

Formules du coproduit pour les algèbres affines quantiques et les Yangiens

Soutenance en vue de l'obtention du grade de docteur

Jérôme Milot

Université de Lille

Encadré par Alexis Virelizier et Huafeng Zhang

24 juin 2026



1 Introduction

- Motivations et contexte historique
- Deux présentations des groupes quantiques

2 Formules du coproduit des T-séries et des S-séries

- T-séries des algèbres affines quantiques
- S-séries des Yangiens

3 Compatibilité du coproduit et de la troncature pour \mathfrak{sl}_2

- Troncature des Yangiens

4 Perspectives

Théorie des représentations

- La **théorie des représentations** est l'étude des objets mathématiques abstraits au moyen des outils de l'algèbre linéaire.

Théorie des représentations

- La **théorie des représentations** est l'étude des objets mathématiques abstraits au moyen des outils de l'algèbre linéaire.
- Une représentation d'un groupe G est la donnée d'un espace vectoriel V et d'un morphisme de groupes

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

Théorie des représentations

- La **théorie des représentations** est l'étude des objets mathématiques abstraits au moyen des outils de l'algèbre linéaire.
- Une représentation d'un groupe G est la donnée d'un espace vectoriel V et d'un morphisme de groupes

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

- Le groupe des rotations du plan a pour représentation

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} &\rightarrow GL(\mathbb{R}^2) \\ \theta &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Coproduit et groupes quantiques

- Plus généralement, on considère des représentations d'algèbres. Il est souvent difficile de construire des représentations d'une algèbre. On cherche donc à en produire de nouvelles à partir des représentations déjà construites.

Coproduit et groupes quantiques

- Plus généralement, on considère des représentations d'algèbres. Il est souvent difficile de construire des représentations d'une algèbre. On cherche donc à en produire de nouvelles à partir des représentations déjà construites.
- Une **algèbre de Hopf** est une algèbre A munie d'une co-unité, d'une antipode et d'un **coproduit**

$$\Delta : A \rightarrow A \otimes A$$

Coproduit et groupes quantiques

- Plus généralement, on considère des représentations d'algèbres. Il est souvent difficile de construire des représentations d'une algèbre. On cherche donc à en produire de nouvelles à partir des représentations déjà construites.
- Une **algèbre de Hopf** est une algèbre A munie d'une co-unité, d'une antipode et d'un **coproduit**

$$\Delta : A \rightarrow A \otimes A$$

- Les **groupes quantiques** sont une classe d'algèbres de Hopf introduites dans les années 80 avec de nombreuses applications : représentations des groupes de tresse, théorie des invariants de noeud, construction de théories quantiques des champs topologiques, systèmes intégrables en physique.

Coproduit et groupes quantiques

- Plus généralement, on considère des représentations d'algèbres. Il est souvent difficile de construire des représentations d'une algèbre. On cherche donc à en produire de nouvelles à partir des représentations déjà construites.
- Une **algèbre de Hopf** est une algèbre A munie d'une co-unité, d'une antipode et d'un **coproduit**

$$\Delta : A \rightarrow A \otimes A$$

- Les **groupes quantiques** sont une classe d'algèbres de Hopf introduites dans les années 80 avec de nombreuses applications : représentations des groupes de tresse, théorie des invariants de noeud, construction de théories quantiques des champs topologiques, systèmes intégrables en physique.
- But : étudier les représentations des groupes quantiques, notamment les produits de représentations. Pour ça, on veut **établir des formules explicites de coproduit**.

1 Introduction

- Motivations et contexte historique
- Deux présentations des groupes quantiques

2 Formules du coproduit des T-séries et des S-séries

- T-séries des algèbres affines quantiques
- S-séries des Yangiens

3 Compatibilité du coproduit et de la troncature pour \mathfrak{sl}_2

- Troncature des Yangiens

4 Perspectives

Groupes quantiques de Drinfeld-Jimbo

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie de matrice de Cartan $(c_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$. Soit $q \in \mathbb{C}^\times$ non racine de l'unité.

Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$

C'est une algèbre associative avec générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} pour $1 \leq i \leq r$ et relations explicites. Par exemple :

$$K_i E_j = q^{c_{ij}} E_j K_i \quad K_i F_j = q^{-c_{ij}} F_j K_i \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}$$

Groupes quantiques de Drinfeld-Jimbo

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie de matrice de Cartan $(c_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$. Soit $q \in \mathbb{C}^\times$ non racine de l'unité.

Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$

C'est une algèbre associative avec générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} pour $1 \leq i \leq r$ et relations explicites. Par exemple :

$$K_i E_j = q^{c_{ij}} E_j K_i \quad K_i F_j = q^{-c_{ij}} F_j K_i \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}$$

La matrice de Cartan s'étend en une matrice de Cartan affine $(c_{ij})_{0 \leq i, j \leq r}$, à laquelle on associe une algèbre de Kac-Moody affine $\hat{\mathfrak{g}}$.

L'algèbre affine quantique $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$

C'est une extension de $U_q(\mathfrak{g})$ en ajoutant des générateurs E_0, F_0, K_0 avec des relations similaires.

- L'algèbre affine quantique est une algèbre de Hopf dont le coproduit est le morphisme d'algèbres $\Delta : U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ déterminé par

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i$$

$$\Delta(F_i) = 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i^{-1}$$

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i$$

Structure d'algèbre de Hopf

- L'algèbre affine quantique est une algèbre de Hopf dont le coproduit est le morphisme d'algèbres $\Delta : U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ déterminé par

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i$$

$$\Delta(F_i) = 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i^{-1}$$

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i$$

- La catégorie \mathcal{F}_q des représentations de dimension finie de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ est étudiée intensivement depuis quatre décennies. Elle est monoïdale.

Motivation pour la nouvelle réalisation de Drinfeld

- Un des premiers résultats fondamentaux de l'étude de \mathcal{F}_q est la classification de ses objets simples par Chari-Pressley (1991).
- Cette classification se formule à l'aide d'une nouvelle présentation de l'algèbre affine quantique, appelée **nouvelle réalisation de Drinfeld**.
- Pour étudier la structure monoïdale de la catégorie \mathcal{F}_q , il faut donc expliciter le coproduit de cette nouvelle réalisation.

Nouvelle réalisation de Drinfeld

Théorème (Gabber-Kac 1981)

L'algèbre de Kac-Moody affine $\hat{\mathfrak{g}}$ est isomorphe à l'algèbre de lacets $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$.

La nouvelle réalisation de Drinfeld (1988)

L'algèbre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ admet un nouveau système de générateurs $x_{i,m}^{\pm}$ et $\phi_{i,m}^{\pm}$ avec $1 \leq i \leq r$ et $m \in \mathbb{Z}$.

- On utilise les séries génératrices

$$x_i^{\pm}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{i,m}^{\pm} z^m \quad \phi_i^{\pm}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_{i,m}^{\pm} z^m$$

Nouvelle réalisation de Drinfeld

Théorème (Gabber-Kac 1981)

L'algèbre de Kac-Moody affine $\hat{\mathfrak{g}}$ est isomorphe à l'algèbre de lacets $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$.

La nouvelle réalisation de Drinfeld (1988)

L'algèbre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ admet un nouveau système de générateurs $x_{i,m}^{\pm}$ et $\phi_{i,m}^{\pm}$ avec $1 \leq i \leq r$ et $m \in \mathbb{Z}$.

- On utilise les séries génératrices

$$x_i^{\pm}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{i,m}^{\pm} z^m \quad \phi_i^{\pm}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_{i,m}^{\pm} z^m$$

- Les $\phi_{i,m}^{\pm}$ engendrent une sous-algèbre, appelée **sous-algèbre de Drinfeld-Cartan**, qui est **commutative**.

J-présentation des Yangiens

Le Yangien $Y(\mathfrak{g})$

C'est une algèbre associative avec générateurs x et $J(x)$ pour $x \in \mathfrak{g}$ et des relations explicites. Par exemple, pour $x, y \in \mathfrak{g}$:

$$xy - yx = [x, y]_{\mathfrak{g}} \quad xJ(y) - J(y)x = J([x, y]_{\mathfrak{g}})$$

Le Yangien $Y(\mathfrak{g})$

C'est une algèbre associative avec générateurs x et $J(x)$ pour $x \in \mathfrak{g}$ et des relations explicites. Par exemple, pour $x, y \in \mathfrak{g}$:

$$xy - yx = [x, y]_{\mathfrak{g}} \quad xJ(y) - J(y)x = J([x, y]_{\mathfrak{g}})$$

- Le Yangien est une algèbre de Hopf dont le coproduit est déterminé par

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$$
$$\Delta(J(x)) = 1 \otimes J(x) + J(x) \otimes 1 + \frac{1}{2} [x \otimes 1, \Omega]$$

où Ω est l'élément de Casimir.

