Séminaire 1236 : Introduction à la théorie des catégories

Décembre 2023

1 Premières définitions

Pour éviter les possibles problèmes ensemblistes posés par la théorie des catégories, on ne s'intéressera dans la suite qu'aux petites catégories (catégories dont la classe des objets et la classe des morphismes sont des ensembles). Notre premier objectif sera de montrer le lemme de Yoneda et de parler d'adjonctions de foncteurs.

Définition 1 (Catégorie) *Une catégorie $\mathscr{C}$ est la donnée d'un ensemble* $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ *et pour toute paire d'objet* (X, Y) *de* $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ *d'un ensemble de flèches ou morphismes* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *satisfaisant les propriétés suivantes :*

- ***Composition :*** *Il existe une application* $\circ_{X,Y,Z} : \mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$.
- ***Identité :*** *Pour tout objet* $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, *il existe un élément identité nommé* $Id_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$ *tel que pour tout objet* $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ *et* $g \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ *on ait* $f \circ_{X,X,Y} Id_X = f$ *et* $Id_X \circ_{Y,X,X} g = g$.
- ***Associativité de la composition :*** *Etant donné des objets* W, X, Y, Z *et des morphismes* $h \in \mathrm{Hom}(W, X)$, $g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $f \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$ *on a l'égalité suivante :*

$$f \circ_{W,X,Z} (g \circ_{X,Y,Z} h) = (f \circ_{W,X,Y} g) \circ_{W,Y,Z} h$$

Définition 2 (Domaine, codomaine) *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie,* X, Y *deux objets de* $\mathscr{C}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. *On appelle* X *le domaine de* f *et* Y *le codomaine de* f. *On note cela* $X = D(f)$ *et* $Y = Cod(f)$.

On peut reformuler la définition d'une catégorie avec des domaines et des codomaines : plutôt que de fixer deux objets X et Y et définir l'ensemble des morphismes entre les deux, on peut dire qu'une catégorie $\mathscr{C}$ est constituée d'un ensemble d'objets $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et d'un ensemble de morphismes $\mathrm{Mor}(\mathrm{C})$ muni d'applications $D : \mathrm{Mor}(\mathrm{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $Cod : \mathrm{Mor}(\mathrm{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. La composition est alors une application $\circ : \mathscr{Z} \to \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ où $\mathscr{Z}$ est le sous ensemble de $\mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ constituée des paire f, g telles que $Cod(g) = Dom(f)$. L'axiome d'associativité de la composition devient simplement que pour deux paires (f, g) et (g, h) dans $\mathscr{Z}$,en appliquant $\circ$ aux paires $(f \circ g, h)$ et $(f, g \circ h)$ qui restent des éléments de $\mathscr{Z}$ on obtient : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. Par la suite on ne mentionnera donc plus les objets en indice de $\circ$, on ne parenthèsera plus les compositions et on écrira indifféremment $f \circ g$ ou fg.

Exemples :

- **Sets** la catégorie des ensembles. Les objets sont les ensembles, les morphismes entre deux ensembles sont les applications entre deux ensembles. Les identités sont les fonctions identité usuelles et la composition est donnée par la composition de fonctions usuelles.
- **Grp** La catégorie des groupes. Les objets sont les groupes, les morphismes sont les morphismes de groupes, la composition est la composition usuelle de fonctions et les identités sont les morphismes identité usuels.
- **Rings** la catégorie des anneaux. Les objets sont les anneaux, les morphismes sont les morphismes d'anneaux, les identités sont les morphismes identité usuels.
- $\mathbf{Vec}_k$ la catégorie des k-espaces vectoriels (la notation est souvent utilisé pour dénoter la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie) les objets sont les k-espaces vectoriels, les morphismes.
- Poset : soit $(X, \leq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre (partielle), on peut alors définir une catégorie $Pos(X)$ dont les objets sont les éléments de x et dans laquelle il existe un unique morphisme dans $\mathrm{Hom}(x, y)$ si $x \leq y$ et $Hom(x, y) = \varnothing$ sinon. Il existe clairement une unique façon de composer des morphismes et on vérifie que les axiomes de catégorie sont bien satisfaits.
- $\mathbf{\Delta}$ la catégorie simpliciale, ses objets sont les $[n] := \{0, 1, \ldots, n\}$, les éléments de $\mathrm{Hom}([m], [n])$ sont les applications croissantes de $[m]$ dans $[n]$ la composition est la composition de fonctions usuelle, les identités sont les fonctions identité usuelles.

