Classification des représentations irréductibles de dimension finie du Yangien

Jérôme Milot

Objectif

L'objectif de ce pdf, rédigé au cours de ma première année de thèse, est de caractériser les représentations irréductibles de dimension finie du Yangien d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il s'agit d'un résultat connu, par exemple énoncé dans [CP90], mais sa démonstration algébrique est toujours considérée comme "analogue au cas de l'algèbre affine quantique". On suit ici la démonstration de [Mol07] qui établit le résultat pour $\mathfrak{gl}_N$ afin de déduire le résultat pour tout algèbre de Lie semi-simple. Pour ce faire, on commence dans un premier temps par démontrer que toute représentation irréductible de dimension finie de $Y(\mathfrak{g})$ est un module dit de plus haut l-poids. L'objectif est ensuite de trouver une caractérisation des représentations irréductibles de plus haut l-poids qui sont de dimension finie.

Contexte 0.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, complexe, de dimension finie et soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On note k la dimension de $\mathfrak{h}$ et $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ une base de son dual $\mathfrak{h}^*$. De plus, $\mathfrak{h}^*$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique invariante et non-dégénérée $(,)$ et on définit $d_i := \frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}$.*

Le théorème final est le suivant.

Théorème 0.2 (Classification des représentations irréductibles de dimension finie du Yangien)**.** *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, complexe, de dimension finie. Soit L une représentation irréductible de $Y(\mathfrak{g})$. Alors L est dimension finie si et seulement il existe un unique k- uplet de polynômes unitaires $(P_1(u),\dots,P_k(u))$ tel que L est isomorphe au module de plus haut l-poids*

$$L\left(\frac{P_1(u+d_1)}{P_1(u)},\dots,\frac{P_k(u+d_k)}{P_k(u)}\right).$$

Voici notre plan d'attaque pour démontrer ce résultat :

1. **Démonstration de la condition nécessaire.** On souhaite prouver que si la représentation irréductible est de dimension finie, alors il existe les polynômes du théorème principal. On procède en plusieurs étapes.

   i) **Toute représentation irréductible de dimension finie est de plus haut l-poids.** On définit la notion de plus haut l-poids dans le cadre de la présentation RTT, et on s'en sert pour caractériser les représentations irréductibles de dimension finie du Yangien. Ainsi, il ne reste qu'à exhiber quels modules de plus haut l-poids sont de dimension finie.

ii) **Théorème pour $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$.** C'est pour cette algèbre de Lie que la présentation RTT est la plus simple. On utilise encore la notion de plus haut l-poids mais aussi sa notion duale, le co-plus haut l-poids (pour $\mathfrak{gl}_N$ quelconque, tant qu'à faire) pour caractériser la dimension finie. On en déduit une autre caractérisation des modules irréductibles de dimension finie pour $Y(\mathfrak{gl}_2)$.

iii) **Corollaire pour $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.** On se sert de ce qui précède et du lien entre le Yangien de $\mathfrak{sl}_2$ et $\mathfrak{gl}_2$ pour établir le résultat pour $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

iv) **Démonstration de la condition nécessaire.** On démontre enfin la condition nécessaire en prouvant que, pour une algèbre de Lie semi-simple quelconque, on peut se ramener au cas de $\mathfrak{sl}_2$ pour conclure.

2. **Démonstration de la condition suffisante.** On revient aux fondamentaux en utilisant les modules intégrables pour prouver que la représentation est de dimension finie, cette fois-ci en exploitant la présentation courante.

1 Sens direct

Nous commençons donc par prouver le sens direct : si la représentation irréductible est de dimension finie, alors c'est une représentation de plus haut l-poids paramétrée par des polynômes unitaires.

On introduit d'abord la notion de plus haut l-poids (et de co-plus haut l-poids) pour la présentation RTT du Yangien.

On est alors armé pour démontrer une caractérisation de la finitude via des polynômes pour $Y^{\mathrm{RTT}}(\mathfrak{gl}_2)$. On en déduit le résultat pour $Y^c(\mathfrak{sl}_2)$ et on conclut la démonstration du sens direct en prouvant qu'il suffit d'avoir le résultat pour $Y^c(\mathfrak{sl}_2)$ pour l'étendre à $Y^c(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie quelconque.

1.1 Théorie du plus haut l-poids pour $Y^{\mathbf{RTT}}(\mathfrak{gl}_N)$

1.1.1 Modules de plus haut l-poids

On commence par définir la notion de plus haut l-poids dans le cadre de la RTT-présentation. Cette sous-sous-section est largement inspirée de [Mol07]

Définition 1.1. *On considère une famille de série formelles de la forme* $1 + u^{-1}\,\mathbb{C}[\![u^{-1}]\!]$ *:* $\lambda(u) := (\lambda_1(u), \ldots, \lambda_N(u))$.

Une représentation L de $Y(\mathfrak{gl}_N)$ est dite ***de plus haut l-poids*** $\lambda(u)$ *s'il existe un vecteur non-nul $\xi \in L$ qui vérifie :*

1. $Y(\mathfrak{gl}_N) \cdot \xi = L$ *(ξ engendre L) ;*

2. *Pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant N$: $t_{i,j}(u)\cdot\xi = 0$ (on dit alors que ξ est un **vecteur primitif**) ;*

3. *pour tout i : $t_{i,i}(u)\cdot\xi = \lambda_i(u)x_i$ (on dit alors que ξ est un vecteur de **l-poids** $\lambda(u)$).*

On dit que ξ est un vecteur de plus haut l-poids $\lambda(u)$ ou encore que ξ est un générateur de L.

Remarque La première condition est appelée condition de **cyclicité**.
Remarque Il existe également une notion de plus haut l-poids lorsqu'on travaille avec la présentation courante du Yangien. Il y a bien évidemment une correspondance entre les deux. Nous y reviendrons plus tard, dans la sous-section 1.4.3.

On définit, comme dans le cas classique, le module de Verma pour construire des représentations de plus haut l-poids.

Définition 1.2. *On considère une famille de série formelles de la forme $1 + u^{-1}\,\mathbb{C}[\![u^{-1}]\!]$: $\lambda(u) := (\lambda_1(u), \ldots, \lambda_N(u))$.*

*Le **module de Verma** $M(\lambda(u))$ est le quotient de $Y(\mathfrak{gl}_N)$ par son idéal gauche engendré par les coefficients des séries formelles $t_{i,j}(u)$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant N$ et $t_{i,i}(u) - \lambda_i(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$.*

Proposition 1.3. *$M(\lambda(u))$ est un $Y(\mathfrak{gl}_N)$-module de plus haut l-poids $\lambda(u)$, de vecteur de plus haut l-poids $1_{\lambda(u)}$ (l'image de $1_{Y(\mathfrak{gl}_N)}$ par passage au quotient). De plus, les éléments*

$$t^{(r_1)}_{j_1,i_1}\cdots t^{(r_m)}_{j_m,i_m}\cdot 1_{\lambda(u)}$$

(ordonnés avec une relation d'ordre donnée[1]) avec $1 \leqslant i_k < j_k \leqslant N$, $m \in \mathbb{N}$ forment une base de $M(\lambda(u))$.

On souhaite maintenant utiliser la théorie des poids dans le cadre classique pour faciliter notre étude. Nous allons le faire dans le cas particulier du module de Verma, mais c'est vrai pour tout $Y(\mathfrak{gl}_N)$-module.

On rappelle que l'on dispose du morphisme d'inclusion de $\mathfrak{gl}_N$ dans $Y(\mathfrak{gl}_N)$ permettant de voir le module de Verma comme un $\mathfrak{gl}_N$-module :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C}) & \hookrightarrow & Y(\mathfrak{gl}_N) \\ E_{i,j} & \mapsto & t^{(1)}_{i,j} \end{array}.$$

On peut dès lors introduire la notion de poids : pour un N-uplet $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$ de complexes, on définit

$$M(\lambda(u))_\mu := \{x \in M(\lambda(u))|\quad E_{i,i}\cdot x = \mu_i x : i \in \{1, \ldots, N\}\}.$$

Si $(M(\lambda(u)))_\mu \neq \{0\}$, on dit que μ est un poids de $M(\lambda(u))$.

1. Il en existe deux canoniques, se référer à [Mol07] par exemple

On note $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Cartan de $\mathfrak{gl}_N$ (la sous-algèbre de Lie engendrée par les $E_{i,i}$) et on note $\mathfrak{h}^*$ son dual. On considère alors la base $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N)$ de $\mathfrak{h}^*$, base duale de $(E_{i,i})_{i \in \{1,\ldots,N\}}$.

On munit l'espace des poids d'un **ordre partiel** : un poids α est dit inférieur à un poids β (noté $\alpha \leqslant \beta$) si $\beta - \alpha$ est une $\mathbb{N}$-combinaison linéaire de $\epsilon_i - \epsilon_j$ avec $i < j$. On peut alors voir que le module de Verma est un module de poids, et qu'il possède un unique sous-module propre maximal (la somme de tous les sous-modules propres).

Exemple 1. *Si un vecteur ξ est de poids μ, alors on constate, pour $i \in \{1, \ldots, N\}$:*

$$E_{i,i} \cdot (t_{k,l}(u) \cdot \xi) = \mu_i t_{k,l} \cdot \xi + \delta_{k,i} t_{k,l}(u) \cdot \xi - \delta_{i,l} t_{k,l}(u) \cdot \xi.$$

Ainsi, les coefficients de la série $t_{k,l}(u) \cdot \xi$ sont de poids $\mu + \epsilon_k - \epsilon_l$.

On constate en particulier que si $k < l$, alors le poids de $t_{k,l}(u) \cdot \xi$ est supérieur au poids de ξ. Si $l < k$, il lui est inférieur, et si $k = l$, les deux poids sont égaux.

On définit donc le module irréductible $L(\lambda(u))$, quotient de $M(\lambda(u))$ par ce sous-module maximal. Ces modules donnent une description des modules irréductibles de dimension finie du Yangien et une (petite) partie de notre théorème principal.

Théorème 1.4. *Toute représentation irréductible de dimension finie L du Yangien est une représentation de plus haut l-poids. De plus, L contient un unique (à scalaire près) vecteur de plus l-haut poids.*

Démonstration. On introduit l'espace vectoriel des vecteurs primitifs de L :

$$L^0 := \{\xi \in L| \quad t_{i,j}(u) \cdot \xi = 0 : 1 \leqslant i < j \leqslant N\}.$$

On procède en trois étapes : on prouve d'abord que L^0 n'est pas nul, puis qu'il est invariant par l'action des générateurs diagonaux du Yangien ($t^{(r)}_{k,k}$ pour $k \in \{1, \ldots, N\}, r \in \mathbb{N}$) et on conclut via un argument de codiagonalisation.

Étape 1 : Montrons que L^0 n'est pas nul.

On considère les poids de L (L étant donc considéré en tant que $\mathfrak{gl}_N$-module). On constate que l'ensemble des poids n'est pas vide, d'après la théorie des modules de poids de $\mathfrak{gl}_N$. De plus, l'ensemble de ces poids est fini - car L est de dimension finie - et admet donc un élément maximal pour la relation d'ordre définie précédemment. On note μ un tel poids, et on considère $\xi \in (M(\lambda(u)))_\mu$ non nul.