Le Yangien $Y(\mathfrak{g})$

C'est une algèbre associative avec générateurs x et $J(x)$ pour $x \in \mathfrak{g}$ et des relations explicites. Par exemple, pour $x, y \in \mathfrak{g}$:

$$xy - yx = [x, y]_{\mathfrak{g}} \quad xJ(y) - J(y)x = J([x, y]_{\mathfrak{g}})$$

- Le Yangien est une algèbre de Hopf dont le coproduit est déterminé par

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= 1 \otimes x + x \otimes 1 \\ \Delta(J(x)) &= 1 \otimes J(x) + J(x) \otimes 1 + \frac{1}{2} [x \otimes 1, \Omega]\end{aligned}$$

où Ω est l'élément de Casimir.

- On a une inclusion naturelle d'algèbres de Hopf $U(\mathfrak{g}) \subset Y(\mathfrak{g})$.

Nouvelle réalisation de Drinfeld (1988)

Le $Y(\mathfrak{g})$ admet un nouveau système de générateurs $x_{i,n}^{\pm}$ et $\xi_{i,n}$ pour $1 \leq i \leq r$ et $m \in \mathbb{N}$.

- On utilise les séries génératrices

$$x_i^{\pm}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_{i,n}^{\pm} z^{-n-1} \quad \xi_i(z) = 1 + \sum_{n \geq 0} \xi_{i,n} z^{-n-1}$$

- Les $\xi_{i,n}$ engendrent une sous-algèbre, appelée **sous-algèbre de Drinfeld-Cartan**, qui est **commutative**.

Formules de coproduit pour Drinfeld-Cartan

- On fait la factorisation suivante

$$\Delta(\xi_i(z)) = (1 \otimes \xi_i(z)) \times \Xi_i(z) \times (\xi_i(z) \otimes 1)$$

Formule de Molev pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ (2003)

$$\Xi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) x_1^-(z+1)^k \otimes x_1^+(z+1)^k$$

- Cette formule a été généralisée par Crampé (2004) pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$.
- L'évaluation de $\Xi_i(z)$ sur un produit tensoriel de deux représentations de dimension finie est **rationnelle** en z .

Comparaison des deux présentations

	Drinfeld–Jimbo	Nouvelle réalisation
Générateurs $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$	K_i, E_i, F_i, K_i^{-1}	$x_i^\pm(z), \phi_i^\pm(z)$
Générateurs $Y(\mathfrak{g})$	$x, J(x)$	$x_i^\pm(z), \xi_i(z)$
Formules du coproduit	Explicites, naturelles	Compliquées, partielles
Représentations	Peu adaptée	Classification naturelle

Comparaison des deux présentations

	Drinfeld–Jimbo	Nouvelle réalisation
Générateurs $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$	K_i, E_i, F_i, K_i^{-1}	$x_i^\pm(z), \phi_i^\pm(z)$
Générateurs $Y(\mathfrak{g})$	$x, J(x)$	$x_i^\pm(z), \xi_i(z)$
Formules du coproduit	Explicites, naturelles	Compliquées, partielles
Représentations	Peu adaptée	Classification naturelle

Question : Peut-on obtenir des formules du coproduit satisfaisantes, au moins pour la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan ?

Idée

Étudier le coproduit pour un **nouveau** système de générateurs de la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan :

Idée

Étudier le coproduit pour un **nouveau** système de générateurs de la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan :

- les **T-séries** pour les algèbres affines quantiques (*Frenkel-Hernandez 2015*)

Idée

Étudier le coproduit pour un **nouveau** système de générateurs de la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan :

- les **T-séries** pour les algèbres affines quantiques (*Frenkel-Hernandez 2015*)
- les **S-séries** pour les Yangiens (*Zhang 2024*)