— **Top** la catégorie des espaces topologiques. Les objets sont les espaces topologiques, les morphismes sont les applications continues, la composition est la composition de fonctions usuelles et les identités sont les fonctions identité usuelles.
— La catégorie des espaces mesurables (améliorés) : un objet est un triplet (X, M, N) où X est un ensemble, M est une σ-algèbre sur X et N est un σ-idéal de N (qui correspond aux événements négligeables). Les morphismes de (X, M_1, N_1) vers (Y, M_2, N_2) sont des classes d'équivalences de fonctions $X \to Y$ telles que les images réciproques d'éléments de M_2 sont des éléments de M_1 et les images réciproques d'éléments de N_2 sont des éléments de N_1. Deux fonctions sont équivalentes si l'ensemble des points en lesquels elles ne sont pas égales est un élément de N_1.

Définition 3 (Isomorphisme) *Un morphisme $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ est un isomorphisme s'il existe un morphisme $g \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ tel que $f \circ g = Id_Y$ et $g \circ f = Id_X$.*

Dans **Sets** les isomorphismes sont les bijections.
Dans **Grp**,**Rings**,**Vec**$_k$ les isomorphismes sont les isomorphismes de groupes/anneaux/k-espaces vectoriels.
Dans un poset ou dans la catégorie simpliciale les seuls isomorphismes sont les identités.
Dans **Top** les isomorphismes sont les homémomorphismes.
Dans les espaces mesurables améliorés, les isomorphismes $(X, M_1, N_1) \to (Y, M_2, N_2)$ sont les classes d'équivalences contenant une application bijective f vérifiant que si $U \in M_1$, $f(U) \in M_2$ et si $V \in N_1$, $f(V) \in N_2$.

Définition 4 (Monomorphismes) *Un monomorphisme est un morphisme simplifiable à gauche, autrement dit si $f \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$, f est un monomorphisme si :*

$$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \forall g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}(X, Y) f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

De manière équivalente, f est un monomorphisme si pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ l'application définie ci dessous est injective :

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z), g \mapsto f \circ g$$

Dans **Sets** les monomorphismes sont les applications injectives. Dans les catégories concrètes (ensembles avec structures) tous les morphismes injectifs sont des monomorphismes. Mais ce ne sont pas toujours les seuls. Ce genre de problèmes peut par exemple arriver si on prend une catégorie d'objets qui vérifient "trop" de propriété. Un exemple classique est celui de la catégorie des groupes abéliens divisibles.

Définition 5 *Un groupe abélien G est divisible si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,$nG = G$.*

$\mathbb{Z}$ n'est pas divisible (clairement $n\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ si $n \neq 1$), et aucun des ses sous-groupes non triviaux ne l'est puisque ils sont tous isomorphes à $\mathbb{Z}$. En revanche $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont divisibles. D'autre part, l'image d'un groupe abélien divisible par un morphisme de groupes est un groupe abélien divisible (car si $f : G \to H$ est un morphisme et n un entier naturel non nul $nf(G) = f(nG) = f(G)$). On en déduit que le morphisme de quotient : $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un monomorphisme dans la catégorie des groupes abéliens divisibles. En effet soient g_1, g_2 des morphismes $H \to \mathbb{Q}$ avec H un groupe abélien divisible. $\pi \circ g_1 = \pi \circ g_2$ si et seulement si $\pi \circ (g_1 - g_2) = 0$. Mais alors $g_1 - g_2$ est un morphisme dont l'image est inclue dans le noyau de π, $im(g_1 - g_2) \subset \mathbb{Z}$. Mais le seul sous-groupe divisible de $\mathbb{Z}$ est le groupe trivial, donc $im(g_1 - g_2) = \{0\}$ et π est un monomorphisme dans la catégorie des groupes abéliens divisibles. Mais π n'est pas un monomorphisme dans la catégorie des groupes abéliens, car dans cette catégorie les monomorphismes sont exactement les morphismes injectifs.