Alors, $\xi \in L^0$. En effet, d'après l'exemple précédent, les coefficients de $t_{i,j}(u) \cdot \xi$ sont de poids $\mu + \epsilon_i - \epsilon_j$. Ainsi, si $i < j$, $t_{i,j}(u) \cdot \xi$ donne lieu à un poids supérieur à celui de ξ, ce qui est absurde par maximalité de μ.

Étape 2 : Montrons que L^0 est invariant sous l'action des $t^{(r)}_{k,k}$.

Soient $k \in \{1, \ldots, N\}$ et $\xi \in L^0$. On utilise les séries formelles.

Soit $i < j$. On souhaite regarder si $t_{i,j}(u) \cdot (t_{k,k}(v) \cdot \xi) = 0$. On constate que cela revient à regarder si $[t_{i,j}(u), t_{k,k}(v)] \cdot \xi$ est nul (puisque $t_{k,k}(v) \cdot t_{i,j}(u) \cdot \xi = 0$). Or :

$$\begin{aligned}(u-v)\,[t_{i,j}(u), t_{k,k}(v)] &= t_{k,j}(u)t_{i,k}(v) - t_{k,j}(v)t_{i,k}(u) \\ &= t_{i,k}(v)t_{k,j}(u) - t_{i,k}(u)t_{k,j}(v)\end{aligned}$$

la deuxième égalité provenant du fait que

$$(u-v)\,[t_{i,j}(u), t_{k,k}(v)] = (v-u)\,[t_{k,k}(v), t_{i,j}(u)]\,.$$

Mais alors, si $i < k$, $(t_{k,j}(u)t_{i,k}(v) - t_{k,j}(v)t_{i,k}(u)) \cdot \xi = 0$, et si $i \geqslant k$, alors $j > k$, donc $(t_{i,k}(v)t_{k,j}(u) - t_{i,k}(u)t_{k,j}(v)) \cdot \xi = 0$. Finalement, $t_{i,j}(u) \cdot (t_{k,k}(v) \cdot \xi) = 0$, et donc en particulier $t_{k,k}^{(r)} \cdot \xi = 0$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Étape 3 : Arguments de codiagonalisation et poids

Ainsi, les $t_{k,k}^{(r)}$ commutent deux à deux en tant qu'opérateurs sur L^0. On peut donc considérons un vecteur propre commun $\xi \in L^0$, qui est un vecteur de plus haut l-poids pour L.

En effet :

- $L \cdot \xi = L$, car L est irréductible ;
- ξ est un vecteur de l-poids car c'est un vecteur propre commun aux $t_{k,k}^{(r)}$;
- ξ est un vecteur primitif puisque dans L^0.

Ainsi, L est un module de plus haut l-poids et ξ est un vecteur de plus haut l-poids de L.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que tout autre vecteur de plus haut l-poids est proportionnel à ξ.

Or, d'après la proposition 1.1.1, L est engendré en tant qu'espace vectoriel par les éléments de la forme

$$t_{j_1,i_1}^{r_1} \dots t_{j_m,i_m}^{r_m} \cdot \xi$$

(les termes du produit étant ordonnées) avec $i_k < j_k$.

Mais alors, les relations

$$[E_{i,i}, t_{k,l}] = \delta k, i t_{i,l}^{(r)} - \delta_{i,l} t_{k,i}^{(r)}$$

montrent que ces éléments sont de poids strictement inférieur à μ, sauf s'ils sont colinéaires à ξ. Ainsi, les vecteurs de poids μ sont colinéaires à ξ.

□

La démonstration précédente permet de déduire :

Corollaire 1.4.1. *L'espace des vecteurs primitifs d'un module de plus haut l-poids est une droite vectorielle, engendrée par le vecteur de plus haut l-poids.*

Nous avons ainsi une description des représentations irréductibles de dimension finie du Yangien. Néanmoins, toutes les représentations de plus haut l-poids ne sont pas de dimension finie, on souhaite donc obtenir un moyen de classifier celles-ci.

Le corollaire précédent nous donne une possible piste à explorer : un module de plus haut l-poids de dimension finie a pour espace de vecteurs primitifs une droite vectorielle. Et si cela suffisait pour caractériser la finitude d'un espace de plus haut l-poids ?

1.1.2 Le dual du plus haut l-poids : le co-plus haut l-poids

On commence par formaliser la notion qui nous intéresse. Cette sous-sous-section réadapte les résultat de [Mol07] avec le langage de co-plus haut l-poids.

Définition 1.5. *On considère une famille de série formelles de la forme* $1 + u^{-1}\,\mathbb{C}[\![u^{-1}]\!]$ *:* $\lambda(u) := (\lambda_1(u), \ldots, \lambda_N(u))$.

Une représentation L *de* $Y(\mathfrak{gl}_N)$ *est dite de* ***co-plus haut l-poids*** $\lambda(u)$ *s'il un vecteur non nul* ξ *qui vérifie :*

1. *L'espace des vecteurs primitifs* $\{\eta \in L \mid \quad t_{i,j}(u)\cdot\eta = 0 : \forall 1 \leqslant i < j \leqslant N\}$ *est de dimension* 1 *;*
2. *Pour tous* $1 \leqslant i < j \leqslant N$ *:* $t_{i,j}(u)\cdot\xi = 0$ *(*ξ *est un* ***vecteur primitif****) ;*
3. *pour tout* i *:* $t_{i,i}(u)\cdot\xi = \lambda_i(u)x_i$ *(*ξ *est un vecteur de* ***l-poids*** $\lambda(u)$*).*
4. *On a la décomposition* $L = \bigoplus_{\mu\leqslant\mu_0} L_\mu$ *pour des* $\mu \in \mathfrak{h}^*$ *et* $\dim(L_\mu) < +\infty$ *pour tout* μ *et* $L_{\mu_0} = \mathbb{C}\,\xi$.

On dit que ξ *est un vecteur de co-plus haut l-poids* $\lambda(u)$*.*

Remarque

- La première condition est également appelée condition de **cocyclicité**.
- La quatrième condition est également vérifiée pour un module de plus haut l-poids : il s'agit dans ce cas d'une conséquence de la définition et non d'une condition de celle-ci. De plus, elle sera toujours vérifiée dans le cadre des représentations qui nous intéressent.

On donne tout de suite une autre caractérisation de la co-cyclicité (qui, comme on le verra, donne du sens à l'appellation "co").

Proposition 1.6. *La condition de cocyclicité est équivalente, sous réserve des autres conditions, à la condition :*

1'. Pour tout sous-$Y(\mathfrak{gl}_N)$*-module propre non-nul* $M \subset L, \xi \in M$*.*

Démonstration. 1. $\Rightarrow$ 1'. : Soit ξ satisfaisant la définition de vecteur de co-plus haut l-poids $\lambda(u)$. Soit M un sous-module propre non-nul de L. Alors, via la condition *iv.*, on a la décomposition

$$M = \bigoplus_{\mu \leqslant \mu_0} M_\mu.$$

En particulier, M contient un vecteur primitif (par majoration des poids possibles). Or, tous les vecteurs primitifs sont proportionnels à ξ par hypothèse, d'où $\xi \in M$.

1'. $\Rightarrow$ 1. : Cette fois-ci, on suppose que le vecteur primitif ξ de l-poids $\lambda(u)$ est contenu dans tout sous-module propre non-nul. Montrons que les vecteurs primitifs forment une droite vectorielle.

On considère ζ un autre vecteur primitif. Soit le $Y(\mathfrak{gl}_N)$-module $M = Y(\mathfrak{gl}_N) \cdot \zeta$. Puisque ζ est un vecteur primitif, on a en fait $M = Y(\mathfrak{gl}_N)^- \cdot \zeta$. Or, par hypothèse, $\xi \in M$. En particulier, ξ est de poids inférieur à celui de ζ. Or ξ est de poids maximal μ_0 : nécessairement, les deux vecteurs sont de même poids μ_0. Puisque L_{μ_0} est de dimension 1, le résultat est prouvé. $\square$

Mettons tout de suite en évidence la cohérence de la terminologie.

Définition 1.7. *Pour une représentation* $L = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} L_\mu$ *avec* $\dim L_\mu < \infty$*, on définit son dual* $L^* = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} (L_\mu)^*$.

Remarque On constate que $(L^*)^* = L$.

On peut alors munir cet espace d'une structure de $Y(\mathfrak{gl}_N)$-module via l'action, pour $\eta \in L, \omega \in L^*, 1 \leqslant i,j \leqslant N$:

$$(t_{i,j}(u) \cdot \omega)(\eta) = \omega(t_{N-i-1,N-j-1}(-u) \cdot \eta).$$

Proposition 1.8. *Soit* L *un* $Y(\mathfrak{gl}_N)$*-module, tel que* $L = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} L_\mu$ *avec* $\dim L_\mu < +\infty$.

Alors L *est de plus haut l-poids si et seulement si* L^* *est de co-plus haut l-poids.*

De plus, si L *est plus haut l-poids (resp. co-plus haut l-poids)* $\lambda(u) = (\lambda_1(u), \ldots, \lambda_N(u))$*, alors* L^* *est co-plus haut l-poids (resp. plus haut l-poids)* $\varphi(\lambda(u)) := (\lambda_N(-u), \ldots, \lambda_1(-u))$.

Remarque Puisque $(L^*)^* = L$, il est nécessaire que φ soit une involution, ce qui est bien le cas.

Démonstration. $\Rightarrow$ Supposons que L est un module de plus haut l-poids $\lambda(u)$. Montrons chacune des trois conditions de la définition de module de co-plus haut l-poids $(\lambda_N(-u), \ldots, \lambda_1(-u))$ pour L^* (la quatrième étant immédiate). Soit $\zeta \in L$ vecteur de plus haut l-poids $\lambda(u)$. On définit au passage $\zeta^* \in L^*$ par $\zeta^*(\zeta) = 1$ et $\zeta^*(\eta) = 0$ si η est de poids différent de $\lambda(u)$ (grâce à la condition de cyclicité de L, on sait les vecteurs de l-poids $\lambda(u)$ sont colinéaires à ζ).

1. **Co-cyclicité :** soit ω vecteur primitif de L^*, distinct de 0. Prouvons que ω est colinéaire à ζ^*.

   En effet, pour $i < j$ et $\eta \in L$, on a :

   $$0 = (t_{i,j}(u) \cdot \omega)(\eta) = \omega\left(t_{N-i+1,N-j+1}(-u) \cdot \eta\right).$$

   Ceci est vrai pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant N$. En particulier, pour tous $1 \leqslant k < l \leqslant N$, on a $\omega(t_{l,k} \cdot \eta) = 0$.

   On a donc $\omega(\eta) = 0$ pour tout $\eta \in L$, donc vrai pour tout η de poids $< \lambda(u)$ (car $L = Y^- \cdot \zeta$).

   Puisque $\omega \neq 0$, on a nécessairement $\omega(\xi) \neq 0$, et donc $\omega = \omega(\zeta)\zeta^*$.