1 Introduction

- Motivations et contexte historique
- Deux présentations des groupes quantiques

2 Formules du coproduct des T-séries et des S-séries

- T-séries des algèbres affines quantiques
- S-séries des Yangiens

3 Compatibilité du coproduct et de la troncature pour \mathfrak{sl}_2

- Troncature des Yangiens

4 Perspectives

T-séries des algèbres affines quantiques

- Nous introduisons les éléments $h_{i,s}$ de la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan pour $1 \leq i \leq r$ et $s < 0$ par

$$\phi_i^-(z) = \phi_{i,0}^- \exp \left(\sum_{s < 0} h_{i,s} z^s \right)$$

- Il existe des coefficients uniques $a_{i,j,s} \in \mathbb{C}$ pour $1 \leq i, j \leq r$ et $s < 0$ tels que les séries suivantes

$$T_i(z) = \exp \left(\sum_{s < 0} \sum_{j \in I} a_{i,j,s} h_{j,s} z^s \right)$$

vérifient des relations de commutation **plus simples**

Comparaison entre T-séries et ϕ -séries

T-séries

$$T_i(z)x_j^-(w) = \left(1 - \delta_{i,j}\frac{w}{z}\right) x_j^-(w)T_i(z)$$

$$x_j^+(w)T_i(z) = \left(1 - \delta_{i,j}\frac{w}{z}\right) T_i(z)x_j^+(w)$$

Comparaison entre T-séries et ϕ -séries

T-séries

$$T_i(z)x_j^-(w) = \left(1 - \delta_{i,j}\frac{w}{z}\right)x_j^-(w)T_i(z)$$

$$x_j^+(w)T_i(z) = \left(1 - \delta_{i,j}\frac{w}{z}\right)T_i(z)x_j^+(w)$$

ϕ -séries

$$\phi_i^-(z)x_j^\pm(w) = \frac{q^{\pm c_{ij}}w - z}{w - q^{\pm c_{ij}}z}x_j^\pm(w)\phi_i^-(z)$$

Comparaison entre T-séries et ϕ -séries

T-séries

$$T_i(z)x_j^-(w) = \left(1 - \delta_{i,j}\frac{w}{z}\right) x_j^-(w)T_i(z)$$

$$x_j^+(w)T_i(z) = \left(1 - \delta_{i,j}\frac{w}{z}\right) T_i(z)x_j^+(w)$$

ϕ -séries

$$\phi_i^-(z)x_j^\pm(w) = \frac{q^{\pm c_{ij}}w - z}{w - q^{\pm c_{ij}}z} x_j^\pm(w)\phi_i^-(z)$$

Relations entre ϕ -séries et T-séries (Frenkel-Hernandez 2015)

Chaque $\phi_i^-(z)$ est un monôme de Laurent en les $T_j(z)$.

Théta-séries pour les algèbres affines quantiques

- Comme pour la formule de Molev, le coproduit des T-séries se factorise

$$\Delta(T_i(z)) = (1 \otimes T_i(z)) \times \Theta_i(z) \times (T_i(z) \otimes 1)$$

Théta-séries pour les algèbres affines quantiques

- Comme pour la formule de Molev, le coproduit des T-séries se factorise

$$\Delta(T_i(z)) = (1 \otimes T_i(z)) \times \Theta_i(z) \times (T_i(z) \otimes 1)$$

- L'évaluation de $\Theta_i(z)$ sur un produit tensoriel de deux représentations de dimension finie est **polynomiale** en z^{-1} .

Théta-séries pour les algèbres affines quantiques

- Comme pour la formule de Molev, le coproduit des T-séries se factorise

$$\Delta(T_i(z)) = (1 \otimes T_i(z)) \times \Theta_i(z) \times (T_i(z) \otimes 1)$$

- L'évaluation de $\Theta_i(z)$ sur un produit tensoriel de deux représentations de dimension finie est **polynomiale** en z^{-1} .
- On peut factoriser le coproduit de $\phi_i^-(z)$

$$\Delta(\phi^-(z)) = (1 \otimes \phi^-(z)) \times \Phi_i^-(z) \times (\phi^-(z) \otimes 1)$$

mais l'évaluation de $\Phi_i^-(z)$ sur un produit tensoriel de deux représentations de dimension finie est **rationnelle** en z .