Définition 6 (Epimorphismes) *Un épimorphismes est un morphisme simplifiable à droite, autrement dit si $g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, g est un épimorphisme si :*

$$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \forall f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(Y, Z), f_1 \circ g = f - 2 \circ g \Rightarrow f_1 = f_2$$

De manière équivalente, g est un épimorphisme si l'application définie ci-dessous est injective :

$$\mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z), f \mapsto f \circ g$$

Dans **Sets** les épimorphismes sont les applications surjectives. De la même manière que pour les monomorphismes, souvent les épimorphismes sont des surjections et dans la plupart des catégories qu'on verra les surjections sont des épimorphismes, mais ce ne sont pas toujours les seuls. Par exemple dans la catégorie des anneaux commutatifs, l'inclusion $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est un épimorphisme. En effet soit A un anneau commutatif, et f_1, f_2 deux morphismes d'anneaux $\mathbb{Q} \to A$ tels que $f_1 \circ i = f_2 \circ i$. Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\begin{aligned} f_1(\frac{a}{b}) &= f_1(\frac{1}{b}a) \\ &= f_1(\frac{1}{b})f_1(a) \\ &= f_1(\frac{1}{b})f_2(a) \\ &= f_1(\frac{1}{b})f_2(1)f_2(a) \\ &= f_1(\frac{1}{b})f_2(b)f_2(\frac{1}{b})f_2(a) \\ &= f_1(\frac{1}{b})f_1(b)f_2(\frac{a}{b}) \\ &= f_2(\frac{a}{b}) \end{aligned}$$

Donc $f_1 = f_2$ et i est un épimorphisme mais n'est pas surjectif.

Définition 7 (Catégorie opposée) *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie, on note $\mathscr{C}^{op}$ la catégorie opposée qui a les mêmes objets et telle que les morphismes vérifient $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$ et $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$. De manière informelle c'est la catégorie $\mathscr{C}$ dans laquelle on a inversé le sens des flèches.*

Les monomorphismes de $\mathscr{C}$ deviennent les épimorphismes de $\mathscr{C}^{op}$ et vice-versa.

2 Foncteurs

Dans cette section on introduit les objets principaux de notre théorie : les foncteurs qu'on peut voir comme des sortes de morphismes de catégories, on verra également les notions de transformation naturelle et d'adjonction.

Définition 8 *Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. Un foncteur (covariant) $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est l'association de tout objet X de $\mathscr{C}$ à un objet $F(X)$ de $\mathscr{D}$ et pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ de $\mathscr{C}$ un morphisme $F(f)$ dans $\mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ de telle sorte que :*
- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $F(Id_X) = Id_{F(X)}$
- $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $f \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$, $g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

Un foncteur contravariant est un foncteur $\mathscr{C} \to \mathscr{D}^{op}$

Exemples :
- Le foncteur identité $Id_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ défini par $F(X) = X$ et $F(f) = f$ pour tout objet X et morphisme f.
- Les foncteurs d'oubli **Grp** $\to$ **Sets**, **Rings** $\to$ **Sets**, $\mathbf{Vec}_k$ $\to$ **Sets**, **Top** $\to$ **Sets** qui envoient les objets sur les ensembles sous-jacents et les morphismes sur les mêmes fonctions considérées comme fonctions entre ensembles. Ce sont les foncteurs qui "oublient la structure supplémentaire sur les ensembles".
- Le foncteur associé à un objet X : $h^X : \mathscr{C} \to \mathbf{Sets}$ défini par $h^X(Y) = \mathrm{Hom}(X, Y)$ et pour $f \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$ $h^X(f) := \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z), g \mapsto f \circ g$.
- Le préfaisceau associé à un objet X : $h_X : \mathscr{C} \to \mathbf{Sets}^{op}$ défini par $h_X(Y) := \mathrm{Hom}(Y, X)$ et $h_X(f) := \mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Y, X), g \mapsto g \circ f$.