2. **Vecteur primitif :** Soient $i < j$, $\eta \in L$. Alors :

   $$(t_{i,j}(u) \cdot \zeta^*)(\eta) = \zeta^*\left(t_{N-i+1,N-j+1}(-u) \cdot \eta\right).$$

   Le poids de $t_{N-i+1,N-j+1}(-u)\cdot\eta$ étant nécessairement strictement inférieur à celui de η, cet élément n'est pas de plus haut l-poids $\lambda(u)$, d'où $t_{i,j}(u) \cdot \zeta^* = 0$.

3. **l-poids** $(\lambda_N(-u), \dots, \lambda_1(-u))$ **:** Soit η de l-poids μ. Alors :

   $$\begin{aligned}(t_{i,i}(u) \cdot \zeta^*)(\eta) &= \zeta^*\left(t_{N-i+1,N-i+1}(u) \cdot \eta\right) \\ &= \mu_{N-i+1}(-u)\zeta^*(\eta) \\ &= \lambda_{N-i+1}(-u)\zeta^*(\eta)\end{aligned}$$

   car $\zeta^*(\eta) = 0$ si $\mu \neq \lambda$ d'où le résultat.

$\Leftarrow$ On suppose cette fois L de co-plus haut l-poids $\lambda(u)$ et on montre que L^* est de plus haut l-poids $(\lambda_N(-u), \dots, \lambda_1(-u))$ (on peut raisonner avec L au lieu de L^* grâce à la remarque précédant la proposition).

1. **Cyclicité :** Montrons que $Y(\mathfrak{gl}_N) \cdot \zeta^* = L^*$. Pour ce faire, on note $M := Y(\mathfrak{gl}_N) \cdot \zeta^*$, et on suppose par l'absurde que $M \neq L$.

   On considère alors

   $$M^\perp := \{x \in L \mid \quad \omega(x) = 0 \quad \forall \omega \in M\}.$$

   Déjà, on constate que $M^\perp$ est un module de $Y(\mathfrak{gl}_N)$. De plus, il s'agit d'un sous-module propre non nul car $M \neq L$. Par la deuxième propriété de cocyclicité de la proposition 1.6, on obtient donc $\xi \in M^\perp$. Mais alors, puisque $\xi^* \in M$, on a $\xi^*(\xi) = 0$, ce qui est absurde, d'où le résultat.

2. **Vecteur primitif :** Soient $i < j$, $\eta \in L$. Alors :

   $$(t_{i,j}(u) \cdot \xi^*)(\eta) = \xi^*\left(t_{N-i-1,N-j-1}(-u) \cdot \eta\right).$$

   Ce terme est nul, sauf si $t^{(r)}_{N-i-1,N-j-1} \cdot \eta$ est du même poids que ξ. Or ξ est de poids maximal : ce n'est donc pas possible, car sinon η serait de poids strictement supérieur à ξ.

3. **l-poids :** Le raisonnement est le même que pour le sens direct.

□

On termine ce panorama sur la théorie du plus haut l-poids par le résultat qui nous intéressait : la caractérisation des représentations irréductibles.

Théorème 1.9. *Un $Y(\mathfrak{gl}_N)$-module L de dimension finie. Alors L est irréductible si et seulement si L est un module de plus haut l-poids et de co-plus haut l-poids.*

Démonstration. $\Rightarrow$ Cette implication a déjà été démontrée, il s'agit du théorème 1.4 (et de son corollaire).

$\Leftarrow$ Soit L un module de plus haut l-poids $\lambda(u)$ et de co-plus haut l-poids $\tilde{\lambda}(u)$, et soit ζ un vecteur de plus haut l-poids.

Soit M un sous-$Y(\mathfrak{gl}_N)$-module de L non-nul. Par $1'$. du critère de cocyclicité, on sait que $\zeta \in M$. En particulier, puisque M est module, $Y(\mathfrak{gl}_N) \cdot \zeta \subset M$. Or, par cyclicité de L, on a $Y(\mathfrak{gl}_N) \cdot \zeta = L$, d'où $M = L$, et donc L est irréductible.

□

1.2 Les représentations d'évaluations

Pour étudier les représentations irréductible de dimensions finies du Yangien, nous allons nous ramener à des représentations agréables à étudier et qui auront le bon goût de servir de briques élémentaires pour toutes les autres dans le cas : les représentations d'évaluation.

Pour ce faire, maintenant que nous avons vu les $Y(\mathfrak{gl}_N)$-modules comme des $\mathfrak{gl}_N$-modules via le morphisme d'inclusion, nous allons regarder ce qu'il se passe dans le sens inverse via le morphisme d'algèbre dit **d'évaluation** :

$$\begin{array}{ccc} Y(\mathfrak{gl}_N) & \to & \mathfrak{gl}_N \\ t_{i,j}(u) & \mapsto & 1 + u^{-1}E_{i,j} \\ t_{i,j}^{(r)} & \mapsto & \delta_{r,0} + E_{i,j}\delta_{r,1} \end{array} .$$

Considérons un $\mathfrak{gl}_N$-module de plus haut poids $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, noté $L(\lambda)$. Pour rappel, cela signifie que $L(\lambda)$ est engendré par un vecteur ζ, tel que $E_{i,j} \cdot \zeta = 0$ pour $i < j$, et $E_{i,i} \cdot \zeta = \lambda_i \zeta$.

On peut alors regarder $L(\lambda)$ comme un $Y(\mathfrak{gl}_N)$-module via le morphisme d'évaluation. Plus précisément, les générateurs $t_{i,j}^{(1)}$ agissent sur $L(\lambda)$ comme les $E_{i,j}$ associés, et tous les $t_{i,j}^{(r)}$ pour $r > 1$ agissent de manière triviale.

On garde la même notation pour $L(\lambda)$ vu comme $Y(\mathfrak{gl}_N)$-module, mais on l'appelle alors **module d'évaluation**.

Exemple 2. *Plaçons-nous dans le cas $N = 2$. Dans ce cas, un $\mathfrak{gl}_2$-module est de la forme $L(\alpha, \beta)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

On sait alors, d'après l'étude des représentatiosn de $\mathfrak{gl}_2$ dans le cadre classique, que $L(\alpha, \beta)$ est de dimension finie si et seulement si $\alpha - \beta \in \mathbb{N}$ (et dans ce cas, sa dimension est égale à $\alpha - \beta + 1$, une base étant donnée par les $\left(E_{2,1}^r\right)_{0 \leqslant r \leqslant \alpha - \beta}$.

Il est alors clair que $L(\lambda)$ est également un module de plus haut l-poids $\lambda(u) = (\lambda_1(u), \ldots, \lambda_N(u))$ où $\lambda_i(u) := 1 + \lambda_i u^{-1}$.

Si L et M sont deux $Y(\mathfrak{gl}_N)$-modules, on peut munir l'espace vectoriel $L \otimes M$ d'une structure de $Y(\mathfrak{gl}_N)$-module via le coproduit de $Y(\mathfrak{gl}_N)$:

$$y \cdot (\xi \otimes \eta) = \Delta(y) \cdot (\xi \otimes \eta)$$

avec $y \in Y(\mathfrak{gl}_N)$, $\xi \in L$ et $\eta \in M$.

Puisque le coproduit est coassociatif, on peut définir sans ambiguïté le produit tensoriel de plusieurs modules de la forme

$$L := L(\lambda^{(1)}) \otimes \cdots \otimes L(\lambda^{(k)}).$$

On note ζ_m le vecteur de plus haut poids de $L(\lambda^{(m)}$ et on pose

$$\zeta = \zeta_1 \otimes \cdots \otimes \zeta_k.$$

On souhaiterait évidemment que la structure de plus haut poids soit compatible avec le produit tensoriel de représentations. C'est effectivement le cas.

Proposition 1.10. *Le sous-module $Y(\mathfrak{gl}_N) \cdot \zeta$ de L est un module de plus haut l-poids $(\lambda_1(u), \ldots, \lambda_N(u))$ et de vecteur de plus haut l-poids ζ, avec*

$$\lambda_i(u) = (1 + \lambda_i^{(1)} u^{-1}) \ldots (1 + \lambda_i^{(k)} u^{-1}).$$

Démonstration. Puisque ζ engendre évidemment $Y(\mathfrak{gl}_N) \cdot \zeta$, il suffit de vérifier que ce vecteur est primitif et de l-poids $(\lambda_1(u), \ldots, \lambda_N(u))$.

Commençons par exprimer l'action des $t_{i,j}(u)$ sur les éléments de $L(\lambda^1) \otimes \cdots \otimes L(\lambda^k)$.

$$t_{i,j}(u) \cdot (\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k) = \sum_{a_1, \ldots, a_{k-1}} t_{i,a_1}(u) \cdot \eta_1 \otimes \cdots \otimes t_{a_{k-1},j}(u) \cdot \eta_k$$

où les a_l varient de 1 à N.

Si $i < j$, alors, en notant $a_0 := i$ et $a_k = j$, il existe un $l \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $a_{l-1} < a_l$ (sinon, $\leqslant j$). Mais alors, $t_{a_{l-1},a_l} \cdot \zeta_l = 0$, donc $t_{i,j}(u) \cdot \zeta = 0$. En particulier, ζ est bien un vecteur primitif.

Si $i = j$, le raisonnement est presque le même, sauf que le terme pour lequel tous les a_l valent i n'est pas nul. Il s'ensuit :

$$t_{i,i}(u) \cdot \zeta = (1 + \lambda_i^{(1)} u^{-1}) \ldots (1 + \lambda_i^{(k)} u^{-1})$$

d'où le résultat. □

On aimerait maintenant s'assurer que, dans le cas où L est irréductible et de dimension finie, l'ordre des facteurs du produit tensoriel n'importe pas.

Proposition 1.11. *Supposons que L est un module irréductible.*

Alors tous les modules issus d'une permutation dans l'ordre des facteurs de L sont isomorphes.

Démonstration. Soit L' un module obtenu via une permutation des facteurs de L. D'après ce qui précède, le sous-module de L' généré par le produit tensoriel des vecteurs de plus haut l-poids des $L^{(m)}$ est un module de plus haut l-poids $(\lambda_1(u), \ldots, \lambda_N(u))$. Or, L étant irréductible, cela signifie que ce sous-module de L' est isomorphe à L. Puisque L et L' sont de même dimension, on en déduit que les deux modules sont isomorphes. □

On dispose également d'une description de l'action de certains générateurs du Yangien sur les produits tensoriels de modules d'évaluation. Dans le cas simple d'un module d'évaluation, on a vu que tous les générateurs d'ordre $r > 1$ agissaient trivialement. Ce résultat se généralise ainsi :

Proposition 1.12. *Tout générateur $t_{i,j}^{(r)}$ de $Y(\mathfrak{gl}_N)$ avec $r > k$ agit trivialement sur L.*

Démonstration. Par définition des modules d'évaluation, pour tout $\eta_m \in L(\lambda^m)$, $t_{i,j}(u) \cdot \eta_m$ est un polynôme en u^{-1} de degré au plus 1. Mais alors, $t_{i,j}(u) \cdot (\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k)$ est un polynôme de degré au plus k. D'où le résultat. □

On peut maintenant décrire le dual du module $L = L(\lambda^{(1)}) \otimes \cdots \otimes L(\lambda^{(k)})$. On définit la notation $\tilde{\lambda}^{(i)} = -\left(\lambda_N^{(i)}, \ldots, \lambda_1^{(i)}\right)$.