- L'algèbre affine quantique admet une R-matrice universelle

$$R(z) \in \left(U_q(\hat{\mathfrak{b}}) \overline{\otimes} U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \right) [[z]]$$

où $U_q(\hat{\mathfrak{b}})$ est la **sous-algèbre de Borel** engendrée par les E_i, K_i pour $0 \leq i \leq r$

- L'algèbre affine quantique admet une R-matrice universelle

$$R(z) \in \left(U_q(\hat{\mathfrak{b}}) \overline{\otimes} U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \right) [[z]]$$

où $U_q(\hat{\mathfrak{b}})$ est la **sous-algèbre de Borel** engendrée par les E_i, K_i pour $0 \leq i \leq r$

- La série $\Theta_i(z)$ provient de l'évaluation $(\rho_i \otimes 1)(R(z))$ en une représentation particulière ρ_i de $U_q(\hat{\mathfrak{b}})$, construite auparavant par Hernandez-Jimbo (2012).

Calcul des Théta-séries des algèbres affines quantiques

- L'algèbre affine quantique admet une R-matrice universelle

$$R(z) \in \left(U_q(\hat{\mathfrak{b}}) \overline{\otimes} U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \right) [[z]]$$

où $U_q(\hat{\mathfrak{b}})$ est la **sous-algèbre de Borel** engendrée par les E_i, K_i pour $0 \leq i \leq r$

- La série $\Theta_i(z)$ provient de l'évaluation $(\rho_i \otimes 1)(R(z))$ en une représentation particulière ρ_i de $U_q(\hat{\mathfrak{b}})$, construite auparavant par Hernandez-Jimbo (2012).
- L'évaluation $(\rho_i \otimes 1)(R(z))$ est difficile à calculer.

- Le premier cas non trivial ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$) est calculé par Zhang (2024) :

$$\Theta_1(z) = \exp_q \left((q - q^{-1}) x_{1,0}^- \otimes x_{1,-1}^+ z^{-1} \right)$$

Formules du coproduit

- Le premier cas non trivial ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$) est calculé par Zhang (2024) :

$$\Theta_1(z) = \exp_q \left((q - q^{-1}) x_{1,0}^- \otimes x_{1,-1}^+ z^{-1} \right)$$

- Le deuxième cas non trivial ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$) est donné par le théorème suivant.

Théorème (M. 2026)

Les théta-séries pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ sont données par

$$\Theta_1(z) = \exp_q \left((q - q^{-1}) x_{1,0}^- \otimes x_{1,-1}^+ z^{-1} \right) \exp_q \left((q - q^{-1}) [x_{1,0}^-, x_{2,0}^-]_q \otimes [x_{2,0}^+, x_{1,-1}^+]_{q^{-1}} z^{-1} \right)$$

$$\Theta_2(z) = \exp_q \left((q - q^{-1}) x_{2,0}^- \otimes x_{2,-1}^+ z^{-1} \right) \exp_q \left((q - q^{-1}) [x_{2,0}^-, x_{1,0}^-]_q \otimes [x_{1,0}^+, x_{2,-1}^+]_{q^{-1}} z^{-1} \right)$$

De plus, les q -exponentielles commutent dans les deux formules de Theta-séries.

1 Introduction

- Motivations et contexte historique
- Deux présentations des groupes quantiques

2 Formules du coproduit des T-séries et des S-séries

- T-séries des algèbres affines quantiques
- S-séries des Yangiens

3 Compatibilité du coproduit et de la troncature pour \mathfrak{sl}_2

- Troncature des Yangiens

4 Perspectives

S-séries des Yangiens

- Ce sont des séries $S_i(z)$ à coefficients dans la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan introduites par Zhang (2024). Elles vérifient les relations suivantes :

$$S_i(z)x_{j,m}^\pm = x_{j,m}^\pm S_i(z) \quad \text{si } i \neq j$$

$$S_i(z)x_{i,m}^- = (x_{i,m+1}^- - zx_{i,m}^-) S_i(z)$$

$$x_{i,m}^+ S_i(z) = S_i(z) (x_{i,m+1}^+ - zx_{i,m}^+)$$

S-séries des Yangiens

- Ce sont des séries $S_i(z)$ à coefficients dans la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan introduites par Zhang (2024). Elles vérifient les relations suivantes :

$$S_i(z)x_{j,m}^\pm = x_{j,m}^\pm S_i(z) \quad \text{si } i \neq j$$

$$S_i(z)x_{i,m}^- = (x_{i,m+1}^- - zx_{i,m}^-) S_i(z)$$

$$x_{i,m}^+ S_i(z) = S_i(z) (x_{i,m+1}^+ - zx_{i,m}^+)$$

- Le coproduit des S-séries se factorise comme :

$$\Delta(S_i(z)) = (1 \otimes S_i(z)) \times \Theta_i(z) \times (S_i(z) \otimes 1)$$