On verra par la suite avec le lemme de Yoneda que toute une partie de la théorie des catégories a pour but de trouver quels foncteurs ressemblent à un foncteur h_X.

Définition 9 (Catégorie Cat) *On définit la catégorie **Cat** des petites catégories. Les objets sont les petites catégories et les morphismes sont les foncteurs entre elles. La composition de foncteurs est définie de la façon suivante : si $F : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ et $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ sont des foncteurs, X et Y sont des objets de $\mathscr{C}$ et $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathscr{C}$, $F \circ G(X) := F(G(X))$ et $F \circ G(f) := F(G(f))$.*

Définition 10 (Transformation naturelle) *Soient $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle η entre F et G est la donnée pour tout objet X de $\mathscr{C}$ d'un morphisme $\eta_X : F(X) \to G(X)$ vérifiant pour tout* *morphisme de $\mathscr{C}$ $f : X \to Y$ l'égalité $\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X$. Autrement dit le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Si η_X est un isomorphisme pour tout X alors on dit qu'η est un isomorphisme naturel.

Justifions cette dénomination d'isomorphisme naturel par le fait que les foncteurs ont une structure de catégorie :

Proposition 1 *Il existe une catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ dont les objets sont les foncteurs $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et les morphismes sont les transformations naturelles. De plus les isomorphismes dans cette catégorie sont les isomorphismes naturels.*

Preuve : Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories, Pour tout foncteur F on note Id_F la transformation naturelle $F \to F$ donnée par $Id_{F,X} = Id_{F(X)}$. Pour un morphisme $f : X \to Y$, on a bien $Id_{F(Y)} \circ F(f) = F(f) \circ Id_{F(x)} = F(f)$ donc Id_F est bien une transformation naturelle.
Soient F, G, H des foncteurs $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$, η_{FG} une transformation naturelle de F dans G et η_{GH} une transformation naturelle de G dans H. On peut définir la composition $\eta_{GH} \circ \eta_{FG}$ par $(\eta_{GH} \circ \eta_{FG})_X = \eta_{GH,X} \circ \eta_{FG,X}$.
Si F et G sont deux foncteurs, $\eta : F \to G$ et $\mu : G \to F$, soit X un objet de $\mathscr{C}$. $(\eta \circ Id_F)_X = \eta_X \circ Id_{F(X)} = \eta_X$ et $(Id_F \circ \mu)_X = Id_{F(X)} \circ \mu_X = \mu_X$. Donc $\eta \circ Id_F = \eta$ et $Id_F \circ \mu = \mu$, on a vérifié l'axiome d'identité.
Soient F,G,H,I des foncteurs $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$,$\eta_{FG}$ une transformation naturelle de F dans G, η_{GH} une transformation naturelle de G dans H et η_{HI} une transformation naturelle de H dans I. Soit X un objet de $\mathscr{C}$, alors

$$((\eta_{HI} \circ \eta_{GH}) \circ \eta_{FG})_X = (\eta_{HI,X} \circ \eta_{GH,X}) \circ \eta_{FG,X} = \eta_{HI,X} \circ (\eta_{GH,X} \circ \eta_{FG,X}) = (\eta_{HI} \circ (\eta_{GH} \circ \eta_{FG}))_X$$

et donc

$$(\eta_{HI} \circ \eta_{GH}) \circ \eta_{FG} = \eta_{HI} \circ (\eta_{GH} \circ \eta_{FG})$$

ce qui montre que cette composition fait bien de $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ une catégorie.
Remarque : La composition ainsi définie entre transformations naturelles est appelée composition verticale. La catégorie Cat est ce qu'on appelle une 2-catégorie : elle a des objets (les catégories), des morphismes (les foncteurs), et des morphismes entre morphismes (les transformations naturelles). Il existe une autre notion de composition entre 2-morphismes qu'on nomme composition horizontale : si $\eta : F \Rightarrow G$ est une transformation naturelle entre deux foncteurs $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et $\epsilon : J \Rightarrow K$ est une transformation naturelle entre deux foncteurs $J, K : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$, on nomme composition horizontale de η et ϵ et on note $\epsilon * \eta$ la transformation naturelle $J \circ F \Rightarrow K \circ G$ dont la composante pour un objet X est donnée par

$$(\epsilon * \eta)_X = \epsilon_{G(X)} \circ J(\eta_X) = K(\eta_X) \circ \epsilon_{F(X)}$$