Proposition 1.13. *Le $Y(\mathfrak{gl}_N)$-module L^* est isomorphe à*

$$L(\tilde{\lambda}^{(1)}) \otimes \cdots \otimes L(\tilde{\lambda}^{(k)}).$$

Démonstration. On a déjà vu ce qu'il se passe pour chaque $L(\lambda^{(i)})$ séparément, via 1.13. On sait que $L(\lambda^{(i)})^* \simeq L(\tilde{\lambda}^{(i)})$ en tant que $Y(\mathfrak{gl}_N)$-modules.

Maintenant, on identifie L^* en tant qu'espace vectoriel à

$$L(\lambda^{(1)})^* \otimes \cdots \otimes L(\lambda^{(k)})^*.$$

D'après ce qu'on vient de voir, on a un isomorphisme de $Y(\mathfrak{gl}_N)$-modules $L(\lambda^{(i)})^* \simeq L(\tilde{\lambda}^{(i)})$. Il suffit donc de vérifier que l'identification faite respecte les structures de modules. Pour ce faire, il suffit de vérifier

$$\Delta \circ \varphi = \varphi \otimes \varphi \circ \Delta$$

(le premier membre étant issu de l'action de L^*, la deuxième de $L(\lambda^{(1)})^* \otimes \cdots \otimes L(\lambda^{(k)})^*$) ce qui est le cas, d'où le résultat. □

1.3 Démonstration du théorème pour $\mathfrak{gl}_2$

Comme prévu, on commence par se ramener au cas de $\mathfrak{gl}_2$, duquel on déduira le résultat pour $\mathfrak{sl}_2$. Ainsi, soit $L(\lambda(u))$ une représentation de $Y(\mathfrak{gl}_2)$ de plus haut l-poids $\lambda(u) = (\lambda_1(u), \lambda_2(u))$. Cette sous-section est largement inspirée de [Mol07], en adapatant encore les démonstrations avec le langage de co-plus haut l-poids et avec des exemples.

Première étape : on prouve que lorsqu'une telle représentation est de dimension finie, alors son poids est pratiquement polynomiale. Cela nous permettra de nous ramener au cas de nos briques élémentaires construite en section 1.2.

Proposition 1.14. *Si* $\dim(L(\lambda(u))) < \infty$*, alors il existe une série formelle*

$$f(u) := 1 + f_1 u^{-1} + f_2 u^{-2} + \dots, \quad f_r \in \mathbb{C}$$

telle que $f(u)\lambda_1(u)$ *et* $f(u)\lambda_2(u)$ *sont des polynômes en* u^{-1}*.*

Démonstration. On commence par tordre l'action du Yangien sur $L := L(\lambda(u))$, via l'automorphisme

$$\begin{array}{ccc} Y(\mathfrak{gl}_2) & \to & Y(\mathfrak{gl}_2) \\ T(u) & \mapsto & f(u)T(u) \end{array}$$

avec $f(u) = \lambda_2(u)^{-1}$ ($\lambda_2(u)$ étant bien inversible, puisque son coefficient constant l'est). On construit ainsi un $Y(\mathfrak{gl}_2)$-module isomorphe au module de plus haut l-poids $(\frac{\lambda_1(u)}{\lambda_2(u)}, 1)$. On peut donc se restreindre au cas où $\lambda(u) = (\nu(u), 1)$.

Soit ζ le vecteur de plus haut l-poids de $L(\nu(u), 1)$. Puisque cette représentation est de dimension finie par hypothèse, les éléments $t_{2,1}^{(i)} \cdot \zeta$ avec $i \geqslant 1$ sont linéairement dépendants.

Ainsi, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et des coefficients complexes c_i tels que $c_m \neq 0$ et

$$\sum_{i=1}^{m} c_i t_{2,1}^{(i)} \cdot \zeta = 0.$$

Le module de Verma associé $M(\nu(u), 1)$ contient donc un vecteur non-nul ξ de la forme

$$\xi := \sum_{i=1}^{m} c_i t_{2,1}^{(i)} \cdot 1_{\lambda(u)}$$

appartenant au sous-module propre maximal K de $M(\nu(u), 1)$ (car son image via la projection canonique de $M(\nu(u), 1)$ vers $L(\nu(u), 1)$ est nulle).

Mais alors, en écrivant $\nu(u) = 1 + \nu^{(1)}u^{-1} + \nu^{(2)}u^{-2} + \dots$ (avec $\nu^{(i)}$ des complexes) et en calculant dans $L(\nu(u), 1)$:

$$\begin{aligned} t_{1,2}^{(r)} \cdot \xi &= \sum_{i=1}^{m} c_i \left[t_{1,2}^{(r)}, t_{2,1}^{(i)} \right] \cdot 1_{\lambda(u)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i \left(t_{2,2}^{(r)} t_{1,1}^{(i)} - t_{2,2}^{(i)} t_{1,1}^{(r)} \right) \cdot 1_{\lambda(u)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \delta_{r=0} \nu^{(i)} \right) \cdot 1_{\lambda(u)}. \end{aligned}$$

Pour $r \geqslant 1$, ce terme est nul : cela induit que $1_{\lambda(u)}$ est nul dans $L(\nu(u))$, ce qui est absurde puisque $1_{\lambda(u)}$ engendre L.

On calcule ensuite dans le module $L(\nu(u), 1)$ pour $r, i > 0$:

$$t_{1,2}^{(r)} t_{2,1}^{(i)} \cdot \zeta = \sum_{a=1}^{\min(r,i)} \left(t_{2,2}^{(a-1)} t_{1,1}^{(r+i-a)} - t_{2,2}^{(r+i-a)} t_{1,1}^{(a-1)} \right) \cdot \zeta.$$

Or, ce terme ne contient qu'un seul terme non trivial, lorsque $a = 1$ (car sinon $t_{2,2}^{(a-1)}$ et $t_{2,2}^{(r+i-a)}$ agissent tous les deux trivialement sur ζ), d'où :

$$t_{1,2}^{(r)} t_{2,1}^{(i)} \cdot \zeta = \nu^{(r+i-1)} \zeta.$$

Il s'ensuit que, pour tout $r \geqslant 1$, en réécrivant $t_{1,2}^{(r)} \cdot \sum_{i=1}^{m} c_i t_{2,1}^{(i)} \cdot \zeta = 0$:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \nu^{(r+i-1)} = 0.$$

On considère alors le produit

$$\nu(u) \left(c_1 + c_2 u + \cdots + c_m u^{m-1}. \right)$$

Considérons les coefficients de ce produits :

- pour les puissances positives, le k-ème coefficient est de la forme $\sum_{i=k+1}^{m} c_i \nu^{(i-1-k)}$;
- pour les puissances strictement négatives, le k-ème coefficient est de la forme $\sum_{i=1}^{m} c_i \nu^{(k+i-1)}$.

En particulier :

- le $m-1$-ème coefficient (qui est aussi le coefficient non-nul à la plus grande puissance) est égal à c_m ;
- tous les coefficients négatifs sont nuls d'après l'égalité qui précède le calcul de ce produit.

On souhaite obtenir un polynôme de terme constant 1, on considère donc le polynôme :

$$f(u) := c_m^{-1} \sum_{i=1}^{m} c_i u^{-m+i}$$

de sorte que, d'après ce qui précède, $f(u)\nu(u)$ est un polynôme unitaire en u^{-1}.

D'autre part, $f(u)1$ est évidemment un polynôme unitaire en u^{-1}, d'où le résultat. $\square$

Ainsi, nous venons de voir qu'à tout module de plus haut l-poids du Yangien est associé un module de plus haut l-poids polynomial du Yangien. On s'intéresse donc à l'étude de ces derniers pour caractériser la finitude de leur dimension.

Pour des complexes α et β, on considère le module de plus haut poids irréductible $L(\alpha, \beta)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_2$, comme dans la section 1.2. On l'équipe d'une structure de module de $Y(\mathfrak{gl}_2)$ comme construite précédemment, et on note ζ sont vecteur de plus haut poids. Ainsi

$$E_{1,1} \cdot \zeta = \alpha\zeta; \quad E_{2,2} \cdot \zeta = \beta\zeta; \quad E_{1,2} \cdot \zeta = 0.$$

Si $\alpha - \beta \in \mathbb{N}$, alors $L(\alpha,\beta)$ est de dimension finie $\alpha - \beta + 1$, une base étant donnée par les $(E_{2,1}^r)_{0\leqslant r\leqslant \alpha-\beta}$. Sinon, le module est de dimension infinie, une base étant donnée par les $(E_{2,1}^r)_{r\in\mathbb{N}}$.

On considère également $\lambda_1(u), \lambda_2(u)$ deux polynômes en u^{-1} de degré au plus k pour $k \in \mathbb{N}$ fixé. On les écrit sous la forme

$$\lambda_1(u) = (1 + \alpha_1 u^{-1}) \dots (1 + \alpha_k u^{-1})$$
$$\lambda_2(u) = (1 + \beta_1 u^{-1}) \dots (1 + \beta_k u^{-1})$$

avec α_i et β_i des complexes.

Nous allons prouver que la décomposition des l-poids polynomiaux permet de donner une décomposition du module de plus haut l-poids associés en produit tensoriel de modules d'évaluation.

Proposition 1.15. *On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, la condition suivante est vérifiée :*

- *si le multiensemble $\{\alpha_p - \beta_q | \quad i \leqslant i, q \leqslant k\}$ contient des entiers positifs, alors $\alpha_i - \beta_i$ est minimal parmi eux.*

Alors la représentation de $L(\lambda_1(u), \lambda_2(u))$ de $Y(\mathfrak{gl}_2)$ est isomorphe au module

$$L := L(\alpha_1, \beta_1) \otimes \cdots \otimes L(\alpha_k, \beta_k).$$

Démonstration. On note ζ_i le vecteur de plus haut poids de $L(\alpha_i, \beta_i)$. On pose alors $\zeta := \zeta_1 \otimes \cdots \otimes \zeta_k$.

D'après la proposition 1.10, on a déjà

$$Y(\mathfrak{gl}_2) \cdot \zeta \simeq L(\lambda_1(u), \lambda_2(u))$$

avec ζ vecteur de plus haut l-poids de ce module. Il suffit donc de prouver que L est irréductible pour obtenir l'isomorphisme désiré.

Étape 1 : L est un module de co-plus haut l-poids On a déjà vu que ζ est un vecteur primitif et de l-poids $(\lambda_1(u), \lambda_2(u)$. Il ne reste donc qu'à vérifier le critère de cocyclicité.

Soit $\xi \in L$ tel que $t_{1,2}(u) \cdot \xi = 0$. Montrons que ξ est proportionnel à ζ par récurrence sur k.

Si $k = 1$, alors $\lambda_1(u) = (1 + \alpha u^{-1})$ et $\lambda_2(u) = (1 + \beta u^{-1})$: on se ramène à l'étude d'un module de plus haut l-poids, et on sait que les vecteurs de primitifs forment une droite linéaire d'après le corollaire 1.4.1, d'où le résultat.