Calcul des théta-séries des Yangiens

- Chaque série $\Theta_i(z)$ est déterminée par un système de r relations linéaires provenant de la théorie des représentations des **Yangiens décalés** (KTWWY 2016, BFN 2019) :

Calcul des théta-séries des Yangiens

- Chaque série $\Theta_i(z)$ est déterminée par un système de r relations linéaires provenant de la théorie des représentations des **Yangiens décalés** (KTWWY 2016, BFN 2019) :

$$[\Theta_i(z), 1 \otimes x_{j,0}^+ + x_{j,0}^+ \otimes 1] = 0 \quad \text{pour } j \neq i;$$

$$[\Theta_i(z), x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z \otimes x_{i,0}^+] = \Theta_i(z) \times \left(\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{i,z} \otimes [x_{i,0}^+, e_{\alpha}] - \xi_{i,0} \otimes x_{i,0}^+ \right)$$

Calcul des théta-séries des Yangiens

- Chaque série $\Theta_i(z)$ est déterminée par un système de r relations linéaires provenant de la théorie des représentations des **Yangiens décalés** (KTWWY 2016, BFN 2019) :

$$[\Theta_i(z), 1 \otimes x_{j,0}^+ + x_{j,0}^+ \otimes 1] = 0 \quad \text{pour } j \neq i;$$

$$[\Theta_i(z), x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z \otimes x_{i,0}^+] = \Theta_i(z) \times \left(\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{i,z} \otimes [x_{i,0}^+, e_{\alpha}] - \xi_{i,0} \otimes x_{i,0}^+ \right)$$

- Problème : ce système est difficile à résoudre.

Formule du coproduit pour $Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$

- Zhang (2024) a calculé le premier cas non trivial ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$) :

$$\Theta_1(z) = \exp(x_{1,0}^- \otimes x_{1,0}^+)$$

Formule du coproduit pour $Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$

- Zhang (2024) a calculé le premier cas non trivial ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$) :

$$\Theta_1(z) = \exp(x_{1,0}^- \otimes x_{1,0}^+)$$

- Plus généralement, pour \mathfrak{g} de type A :

Théorème (M. 2026)

Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$, les Théta-séries sont données par :

$$\Theta_i(z) = \exp \left(\sum_{1 \leq j \leq i < k \leq r+1} E_{kj} \otimes E_{jk} \right)$$

où $E_{j,k}$ sont les matrices élémentaires dans $\mathfrak{sl}_{r+1} \subset Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$. En particulier, $\Theta_i(z)$ est l'exponentielle de la somme d'un nombre fini de termes qui commutent deux à deux.

Étapes du calcul en type A

- Expliciter le système linéaire à l'aide la J-présentation, la dernière équation devenant :

$$\left[x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z \otimes x_{i,0}^+, \Theta_i(z) \right] = \Theta_i(z) \left(\sum_{j=1}^i E_{ij} \otimes E_{j,i+1} - \sum_{k=i+1}^{n+1} E_{k,i+1} \otimes E_{ik} \right)$$

Étapes du calcul en type A

- Expliciter le système linéaire à l'aide la J-présentation, la dernière équation devenant :

$$\left[x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z \otimes x_{i,0}^+, \Theta_i(z) \right] = \Theta_i(z) \left(\sum_{j=1}^i E_{ij} \otimes E_{j,i+1} - \sum_{k=i+1}^{n+1} E_{k,i+1} \otimes E_{ik} \right)$$

- Conjecturer la formule générale (à partir des résultats pour \mathfrak{sl}_3 et \mathfrak{sl}_4).

Étapes du calcul en type A

- Expliciter le système linéaire à l'aide la J-présentation, la dernière équation devenant :

$$\left[x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z \otimes x_{i,0}^+, \Theta_i(z) \right] = \Theta_i(z) \left(\sum_{j=1}^i E_{ij} \otimes E_{j,i+1} - \sum_{k=i+1}^{n+1} E_{k,i+1} \otimes E_{ik} \right)$$

- Conjecturer la formule générale (à partir des résultats pour \mathfrak{sl}_3 et \mathfrak{sl}_4).
- Montrer que cette formule conjecturale résout le système linéaire.
- Conclure via l'unicité d'une solution unitriangulaire.