Nous n'utiliserons pas cette composition horizontale par la suite mais cela permet de donner un premier aperçu des catégories supérieures.

Définition 11 *On appelle préfaisceau sur $\mathscr{C}$ un foncteur contravariant $\mathscr{C} \to$ **Sets**. On a alors la catégorie des préfaisceaux : $\boldsymbol{Psh}(\mathscr{C}) := [\mathscr{C}^{op}, \boldsymbol{Set}]$.*

Définition 12 (Equivalence de catégorie) *On dit qu'un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est une équivalence de catégories s'il existe un autre foncteur $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ et des isomorphismes naturels $FG \simeq Id_{\mathscr{D}}$ et $GF \simeq Id_{\mathscr{C}}$.*

Un foncteur G tel que dans la définition est appelé quasi-inverse de F. Les équivalences de catégories sont très utiles car elles conservent toute la structure d'une catégorie. Lorsqu'elles mettent en relation des catégories d'objets à priori bien différentes elles fournissent un dictionnaire entre les deux qui permet de faire les maths dans une catégorie ou l'autre et d'obtenir des résultats dans les deux. Il n'est pas toujours facile de trouver explicitement un quasi-inverse d'un foncteur c'est pourquoi on utilise souvent une caractérisation garantissant l'existence du pseudo-inverse sans le calculer.

Définition 13 *Soit $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un foncteur. Le foncteur est dit :*
— *Fidèle si pour toute paire (X, Y) d'objets de $\mathscr{C}$ l'application $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y)), f \mapsto F(f)$ est injective.*

— *Plein si pour toute paire* (X,Y) *d'objets de* $\mathscr{C}$ *l'application* $\mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(F(X),F(Y)), f \mapsto F(f)$ *est injective.*
— *Pleinement fidèle s'il est plein et fidèle, i.e. pour toute paire* (X,Y) *d'objets de* $\mathscr{C}$ *l'application* $\mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(F(X),F(Y)), f \mapsto F(f)$ *est bijective.*
— *Essentiellement surjectif si pour tout* $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ *il existe* $X \in \mathscr{O}(X)$ *tel que* $F(X)$ *est isomorphe à* Y *dans* $\mathscr{D}$.

On peut maintenant énoncer le critère promis :

Proposition 2 *Un foncteur* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *est une équivalence de catégories si et seulement si il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.*

On a maintenant assez de vocabulaire pour énoncer le lemme de Yoneda :

Théorème 1 (Lemme de Yoneda よ) *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie,* X *un objet de* $\mathscr{C}$ *et* T *un foncteur* $\mathscr{C} \to \mathrm{Sets}$. *Alors il existe une bijection entre les transformations naturelles* $h^X \to T$ *et* $T(X)$ *donnée par la formule suivante :*

$$\text{よ} : \mathrm{Nat}(h^X, T) \to T(X)$$
$$\eta \mapsto \eta_X(Id_X)$$

En particulier si $T = h^Y$, *on obtient une bijection entre* $\mathrm{Nat}(h^X, h^Y)$ *et* $\mathrm{Hom}(Y,X)$

Preuve : Tout d'abord cette formule est bien définie : si η est une telle transformation naturelle η_X est une application de $h^X(X) = \mathrm{Hom}(X,X)$ vers $T(X)$. La bijectivité de cette application est une reformulation de la définition de transformation naturelle. En effet pour tout $Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et morphisme $f : Y \to Z$, si η est une transformation naturelle $h^X \to F$ on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X,Y) \arrow[r, "\eta_Y"] \arrow[d, "f\circ -"] & T(Y) \arrow[d, "T(f)"] \\
\mathrm{Hom}(X,Z) \arrow[r, "\eta_Z"] & T(Z)
\end{tikzcd}$$