Si $k \geqslant 2$: supposons ξ non-nul. On l'écrit sous la forme :

$$\xi = \sum_{r=0}^{p} (E_{2,1})^r \zeta_1 \otimes \xi_r \quad \text{avec } \xi_r \in L(\alpha_2, \beta_2) \otimes \cdots \otimes L(\alpha_k, \beta_k), p \in \mathbb{N}\,.$$

Si $\alpha_1 - \beta_1 \in \mathbb{N}$ (ce que l'on supposera pour notre étude de la dimension finie), on peut supposer $p \leqslant \alpha_1 - \beta_1$ et tel que $\xi_p \neq 0$.

On applique $t_{1,2}(u)$ à ξ (via le coproduit), de sorte que :

$$\sum_{r=0}^{p}\left(t_{1,1}(u)E_{2,1}^r\zeta_1\otimes t_{1,2}(u)\xi_r+t_{1,2}(u)E_{2,1}^r\zeta_1\otimes t_{2,2}\xi_r\right)=0.$$

Avant de simplifier, on exhibe les relations suivantes, obtenues par récurrence sur r :

$$\begin{aligned}E_{1,1}E_{2,1}^r\cdot\zeta_1&=(\alpha_1-r)E_{2,1}^r\cdot\zeta_1\\E_{2,2}E_{2,1}^r\cdot\zeta_1&=(\beta_1+r)E_{2,1}^r\cdot\zeta_1.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$t_{1,1}(u)E_{2,1}^r\cdot\zeta_1=(1+E_{1,1}u^{-1})E_{2,1}^r\cdot\zeta_1=(1+(\alpha_1-r)u^{-1})E_{2,1}^r\cdot\zeta_1.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}t_{1,2}(u)E_{2,1}^r\cdot\zeta_1&=u^{-1}E_{1,2}E_{2,1}^r\cdot\zeta_1\\&=u^{-1}\left(\sum_{k=0}^{r-1}E_{2,1}^{r-1-k}(E_{1,1}-E_{2,2})E_{2,1}^k\right)\zeta_1\\&=u^{-1}\left(\sum_{k=0}^{r-1}E_{2,1}^{r-1-k}(\alpha_1-k-(\beta_1+k))E_{2,1}^k\right)\zeta_1\\&=u^{-1}r(\alpha_1-\beta_1-(r-1))E_{2,1}^{r-1}\cdot\zeta_1\end{aligned}$$

On regarde en particulier le coefficient de $E_{2,1}^p\cdot\zeta_1$ de $t_{1,2}(u)\cdot\xi$, ce qui donne :

$$(1+(\alpha_1-p)u^{-1})t_{1,2}(u)\cdot\xi_p=0$$

et donc

$$t_{1,2}(u)\cdot\xi_p=0.$$

On utilise alors l'hypothèse de récurrence appliquée à $L(\alpha_2,\beta_2)\otimes\cdots\otimes L(\alpha_k,\beta_k)$, de sorte que ξ_p est donc colinéaire à $\zeta_2\otimes\cdots\otimes\zeta_k$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}t_{2,2}(u)\cdot\xi_p&=\sum_{a_2,\ldots,a_k}t_{2,a_2}(u)\cdot\xi_p^{(2)}\otimes\cdots\otimes t_{a_k,2}(u)\cdot\xi_p^{(k)}\\&=t_{2,2}\cdot\xi_p^{(2)}\otimes\cdots\otimes t_{2,2}\cdot\xi_p^{(p)}\\&=(1+\beta_2u^{-1})\ldots(1+\beta_pu^{-1})\xi_p\end{aligned}$$

car $t_{1,2}\cdot\xi_p^{(i)}=0$.

On souhaite maintenant prouver que $p=0$. En effet, dans ce cas, on a $\xi=\zeta_1\otimes\xi_{0=p}$ est proportionnel à ζ d'après ce qui précède.

Raisonnons par l'absurde : si $p \geqslant 1$. On regarde cette fois-ci le coefficient en $E_{2,1}^{p-1} \cdot \zeta_1$ de $t_{1,2}(u) \cdot \xi$. On a :

$$(1-(\alpha_1-(p-1))u^{-1})t_{1,2}(u)\cdot\xi_{p-1}+u^{-1}p(\alpha_1-\beta_1-(p-1))t_{2,2}(u)\xi_p=0.$$

En multipliant par u^k et en utilisant la formule explicitée ci-dessus de $t_{2,2}(u)\cdot \xi_p$:

$$(u+(\alpha_1-p+1))u^{k-1}t_{1,2}(u)\cdot\xi_{p-1}+p(\alpha_1-\beta_1-p+1)(u+\beta_2)\dots(u+\beta_k)=0.$$

Par ailleurs, nous savons que $u^{k-1}t_{1,2}(u)\cdot\xi_{p-1}$ dépend de u polynomialement (car les $t_{1,2}^{(r)}$ agissent trivialement sur ξ_{p-1} pour $r > k$). En évaluant en $u = -\alpha_1 + p - 1$, on obtient donc :

$$p(\alpha_1-\beta_1-p+1)(\alpha_1-\beta_2-p+1)\dots(\alpha_1-\beta_k-p+1)=0.$$

En particulier, cela signifie qu'il existe un indice $i \in \{2,\dots,k\}$ tel que $\alpha_1 - \beta_i = p - 1 \in \mathbb{N}$. Puisque $\alpha_1 - \beta_1 \geqslant p$, c'est absurde : cela contredit la condition de l'hypothèse. D'où $p = 0$ et la proportionnalité de tout vecteur primitif au vecteur de plus haut l-poids.

Étape 2 : Irréductibilité de L.

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour prouver que L est irréductible. D'après l'étude menée sur la théorie du plus haut l-poids et l'étape 1, il suffit de prouver que L est un module de plus haut l-poids pour ζ. Autrement dit, on veut montrer que $K := Y(\mathfrak{gl}_2)\cdot\zeta$ est égal à L.

Le dual de L est de co-plus haut l-poids. On sait, d'après la propostion **??**, que le $Y(\mathfrak{gl}_2)$-module L^* est isomorphe à

$$L(-\beta_1,-\alpha_1)\otimes\dots\otimes L(-\beta_k,-\alpha_k).$$

De plus, le vecteur de plus haut poids ζ_i^* du module $L(-\beta_i,-\alpha_i)\simeq L(\alpha_1,\beta_1)^*$ peut être identifié à l'élément ζ_i^* (définit par $\zeta_i^*(\zeta_i)=1$ et $\zeta_i^*(\eta_i)=0$ pour tout vecteur $\eta_i \in L(\alpha_i,\beta_i)$ de poids différent de (α_i,β_i)).

Mais alors, L^* vérifie la même hypothèse (celle de la propriété) que L : en particulier, L^* vérifie la première étape également. C'est donc un module de co-plus haut l-poids, d'où le résultat. □

Remarque La condition de l'hypothèse n'est en fait pas restrictive : il s'agit juste d'une condition forçant un indiçage judicieux, mais celui-ci est toujours possible.

Considérons une décomposition de $\lambda_1(u)$ et $\lambda_2(u)$ comme précédemment, quelconque. Choisissons une différence positive minimale parmi les différences $\alpha_p - \beta_q$, si une telle différence existe. On réindexe alors les éléments, de sorte que cette différence corresponde à $\alpha_1 - \beta_1$. On réitère ensuite le procédé, en considérant cette fois-ci les différences $\alpha_p - \beta_q$ pour $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$.

On arrive enfin au théorème de caractérisation des représentations de plus haut l-poids de dimension finie.

Théorème 1.16 (Caractérisation des représentations irréductibles de plus haut l-poids de dimension finie)**.** *La représentation irréductible de plus haut l-poids $L(\lambda_1(u), \lambda_2(u))$ de $Y(\mathfrak{gl}_2)$ est de dimension finie si et seulement si il existe un polynôme unitaire $P(u)$ tel que*

$$\frac{\lambda_1(u)}{\lambda_2(u)} = \frac{P(u+1)}{P(u)}.$$

De plus, $P(u)$ est alors unique et est appelé ***polynôme de Drinfeld****.*

Démonstration. $\Leftarrow$ On commence par supposer que $L(\lambda_1(u), \lambda_2(u))$ est de dimension finie. On sait donc, d'après la proposition 1.14 qu'il existe une série formelle $f(u)$ telle que

$$\begin{aligned} f(u)\lambda_1(u) &= (1+\alpha_1 u^{-1})\dots(1+\alpha_k u^{-1}) \\ f(u)\lambda_2(u) &= (1+\beta_1 u^{-1})\dots(1+\beta_k u^{-1}) \end{aligned}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et les α_i, β_i sont des complexes.

Quitte à les reparamétrer selon la remarque précédente, on suppose que ces paramètres satisfont l'hypothèse de la proposition 1.15. Puisque le module $L(\lambda_1(u), \lambda_2(u))$ est de dimension finie, cette proposition induit que les $\alpha_i - \beta_i$ sont des entiers positifs.

En ce cas, on pose

$$P(u) := \prod_{i=1}^{k} (u+\beta_i)(u+\beta_i+1)\dots(u+\alpha_i-1)$$

et on constate que ce polynôme convient. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{P(u+1)}{P(u)} &= \prod_{i=1}^{k} \frac{u+\alpha_i}{u+\beta_i} \\ &= \prod_{i=1}^{k} \frac{1+\alpha_i u^{-1}}{1+\beta_i u^{-1}} \\ &= \frac{f(u)\lambda_1(u)}{f(u)\lambda_2(u)} = \frac{\lambda_1(u)}{\lambda_2(u)}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Réciproquement, supposons l'existence d'un tel polynôme. On le décompose sous la forme $P(u) = (u+\gamma_1)\dots(u+\gamma_p)$. On pose alors :

$$\begin{aligned} \mu_1(u) &= (1+(\gamma_1+1)u^{-1})\dots(1+(\gamma_p+1)u^{-1}); \\ \mu_2(u) &= (1+\gamma_1 u^{-1})\dots(1+\gamma_p u^{-1}). \end{aligned}$$

On considère alors le $Y(\mathfrak{gl}_2)$-module :

$$L := L(\gamma_1+1, \gamma_1) \otimes \dots \otimes L(\gamma_p+1, \gamma_p).$$

Ce module est clairement de dimension finie (tous les $L(\gamma_i + 1, \gamma_i)$ l'étant). On sait, d'après la proposition 1.10, que le produit tensoriel des vecteurs de plus haut poids des $L(\gamma_i + 1, \gamma_i)$ engendre le $Y(\mathfrak{gl}_2)$-module de plus haut l-poids $(\mu_1(u), \mu_2(u))$.

Mais alors, on sait que

$$\frac{\mu_1(u)}{\mu_2(u)} = \frac{P(u+1)}{P(u)} = \frac{\lambda_1(u)}{\lambda_2(u)}.$$

Dès lors, on peut tordre la représentation $L(\mu_1(u), \mu_2(u))$ via un automorphisme de la même forme que dans le début de la preuve de la proposition 1.3 pour obtenir le module $L(\lambda_1(u), \lambda_2(u))$. Les deux représentations sont ainsi isomorphes, et donc $L(\lambda_1(u), \lambda_2(u))$ est de dimension finie.