Résumé des deux approches de calcul des théta-séries

Les T-séries et S-séries diagonalisent les séries génératrices et possèdent des formules de coproduit compactes et similaires en termes de théta-séries.

- La T-série tire pleinement partie de l'existence de la sous-algèbre de Borel et de la R-matrice universelle explicite de l'algèbre affine quantique. Cette approche ne fonctionne pas pour le Yangien.
- La S-série est davantage liée aux Yangiens décalés. Nous utilisons une catégorie de représentations des Yangiens décalés qui est conjecturellement monoïdale. Cette approche pourrait fonctionner pour les algèbres affines quantiques décalées en type A (Finkelberg-Tsymbaliuk).

1 Introduction

- Motivations et contexte historique
- Deux présentations des groupes quantiques

2 Formules du coproduit des T-séries et des S-séries

- T-séries des algèbres affines quantiques
- S-séries des Yangiens

3 Compatibilité du coproduit et de la troncature pour \mathfrak{sl}_2

- Troncature des Yangiens

4 Perspectives

Définition (GKLO 2005)

Soit $\varphi(z)$ une série de Laurent en z^{-1} de terme dominant z^{2m} . La **A-série** $A^\varphi(z)$ est l'unique solution de l'équation aux différences :

$$\xi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{A^\varphi(z)A^\varphi(z-1)}.$$

Elle est une série de Laurent en z^{-1} à coefficients dans la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan et de terme dominant z^m :

$$A^\varphi(z) = z^m + \sum_{k \leq m} A_{-k}^\varphi z^{k-1}$$

Définition (GKLO 2005)

Soit $\varphi(z)$ une série de Laurent en z^{-1} de terme dominant z^{2m} . La **A-série** $A^\varphi(z)$ est l'unique solution de l'équation aux différences :

$$\xi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{A^\varphi(z)A^\varphi(z-1)}.$$

Elle est une série de Laurent en z^{-1} à coefficients dans la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan et de terme dominant z^m :

$$A^\varphi(z) = z^m + \sum_{k \leq m} A_{-k}^\varphi z^{k-1}$$

Définition (GKLO 2005)

Soit $\varphi(z)$ une série de Laurent en z^{-1} de terme dominant z^{2m} . La **A-série** $A^\varphi(z)$ est l'unique solution de l'équation aux différences :

$$\xi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{A^\varphi(z)A^\varphi(z-1)}.$$

Elle est une série de Laurent en z^{-1} à coefficients dans la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan et de terme dominant z^m :

$$A^\varphi(z) = z^m + \sum_{k \leq m} A_{-k}^\varphi z^{k-1}$$

Définition (KWWY 16 - BFN 19)

Le **Yangien tronqué** $Y^\varphi(\mathfrak{sl}_2)$ est le quotient de $Y(\mathfrak{sl}_2)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $(A_k^\varphi)_{k \geq 0}$.

Coproduct et troncature

Pour deux séries de Laurent $\varphi(z), \psi(z)$, les surjections canoniques $\pi^\varphi : Y(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow Y^\varphi(\mathfrak{sl}_2)$ et π^ψ permettent de considérer le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y(\mathfrak{sl}_2) & \xrightarrow{\Delta} & Y(\mathfrak{sl}_2) \otimes Y(\mathfrak{sl}_2) \\ \pi^{\varphi\psi} \downarrow & & \downarrow \pi^\varphi \otimes \pi^\psi \\ Y^{\varphi\psi}(\mathfrak{sl}_2) & & Y^\varphi(\mathfrak{sl}_2) \otimes Y^\psi(\mathfrak{sl}_2) \end{array}$$

