1_z"] \\ x \arrow[r, "1_x"] \arrow[urr, "h"] \arrow[drr, "h''"'] & x \arrow[ur, "h'"] \arrow[dr, "h''"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ & & z \end{tikzcd} .$$

  Le lemme de cohérence de Joyal donne alors la commutativté du "grand triangle", qui traduit $1_z h \sim h''$, d'où $h \sim h''$.

$\square$

Nous sommes maintenant équipés pour définir une relation d'homotopie nous permettant de construire la catégorie homotopique des ∞-catégories.

4 Catégorie homotopique d'une ∞-catégorie

4.1 Relation d'homotopie

On commence par définir proprement la relation d'homotopie.

Définition 4.1.1. *Pour deux objets x, y de X, on définit $Hom_{ho(X)}(x, y)$ comme l'ensemble quotient des flèches de x vers y dans X par la relation d'équivalence $\sim$. Pour $f \in Hom_X(x, y)$, on note $[f]$ sa classe correspondante dans $Hom_{ho(X)}(x, y)$.*

On définit de plus une relation de composition :

$$\begin{array}{rcl} \circ \quad : Hom_{ho(X)}(x,y) \times Hom_{ho(X)}(y,z) & \to & Hom_{ho(X)}(x,z) \\ ([f],[g]) & \mapsto & [g] \circ [f] \end{array}$$

où $[g] \circ [f] = [h]$ pour h composition de g et f.

Ce choix de la composition est satisfaisante, dans le sens où

Proposition 4.1.2.

- *$\circ$ est bien définie;*
- *$\circ$ est associative;*
- *$[1_x]$ est une identité pour $\circ$ (c'est-à-dire : $\forall f : w \to x$: $[1_x] \circ [f] = [f]$ et $\forall g : x \to w$: $[g] \circ [1_x] = [g]$).*

Définition 4.1.3. *La **catégorie homotopique** ho(X) d'une ∞-catégorie X est définie par :*

- *Les objets de ho($\mathcal{C}^\infty$) sont les objets de $\mathcal{C}^\infty$;*
- *Pour x, y objets de $\mathcal{C}^\infty$, les morphismes de x vers y sont dans $Hom_{ho(X)}(x, y)$.*

Exemple 4.

- *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, alors $ho\,(N(\mathcal{C})) \simeq \mathcal{C}$;*
- *Pour K espace topologique, on a $ho\,(Sing(K)) \simeq \pi_1(K)$. Ce résultat est un succès pour notre quête : on a un bien un lien entre les invariants des primes topologique et catégorique.*

Proposition 4.1.4. *La catégorie homotopique d'une ∞-catégorie est bien une catégorie.*

On conclut l'étude de la catégorie homotopique par une autre expression de celle-ci, faisant intervenir l'adjoint à gauche de N, τ !

Théorème 4.1.5 (Boardman-Vogt)**.** *On a un isomorphisme*

$$\tau(X) \simeq ho(X)$$

induit par l'unique morphisme d'ensembles simpliciaux $X \to N\,(ho(X))$ qui est l'identité sur les objets et qui envoie un morphisme sur sa classe d'homotopie.

Remarque Ce théorème peut se reformuler : la catégorie fondamentale de X ($\tau(X)$) coïncide avec sa catégorie homotopique.

4.2 Conséquences pour les ∞-catégorie

Corollaire 4.2.1. *Une ∞-catégorie X est un ∞-groupoïde si et seulement si $ho(X)$ est un groupoïde.*

Corollaire 4.2.2. *Un morphisme $f : x \to y$ d'une ∞-catégorie est inversible si et seulement si il existe $g : y \to x$ tel que $fg \sim 1_y$ et $gf \simeq 1_x$.*