Enfin, le polynôme est unique. En effet, tout autre polynôme unitaire Q vérifiant cette propriété vérifiera donc

$$\frac{Q(u+1)}{Q(u)} = \frac{P(u+1)}{P(u)}.$$

Autrement dit, la fraction rationelle $\frac{P(u)}{Q(u)}$ est périodique en u, ce qui n'est possible que si elle est constante. Puisque les polynômes sont unitaires, elle est nécessairement égale à 1, d'où $P(u) = Q(u)$. □

Exemple 3. ?? *On se propose de calculer explicitement le polynôme pour le cas particulier des représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$ de dimensions $m+1$: $W_m := Vect(e_0, \dots, e_m)$. L'action est alors définie par :*

$$\begin{aligned} E_{1,2} \cdot e_i &= (i+1)e_{i+1} \\ E_{2,1} \cdot e_i &= (m-i+1)e_{i-1} \\ (E_{1,1} - E_{2,2}) \cdot e_i &= (2i-m)e_i. \end{aligned}$$

Pour définir une représentation de $\mathfrak{gl}_2$, il suffit de choisir l'action de l'élément central $E_{1,1} + E_{2,2}$ (qui agit donc par un scalaire d'après le lemme de Schur). Pour simplifier nos calculs, supposons par exemple que cet élément agisse comme la multiplication par m. On en déduit ainsi :

$$E_{1,1} \cdot e_i = ie_i$$

et

$$E_{2,2} \cdot e_i = (m-i)e_i.$$

En particulier, pour $i = m$, on constate, en notant $\lambda_1(u)$ (resp. $\lambda_2(u)$) le l-poids de $t_{1,1}(u)$ (resp. $t_{2,2}(u)$) issu du morphisme d'évaluation :

$$\lambda_1(u) = 1 + mu^{-1} \quad \lambda_2(u) = 1.$$

Le polynôme de Drinfeld est donc :

$$P(u) = u\,(u+1)\dots(u+m-1)\,.$$

1.4 Liens entre les présentations

1.4.1 Le plus haut l-poids pour la présentation courante

Notations

Dans cette sous-section, on considère $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple de dimension finie et l'on travaille avec la présentation courante du Yangien.

On note $\left(x_j^+, x_j^-, h_j\right)_{j\in I}$ les générateurs de $\mathfrak{g}$ des copies de $\mathfrak{sl}_2$ dans $\mathfrak{g}$ (i.e $\mathfrak{g}$ est engendrée en tant qu'algèbre de Lie par ces éléments, qui vérifient par exemple $\left[x_j^+, h_j\right] = d_j x_j^+$). On note également $N := |I|$. On identifiera, sans le rappeler, les générateurs aux séries formelles associées, définies par :

$$x_j^{\pm}(u) := \sum_{k\in\mathbb{N}} x_{j,k}^{\pm} u^{-k-1};$$
$$h_j(u) := 1 + \sum_{k\in\mathbb{N}} h_{j,k} u^{-k-1}.$$

1.4.2 Théorie du plus haut l-poids pour $Y^c(\mathfrak{g})$

On rappelle brièvement dans cette sous-section les résultats relatifs à la notion de plus haut l-poids du Yangien dans le cadre de la présentation courante. Nous reviendrons plus en détail sur les représentations de plus haut l-poids dans le cas de la présentation RTT.

Définition 1.17. *On considère une famille de séries formelles de la forme* $1 + u^{-1}\,\mathbb{C}[\![u^{-1}]\!]\lambda(u) := (\lambda_1(u), \ldots, \lambda_N(u))$*. Une représentation* L *de* $Y^c(\mathfrak{g})$ *est dite* ***de plus haut l-poids*** $\lambda(u)$ *s'il existe* $\xi \in L$ *tel que :*

1. $Y^c(\mathfrak{g}) \cdot \xi = L$ *;*
2. *Pour tous* $1 \leqslant j \leqslant N$ *et* $n \in \mathbb{N}$*,* $x_{j,n}^+ \cdot \xi = 0$ *;*
3. *Pour tout* $1 \leqslant j \leqslant N$ *:* $h_j(u) \cdot \xi = \lambda_j(u)\xi$*.*

On ne rapppellera pas tous les résultats, mais on peut globalement prouver les mêmes résultats que dans la section 1.1 (modules de Verma, description des représentations irréducitbles de dimension finie).

1.4.3 Lien entre les présentations du Yangian

Nous allons maintenant vérifier qu'une représentation de plus haut l-poids pour la présentation RTT de $\mathfrak{gl}_2$ est une présentation de plus haut l-poids pour la présentation courante de $\mathfrak{sl}_2$.

Pour ce faire, on pourrait établir un isomorphisme entre les deux constructions du Yangien. Néanmoins, le résultat est fastidieux à démontrer : nous allons nous contenter d'exhiber un morphisme d'algèbres de Hopf entre les deux structures. Pour la décomposition de Gauss et l'isomorphisme général, je renvoie à la section 3.1 de [Mol07].

On peut utiliser une décomposition de Gauss de la T-matrice de la présentation RTT :

$$\begin{pmatrix} t_{1,1}(u) & t_{1,2}(u) \\ t_{2,1}(u) & t_{2,2}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(u) & 0 \\ 0 & k_2(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(u) & 1 \end{pmatrix}.$$

On constate, en particulier :

$$\begin{aligned} t_{1,1}(u) &= k_1(u) + e(u)k_2(u)f(u) \\ t_{1,2}(u) &= e(u)k_2(u) \\ t_{2,1}(u) &= k_2(u)f(u) \\ t_{2,2}(u) &= k_2(u). \end{aligned}$$

On va maintenant essayer d'établir une correspondance entre la présentation courante $Y^c(\mathfrak{sl}_2)$ et la présentation RTT $Y^{\mathrm{RTT}}(\mathfrak{gl}_2)$. D'après [Mol07], on dispose du résultat suivant, qui nous sera utile :

Théorème 1.18. *On dispose du morphisme d'algèbres de Hopf :*

$$\begin{array}{ccc} Y^c(\mathfrak{sl}_2) & \to & Y^{RTT}(\mathfrak{gl}_2) \\ x^+(u) & \mapsto & t_{1,2}(u)k_2(u)^{-1} \\ x^-(u) & \mapsto & k_2(u)^{-1}t_{2,1}(u) \\ h(u) & \mapsto & k_1(u)k_2(u)^{-1} \end{array}.$$

Nous allons tout de même montrer une autre version du théorème (sans prouver qu'il s'agit du même, mais de rapides calculs des premiers termes permettent de se rassurer).

Théorème 1.19. *On considère*

$$\begin{array}{ccccc} F & : & Y^c(\mathfrak{sl}_2) & \to & Y^{RTT}(\mathfrak{gl}_2) \\ & & x_0^+ & \mapsto & t_{1,2}^{(1)} \\ & & x_0^- & \mapsto & t_{2,1}^{(1)} \\ & & h_0 & \mapsto & t_{1,1}^{(1)} - t_{2,2}^{(1)} \\ & & x_1^+ & \mapsto & t_{1,2}^{(2)} - t_{1,2}^{(1)}t_{2,2}^{(1)} \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres de Hopf.

Remarque Si l'on souhaite disposer des images par ce morphismes des autres générateurs de degré 1 :

$$F(h_1) = t_{1,1}^{(2)} - t_{2,2}^{(2)} - t_{1,1}^{(1)}t_{2,2}^{(2)} - t_{1,2}^{(1)}t_{2,1}^{(1)} + t_{2,2}^{(1)}$$

et

$$F(x_1^-) = t_{2,1}^{(2)} + t_{1,1}^{(1)}t_{2,1}^{(1)} - t_{2,1}^{(1)}t_{2,2}^{(1)} - t_{2,2}^{(1)}t_{2,1}^{(1)}.$$

Démonstration. Les trois premiers éléments envoyant la copie de $\mathfrak{sl}_2$ de la présentation courante sur la copie de $\mathfrak{sl}_2$ de la présentation RTT, on vérifie facilement que les relations relatives aux crochets et aux coproduits sont vérifiées.

On s'intéresse donc plus particulièrement au cas du générateur x_1^+. Vérifions si les relations crochets sont vérifiées.

$$\left[x_1^+, x_0^+\right] = \left[x_0^+, x_1^+\right] + 2\left(x_0^+\right)^2$$

d'où $\left[x_1^+, x_0^+\right] = \left(x_0^+\right)^2$.

On vérifie alors qu'on a, d'autre part :

$$\left[t_{1,2}^{(2)} - t_{1,2}^{(1)} t_{2,2}^{(1)}, t_{1,2}^{(1)}\right] = -\left[t_{1,2}^{(1)}, t_{1,2}^{(2)}\right] - t_{1,2}^{(1)}\left[t_{2,2}^{(1)}, t_{1,2}^{(1)}\right] = \left(t_{1,2}^{(1)}\right)^2$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\left[F(x_1^+), F(x_0^+)\right] &= \left[t_{1,2}^{(2)} - t_{1,2}^{(1)} t_{2,2}^{(1)}, t_{1,2}^{(1)}\right] \\ &= \left(t_{1,2}^{(1)}\right)^2 = F\left(\left(x_0^+\right)^2\right) = F\left(\left[x_1^+, x_0^+\right]\right).\end{aligned}$$

On procède de même pour

$$\left[x_1^+, h_0\right] = -2x_1^+$$

et

$$\left[t_{1,2}^{(2)} - t_{1,2}^{(1)} t_{2,2}^{(1)}, t_{1,1}^{(1)} - t_{2,2}^{(1)}\right] = -2\left(t_{1,2}^{(2)} - t_{1,2}^{(1)} t_{2,2}^{(1)}\right)$$

d'où le résultat.

Pour $\left[x_1^+, x_0^-\right]$, on n'a pas de contrainte : il s'agit d'une manière de définir l'image de h_1.

Il ne reste donc qu'à vérifier la cohérence de F avec le coproduit pour x_1^+ (puisque c'est déjà clair pour la copie de $\mathfrak{sl}_2$).

Si la formule du coproduit n'est pas explicite en général, on dispose tout de même d'une formule simple pour x_1^+ :

$$\Delta\left(x_1^+\right) = x_1^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_1^+ + h_0 \otimes x_0^+.$$

Il ne reste donc qu'à vérifier que cette formule est compatible avec le coproduit de la présentation courante et F. Or :

$$\Delta\left(t_{1,2}^{(2)} - t_{1,2}^{(1)} t_{2,2}^{(1)}\right) = \left(t_{1,2}^{(2)} - t_{1,2}^{(1)} t_{2,2}^{(1)}\right) \otimes 1 + 1 \otimes \left(t_{1,2}^{(2)} - t_{1,2}^{(1)} t_{2,2}^{(1)}\right) + \left(t_{1,1}^{(1)} - t_{2,2}^{(1)}\right) \otimes t_{1,2}^{(1)}$$

d'où le résultat. □

Nous allons maintenant nous intéresser à un sens de la correspondance entre les notions de module de plus haut l-poids (celui qui nous intéresse), via ce morphisme.

Théorème 1.20. *Soit L une représentation de plus haut l-poids $Y^{RTT}(\mathfrak{gl}_2)$. Alors L est un module de plus haut l-poids λ de $Y^c(\mathfrak{sl}_2)$.*

Démonstration. On note ξ le vecteur de plus haut l-poids de L, et on note $\lambda_1(u)$ et $\lambda_2(u)$ les deux composantes du l-poids de ξ.

On considère le pull-back de L par F. Noté $F^*(L)$, ce module est défini par :

1. $F^*(L) = L$ en tant qu'espaces vectoriels ;
2. $Y^c(\mathfrak{sl}_2)$ agit sur $F^*(L)$ via F (i.e : $x \cdot v = F(x) \cdot v$).

Nous allons montrer que $F^*(L)$ est de plus haut l-poids.

- **Cyclicité :** On considère $Y^c(\mathfrak{sl}_2) \cdot \xi$. Par définition, ce module est égal à $F(Y^c(\mathfrak{sl}_2)) \cdot \xi$. Cependant, l'action de $Y^{RTT}(\mathfrak{gl}_2)$ correspond à l'action de $F(Y^c(\mathfrak{sl}_2))$ et une action diagonale d'éléments centraux. Ainsi, $F(Y^c(\mathfrak{sl}_2)) \cdot \xi = Y^{\mathrm{RTT}}(\mathfrak{gl}_2) \cdot \xi = L$.
- **l-poids :** On regarde $h(u) \cdot \xi = k_1(u)k_2(u)^{-1} \cdot \xi = \lambda_2(u)^{-1}k_1(u) \cdot \xi$.
- **primitif :** On regarde $x(u) \cdot \xi = t_{1,2}(u)t_{2,2}^{-1}(u) \cdot \xi = 0$.

Il ne reste donc qu'à déterminer l'action de $k_1(u)$ sur ξ. Pour ce faire, on introduit l'élément $D(u) := k_1(u)k_2(u)^{-1}$. On peut vérifier que cet élément est central et group-like (voir la section 3.1 [Mol07] pour les détails).

Par l'étude menée pour les représentations irréductibles de $Y^{\mathrm{RTT}}(\mathfrak{gl}_2)$, on sait que

$$L(\lambda_1(u), \lambda_2(u)) \simeq L(\alpha_1, \beta_1) \otimes \cdots \otimes L(\alpha_k, \beta_k)$$

et

$$\xi \simeq \xi_1 \otimes \ldots \xi_k.$$

Puisque $D(u)$ est group-like, on connait son action sur ξ :

$$D(u) \cdot \xi = D(u)\xi_1 \otimes \ldots D(u)\xi_k.$$

On peut alors vérifier que l'action sur chaque module d'évaluation est diagnonale, de sorte que l'action de $k_1(u)$ l'est aussi, d'où le fait que $F^*(L)$ est de plus haut l-poids. $\square$

Pour se donner une idée, on calcule explicitement le polynôme de Drinfeld associé à la présentation courante dans le cas des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$. Le calcul pour prouver que $D(u)$ agit diagonalement est par exemple semblable à celui que l'on effectue dans cet exemple.

Exemple 4. *Nous avons vu, dans l'exemple* **??**,

Ainsi, on a $k_2(u)$ qui agit sur le vecteur de plus haut l-poids e_m comme $t_{2,2}(u)$ et est donc de valeur propre 1.

D'autre part, $k_1(u)$ agit comme $t_{1,1}(u) - t_{1,2}(u)t_{2,2}(u)^{-1}t_{2,1}(u)$. Le calcul explicite donne alors la valeur propre :

$$\lambda_3(u) := (1 + mu^{-1}) - \frac{mu^{-2}}{1 + u^{-1}} = \frac{u + (m+1)}{u + 1}.$$

On sait alors que la représentation de $Y^c(\mathfrak{sl}_2)$ est de l-poids $\lambda(u) = \lambda_3(u)\lambda_2(u)^{-1} = \frac{u+(m+1)}{u+1}$. Le polynôme $P = (u+1)\ldots(u+m)$ vérifie alors $\lambda(u) = \frac{P(u+1)}{P(u)}$ est donc le polynôme de Drinfeld de la représentation de $Y(\mathfrak{sl}_2)$.

1.5 Lemme de réduction

L'objectif de cette sous-section est d'expliquer comment les informations dont on dispose sur une représentation du Yangien s'étendent naturellement aux copies du Yangien de $\mathfrak{sl}_2$ incluses dans le Yangien $Y_\hbar(\mathfrak{g})$. On choisit ici de réintroduire la déformation $\hbar$ afin de disposer de résultats généraux.

On fixe $j \in I$. On commence par établir l'injection naturelle, relative à j, de $Y_1^c(\mathfrak{sl}_2)$ dans $Y_\hbar^c(\mathfrak{g})$.

Proposition 1.21. *On dispose du morphisme d'algèbres injectif*

$$\begin{array}{ccc} Y_1^c(\mathfrak{sl}_2) & \hookrightarrow & Y_\hbar^c(\mathfrak{g}) \\ x_n^+ & \mapsto & \frac{1}{d_j^{n+1}}\frac{1}{\hbar^n}x_{j,n}^+ \\ x_n^- & \mapsto & \frac{1}{d_j^n}\frac{1}{\hbar^n}x_{j,n}^- \\ h_n & \mapsto & \frac{1}{d_j^{n+1}}\frac{1}{\hbar^n}h_{j,n} \end{array}.$$

Démonstration. On prouve le résultat par récurrence, en procédant par analyse synthèse.

Ainsi, on considère le morphisme d'algèbres :

$$\begin{array}{ccc} Y_1^c(\mathfrak{sl}_2) & \hookrightarrow & Y_\hbar^c(\mathfrak{g}) \\ x_n^+ & \mapsto & c_{j,n}^+x_{j,n}^+ \\ x_n^- & \mapsto & c_{j,n}^-x_{j,n}^- \\ h_n & \mapsto & d_{j,n}h_{j,n} \end{array}.$$

<u>n = 0</u> On commence par regarder ce qu'il se passe pour la copie de $\mathfrak{sl}_2$. On utilise la relation de $Y_1^c(\mathfrak{sl}_2)$:

$$[h_0, x_0^+] = 2x_0^+ = 2c_{j,0}^+x_{j,0}^+.$$

D'autre part :

$$[h_0, x_0^+] = d_{j,0}c_{j,0}^+[h_{j,0}, x_{j,0}^+] = d_{j,0}c_{j,0}^+a_{j,j}x_{j,0}^+.$$

Ainsi, on a déjà :

$$d_{j,0} = \frac{2}{a_{j,j}}.$$

Par ailleurs :

$$[x_0^+, x_0^-] = h_0 = d_{j,0}h_{j,0}$$

et

$$[x_0^+, x_0^-] = c_{j,0}^+c_{j,0}^-[x_{j,0}^+, x_{j,0}^-] = c_{j,0}^+c_{j,0}^-h_{j,0}.$$

Ainsi, si l'on choisit de fixer par exemple $c_{j,0}^- = 1$, on a $c_{j,0}^+ = \frac{2}{a_{j,j}}$ ce qui conclut le cas $n = 0$.

<u>n = 1</u> On introduit les éléments

$$\tilde{h}_1 = h_1 - \frac{1}{2}h_0^2; \quad \tilde{h}_{j,1} = h_{j,1} - \frac{1}{2}\hbar h_{j,0}^2.$$

On constate ainsi que

$$\tilde{h}_1 = d_{j,1} h_{j,1} - \frac{1}{2} d_{j,0}^2 h_{j,0}^2.$$

Or, si l'on note $\tilde{d}_{j,1}$ le coefficient tel que $\tilde{h}_1 = \tilde{d}_{j,1} \tilde{h}_{j,1}$, on a donc

$$\tilde{h}_1 = \tilde{d}_{j,1} h_{j,1} - \frac{1}{2} \hbar \tilde{d}_{j,1} h_{j,0}^2.$$

Mais alors, par indépendance linéaire de $h_{j,1}$ et $h_{j,0}^2$:

$$\frac{d_{j,0}^2}{\hbar} = \tilde{d}_{j,1} = d_{j,1}$$

d'où

$$d_{j,1} = \left(\frac{2}{a_{j,j}} \right)^2 \frac{1}{\hbar}.$$

Ensuite :

$$[\tilde{h}_1, x_0^+] = 2x_1^+ = 2c_{j,1}^+ x_{j,1}^+$$

et

$$[\tilde{h}_1, x_0^+] = d_{j,1} c_{j,0}^+ [\tilde{h}_{j,1}, x_{j,0}^+] = d_{j,1} c_{j,0}^+ a_{j,j} x_{j,0}^+$$

d'où

$$c_{j,1}^+ = d_{j,1} c_{j,0}^+ \frac{a_{j,j}}{2} = d_{j,1}.$$

Enfin

$$[\tilde{h}_1, x_0^-] = -2x_1^- = -2c_{j,1}^- x_{j,1}^-$$

et

$$[\tilde{h}_1, x_0^-] = d_{j,1} c_{j,0}^- [\tilde{h}_{j,1}, x_{j,0}^-] = d_{j,1} c_{j,0}^- a_{j,j} x_{j,0}^-$$

d'où

$$c_{j,1}^- = d_{j,1} c_{j,0}^- \frac{a_{j,j}}{2} = \frac{2}{a_{j,j}} \frac{1}{\hbar}.$$

Pour l'hérédité, on utilise exactement les mêmes idées que pour le cas $n = 1$. On obtient ainsi l'expression des coefficients souhaitée. Pour conclure, il suffit de constater qu'avec ces coefficients, on obtient bien un morphisme d'algèbres (il s'agit des mêmes calculs que ci-dessus). $\square$

Remarque Ce morphisme d'algèbres n'est pas un morphisme d'algèbres de Hopf.

On souhaite maintenant utiliser ce morphisme pour établir un lien entre les représentations irréductibles de $Y^c(\mathfrak{g})$ et les représentations irréductibles de $Y^c(\mathfrak{sl}_2)$.

Lemme 1.22 (Lemme de réduction). *Soient $\lambda(u) = (\lambda_i(u))$ et ξ un vecteur de plus haut l-poids $\lambda(u)$ de $L(\lambda(u))$. On fixe $j \in I$.*

Alors $Y_{d_j}^c(\mathfrak{sl}_2) \cdot \xi$ est un $Y_{d_j}^c(\mathfrak{sl}_2)$-module simple de plus haut l-poids $\lambda_j(u)$, de vecteur générateur ξ.

Remarque On sait donc que $Y^c_{d_j}(\mathfrak{sl}_2) \cdot \xi \simeq L(\lambda_j(u))$ en tant que $Y^c_{d_j}(\mathfrak{sl}_2)$-modules.

Démonstration. On fixe $j \in I$ et on note $Y := Y^c_{d_j}(\mathfrak{sl}_2)$.

On commence par prouver qu'il s'agit bien d'un module de plus haut l-poids $\lambda_j(u)$.

1. **Cyclicité :** La cyclicité est claire par définition.

2. **l-poids :** On calcule $h(u) \cdot \xi$. Par définition de l'action :

$$h(u) \cdot \xi = h_j(u) \cdot \xi = \lambda_j(u)\xi$$

3. **primitif :** On a :

$$x(u) \cdot \xi = x_j(u) \cdot \xi = 0.$$

On montre maintenant que le module est simple. C'est en fait l'étape difficile, et c'est ici qu'intervient la caractérisation de l'irréductibilité par le co-plus haut l-poids, via le théorème 1.9. Nous allons utiliser la caractérisation par l'espace des vecteurs primitifs.

Soit $v \in Y \cdot \xi$ un vecteur primitif, c'est-à-dire tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x^+_n \cdot v = 0.$$

Par définition de l'action de Y, cela signifie donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x^+_{j,n} \cdot v = 0.$$

De plus, puisque $Y \cdot \xi$ est de plus haut l-poids, on sait d'après le théorème PBW que $v \in Y^- \cdot \xi$. En particulier, il existe des indices $n_1, \ldots, n_k$ tels que

$$v = x^-_{n_1} \ldots x^-_{n_k} \cdot \xi.$$

On rappelle que, dans $Y^c(\mathfrak{g})$, pour $i \neq j$, les $x^+_{j,n}$ commutent avec les $x^-_{i,m}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall j \neq i, \forall n \in \mathbb{N} : \quad x^+_{i,n} \cdot v &= x^-_{j,n_1} \ldots x^-_{j,n_k} x^+_{i,n} \cdot \xi \\ &= 0. \end{aligned}$$

On vient donc de montrer que v est un vecteur primitif de $L(\lambda(u))$. Puisque cette représentation de $Y^c(\mathfrak{g})$ est irréductible, c'est en particulier un module de co-plus haut l-poids, donc l'espace des vecteurs primitifs est une droite vectorielle. Finalement, $v \in \mathbb{C}\,\xi$ et le résultat est prouvé. $\square$

1.6 Fin du sens direct

On a maintenant tout le bagage nécessaire à la démonstration du sens direct du théorème. On rappelle l'énoncé du sens direct.

Théorème 1.23. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie simple et* $\lambda_i(u) = 1+u^{-1}\,\mathbb{C}[[u^{-1}]]$ *tel que* $L\left(\lambda_1(u),\ldots,\lambda_k(u)\right)$ *est de dimension finie.*

Alors il existe k *polynômes unitaires* $P_i \in \mathbb{C}[u]$ *tels que* $\lambda_i(u) = \frac{P_i(u+d_i)}{P_i(u)}$.

Démonstration du théorème. On conserve les notations de cette section. On note ζ le vecteur de plus haut l-poids de $L\left(\lambda(u)\right)$

Si $L\left(\lambda(u)\right)$ est de dimension finie, alors d'après le lemme de réduction 1.22, pour $j \in \{1,\ldots,k\}$, le module $Y_1(\mathfrak{sl}_2)\cdot\zeta$ est également de dimension finie, de plus haut l-poids $\lambda(u)$. Or, d'après le théorème **??**, on sait qu'il existe un polynôme unitaire $\tilde{P} \in \mathbb{C}[u]$ tel que $\lambda(u) = 1 + \sum_{n\geqslant 0} \lambda^{(n)}u^{-n-1} = \frac{\tilde{P}(u+1)}{\tilde{P}(u)}$.

On en déduit alors

$$\begin{aligned}
\lambda_j(z) &= 1 + \hbar \sum_{n\geqslant 0} \lambda_j^{(n)} u^{-n-1} \\
&= 1 + \hbar \sum_{n\geqslant 0} (d_j)^{n+1}\hbar^n \lambda^{(n)}(u)u^{-n-1} \\
&= 1 + \sum_{n\geqslant 0} \lambda^{(n)} \left((d_j\hbar)^{-1}u\right)^{-n-1} \\
&= \frac{\tilde{P}\left((d_j\hbar)^{-1}u+1\right)}{\tilde{P}\left((d_j\bar{h})^{-1}u\right)}.
\end{aligned}$$

On a bien obtenu un quotient de polynômes, mais ceux-ci ne sont pas unitaires et ne sont pas nos candidats. Écrivons-le sous forme scindée $\tilde{P}(u) = \prod_{s=1}^{r}(u-a_s)$. Mais alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{P}\left((d_j\hbar)^{-1}u+1\right)}{\tilde{P}\left((d_j\hbar)^{-1}u\right)} &= \frac{\prod_{s=1}^{r}\left((d_j\hbar)^{-1}u\right) - a_s + 1}{\prod_{s=1}^{r}\left((d_j\hbar)^{-1}u\right) - a_s} \\
&= \frac{\prod_{s=1}^{r} u - d_j\hbar a_s + d_j\hbar}{\prod_{s=1}^{r} u - d_j\hbar a_s}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $P(u) = \prod_{s=1}^{r}(u - d_j\hbar a_s)$ polynôme unitaire, on obtient finalement

$$\lambda_j(u) = \frac{P(u+d_j\hbar)}{P(u)}$$

d'où le résultat. □

2 Sens réciproque

Pour le sens réciproque, nous allons revenir à des outils plus classiques : la notion de module intégrable.

Définition 2.1. *Soit L une représentation de $Y(\mathfrak{g})$. On dit que L est un module* ***intégrable*** *si :*

1. $L = \bigoplus_{\mu} L_\mu$ *(L est un module de de poids) ;*
2. L_μ *est de dimension finie pour tout* $\mu \in \mathfrak{h}$ *;*
3. *Pour tous* $i \in I, r \in \mathbb{N}$*, il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $(x_{i,r}^{\pm})^k \cdot L = 0$.

Dans notre cas, nous savons déjà que L est un module de poids. Nous allons tâcher de montrer les deux autres points de la définition.

2.1 Les espaces de poids sont de dimension finie

Nous allons démontrer que les espaces de poids sont de dimension finie par récurrence. Pour rédiger celle-ci clairement, on introduit la notion de hauteur d'un vecteur de L. On note μ_0 le poids maximal. Pour $v \in L$, on sait que le poids de v est de la forme $\mu_0 - \sum_{k=1}^{N} c_k \alpha_k$ avec $c_k \in \mathbb{N}$.

Définition 2.2. *Soit $v \in L$ de poids $\mu_0 - \sum_{k=1}^{N} c_k \alpha_k$ avec $c_k \in \mathbb{N}$. On définit alors la* ***hauteur*** *de v par :*

$$h(v) := \sum_{k=1}^{N} c_k.$$

Exemple 5.
- *Le vecteur de plus haut poids ξ est de hauteur 0.*
- *Les vecteurs de la forme $x_{i,r}^{-} \cdot \xi$ sont tous de hauteur 1.*

Nous allons donc procéder par récurrence sur la hauteur des vecteurs de L.

Démonstration. Initialisation : Les seuls vecteurs de hauteur nul ceux de poids μ_0, et on sait déjà que $Ł_{\mu_0} = \mathbb{C}\,\xi$.

Hérédité : Soit $\mu < \mu_0$ un poids de L.
On peut écrire

$$L_\mu = \mathrm{Vect}\left(x_{i_1,r_1}^{-} \dots x_{i_s,r_s}^{-} \cdot \xi \mid \mu_0 - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_s} = \mu\right).$$

Ce qu'on peut réécrire

$$\begin{aligned} L_\mu &= \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant N, r_1 \in \mathbb{N}} x_{i_1,r_1}^{-} \,\mathrm{Vect}\left(x_{i_2,r_2}^{-} \dots x_{i_s,r_s}^{-} \cdot \xi \mid \mu_0 - \alpha_{i_2} - \dots - \alpha_{i_s} = \mu + \alpha_{i_1}\right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant N, r_1 \in \mathbb{N}} x_{i_1,r_1}^{-} L_{\mu + \alpha_{i_1}}. \end{aligned}$$

Les éléments de $L_{\mu+\alpha_{i_1}}$ sont de hauteur strictement inférieure à celle des éléments de L_μ. Par récurrence, $L_{\mu+\alpha_{i_1}}$ est de dimension finie.

Il suffit donc de vérifier qu'on peut se ramener à une somme finie. Cela revient à prouver qu'il existe un ensemble fini d'indices S tels que pour tous $1 \leqslant i \leqslant N, r \in \mathbb{N}$, on a $x^-_{i,r} L_{\mu+\alpha_i} \in \mathrm{Vect}\left(\sum_{r_1 \in S} x^-_{i,r_1} L_{\mu+\alpha_i}\right)$.

Nous n'allons pas expliciter l'ensemble fini, mais nous allons prouver le résultat par une double récurrence sur r et sur la poids. Pour ce faire, nous allons utiliser les relations de Drinfel'd. En effet, on a

$$x^-_{i,r} x^-_{j_1,s_1} = x^-_{j_1,s_1} x^-_{i,r} + x^-_{i,r-1} x^-_{j_1,s_1+1} - x^-_{j_1,s_1+1} x^-_{i,r-1} + x^-_{i,r-1} x^-_{j_1,s_1} + x^-_{j_1,s_1} x^-_{i,r-1}$$

ce qui nous permet de conclure. □

2.2 Nilpotence des $x^\pm_{i,r}$

Cette fois-ci, nous allons exploiter les relations de Serre. Nous allons en effet démontrer un premier lemme qui nous permettra de conclure.

Lemme 2.3. *Pour tous $i, j \in I$, $n \in \mathbb{N}$, il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que*

$$(x^-_{i,0})^n x^-_{j,r} \in Y(\mathfrak{g})(x_{i,0})^{n-c}.$$

Démonstration. Il suffit de constater que

$$(x^-_{i,0})^n x^-_{j,r} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{ad}^k_{x^-_{i,0}}(x^-_{j,r})(x^-_{i,0})^{n-k}.$$

La relation de Serre du Yangien nous permet alors de conclure, avec $c = 1 - a_{i,j}$. □

De ce lemme, on peut donc déduire qu'il existe une constante c telle que

$$(x^-_{i,0})^n x^-_{i_1,r_1} \dots x^-_{i_s,r_s} \xi = x^-_{i_1,r_1} \dots x^-_{i_s,r_s} (x^-_{i,0})^m \xi$$

avec $m \geqslant n - c$, en choisissant $c = \max\{1 - a_{i,j} \mid \forall i, j \in I\}$.

Or, on sait que $(x^-_{i,0})^n \xi = 0$ pour n suffisamment grand (puisque ce vecteur appartient à $Y_i \xi$ qui est de dimension finie, donc intégrable). On peut donc déduire de ce fait et du précédent la proposition suivante.

Proposition 2.4. *Pour tout $v \in L$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geqslant n$: $(x^-_{i,0})^n v = 0$.*

Ceci nous permet donc de vérifier que L est intégrable en tant que $\mathfrak{g}$-module.

Il ne reste alors plus qu'à vérifier que L est un $\mathfrak{g}$-module de la catégorie O, les $\mathfrak{g}$-modules intégrables de la catégorie O étant de dimensions finies.

Bibliographie

Références

[CP90] Vyjayanthi Chari et Andrew Pressley. “Yangians and R-matrices”. In : *Enseign. Math. (2)* 36.3-4 (1990), p. 267-302. issn : 0013-8584.

[Mol07] Alexander Molev. *Yangians and Classical Lie Algebras*. T. 143. American Mathematical Society, 2007.