Coproduct et troncature

Pour deux séries de Laurent $\varphi(z), \psi(z)$, les surjections canoniques $\pi^\varphi : Y(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow Y^\varphi(\mathfrak{sl}_2)$ et π^ψ permettent de considérer le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y(\mathfrak{sl}_2) & \xrightarrow{\Delta} & Y(\mathfrak{sl}_2) \otimes Y(\mathfrak{sl}_2) \\ \pi^{\varphi\psi} \downarrow & & \downarrow \pi^\varphi \otimes \pi^\psi \\ Y^{\varphi\psi}(\mathfrak{sl}_2) & \overset{\exists? \Delta^{\varphi,\psi}}{\dashrightarrow} & Y^\varphi(\mathfrak{sl}_2) \otimes Y^\psi(\mathfrak{sl}_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Y(\mathfrak{sl}_2) & \xrightarrow{\Delta} & Y(\mathfrak{sl}_2) \otimes Y(\mathfrak{sl}_2) \\ \pi^{\varphi\psi} \downarrow & & \downarrow \pi^\varphi \otimes \pi^\psi \\ Y^{\varphi\psi}(\mathfrak{sl}_2) & \xrightarrow{\Delta^{\varphi,\psi}} & Y^\varphi(\mathfrak{sl}_2) \otimes Y^\psi(\mathfrak{sl}_2) \end{array}$$

Théorème (M. 2025)

Soient $\varphi(z) \in z^{2m}(1 + z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]])$ et $\psi(z) \in z^{2n}(1 + z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]])$. Alors le coproduit du Yangien induit un morphisme d'algèbres :

$$\Delta^{\varphi,\psi} : Y^{\varphi\psi}(\mathfrak{sl}_2) \longrightarrow Y^\varphi(\mathfrak{sl}_2) \otimes Y^\psi(\mathfrak{sl}_2)$$

Idée de la démonstration

- Calculer le coproduit de $A^{\varphi\psi}(z)$ avec la relation :

$$S_1(z+1) = S_1(z) \times A(z)$$

Nous obtenons la formule :

$$\Delta(A^{\varphi\psi}(z)) = A^{\varphi}(z) \otimes A^{\psi}(z) + [A^{\varphi}(z), x_{1,0}^-] \otimes [x_{1,0}^+, A^{\psi}(z)]$$

- Vérifier que $(\pi^{\varphi} \otimes \pi^{\psi}) \Delta(A^{\varphi\psi}(z))$ est un polynôme en z .

- Formules des théta-séries pour $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{r+1})$.
- Compatibilité entre le coproduit et la troncature pour $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ et $Y(\mathfrak{g})$.
- Tressage des catégories de représentations des groupes quantiques décalés.
- Coproduit pour les générateurs de Drinfeld originaux.

Les slides suivantes n'ont pas été présentées lors de la soutenance, servant simplement de support en cas de questions du jury liées à ces slides.

Théorème (M. 2025)

Soient $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ des polynômes complexes de termes constants non nuls. Alors :

$$\Delta(A^{\varphi\psi^-}(z)) = A^{\varphi^-}(z) \otimes A^{\psi^-}(z) + q^{-1}z [A^{\varphi^-}(z), x_1^-] \otimes [x_0^+, A^{\psi^-}(z)] ;$$

$$\Delta(A^{\varphi\psi^+}(z)) = A^{\varphi^+}(z) \otimes A^{\psi^+}(z) + qz^{-1} [A^{\varphi^+}(z), x_0^-] \otimes [x_{-1}^+, A^{\psi^+}(z)] .$$

Yangiens décalés : Famille d'algèbres $Y_\mu(\mathfrak{g})$ paramétrée par les copoids de \mathfrak{g} .

Yangiens décalés : Famille d'algèbres $Y_\mu(\mathfrak{g})$ paramétrée par les copoids de \mathfrak{g} .

Catégorie de représentations

Pour μ un copoids fixé, on considère une catégorie de représentations \mathcal{C}_μ . On définit alors la catégorie de représentations \mathcal{C}_{sh} par

$$\mathcal{C}_{\text{sh}} = \bigoplus_{\mu} \mathcal{C}_\mu$$

Yangiens décalés

Yangiens décalés : Famille d'algèbres $Y_\mu(\mathfrak{g})$ paramétrée par les copoids de \mathfrak{g} .

Catégorie de représentations

Pour μ un copoids fixé, on considère une catégorie de représentations \mathcal{C}_μ . On définit alors la catégorie de représentations \mathcal{C}_{sh} par

$$\mathcal{C}_{\text{sh}} = \bigoplus_{\mu} \mathcal{C}_\mu$$

Conjecture

La catégorie \mathcal{C}_{sh} est monoïdale non stricte.