En particulier si on pose $Y = X$, le diagramme nous dit que $\eta_Z(f \circ Id_X) = T(f) \circ (\eta_X(Id_X))$ donc $\eta_Z(f) = T(f)(\eta_X(Id_X))$. En particulier pour tout objet Z, η_Z est uniquement déterminée par $\eta_X(Id_X)$ et donc l'application définie est injective. D'autre part si $x \in T(X)$, en posant $\eta_Z(f) = T(f)(x)$, on obtient une transformation naturelle $h^X \to T$ telle que $\eta_X(Id_X) = x$ puisque $T(Id_X) = Id_{T(X)}$. Donc notre application est surjective.

Corollaire 1 (Plongement de Yoneda) *Le foncteur* よ $: \mathscr{C} \to \mathrm{Pshf}(\mathscr{C})$, $X \to h^X$ *et avec pour* $f : X \to Y$, よ$(f) = - \circ f : h^X \to h^Y$ *est pleinement fidèle, et définit donc une équivalence de catégories entre* $\mathscr{C}$ *et une sous-catégorie pleine des préfaisceaux sur* $\mathscr{C}$.

3 Adjonction de foncteurs

On se donne deux catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. On prend un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. On notera cela de la manière suivante :

$$F : \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} : G$$

.

Définition 14 *Soit* $F : \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D}$ *un couple de foncteurs, on dit que* F *est un adjoint à gauche de* G *et que* G *est un adjoint à droite de* F, *s'il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs* $\mathrm{Hom}(F(-),-)$ *et* $\mathrm{Hom}(-,G(-))$. *Autrement dit, pour toute paire d'objet,* $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ *et* $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ *on a une bijection* $\phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}(F(X),Y) \to \mathrm{Hom}(X,G(Y))$ *telles que pour tout* X, X', Y, Y' *et morphismes* $f : X \to X'$ *et* $g : Y \to Y'$ *le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F(X),Y) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(F(f),g)"] \arrow[d, "\phi_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}(F(X'),Y') \arrow[d, "\phi_{X',Y'}"] \\
\mathrm{Hom}(X,G(Y)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(f,G(g))"] & \mathrm{Hom}(X',G(Y'))
\end{tikzcd}$$

Exemples de foncteurs adjoints : Si F et G sont des foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre, alors F et G sont chacun l'adjoint à gauche et à droite de l'autre. En effet on a alors pour tout X, Y, $\mathrm{Hom}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}(GF(X), G(Y))$ car G est pleinement fidèle et $\mathrm{Hom}(GF(X), G(Y)) \simeq \mathrm{Hom}(X, G(Y))$ car $GF \simeq Id_{\mathscr{C}}$.
Foncteur objet libre : soit K un corps, X un ensemble. On peut définir un espace vectoriel $F(X)$ dont une base est indexée par X de la manière suivante : $F(X) := \mathrm{Fun}(X, K)$. Une base est alors donnée par les éléments $e_x : X \to K$ avec $e_x(y) = \delta_{xy}$. Si $f : X \to Y$ est une fonction, on définit une application linéaire $F(f) : X \to Y$ par $F(f)(e_x) = e_{f(x)}$. On vérifie qu'on obtient ainsi un foncteur Sets $\to$ Vec_K. Mais ce foncteur vérifie de plus la propriété suivante : soit X un ensemble et Y un k-espace vectoriel, alors le choix d'une application linéaire $\varphi : F(X) \to Y$ est équivalent au choix d'un élément $\varphi(e_x) \in Y$ pour tout élément $x \in X$. On a donc la bijection naturelle suivante :

$$\mathrm{Hom}_K(F(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(X, Y)$$
$$\varphi \mapsto (x \mapsto \varphi(e_x))$$

On vient donc de montrer que F le foncteur objet libre est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli.