Une histoire des groupes quantiques

Jérôme Milot
jerome.milot@univ-lille.fr

Introduction

Ce document a pour but d'offrir un modeste panorama sur l'histoire des groupes quantiques, avec un petit coup de projecteur sur la première construction algébrique de certains d'entre eux. Il peut s'y trouver des inexactitudes historiques et des coquilles mathématiques. N'hésitez pas à me contacter si vous souhaitez discuter de certains points. Je l'ai conçu en préparant un séminaire des doctorants, l'objectif est donc d'être le plus accessible possible. Si vous vous posez la question, je suis pour ma part un étudiant en thèse au laboratoire Paul Painlevé à Lille. Je travaille sur la théorie des représentations des Yangiens et algèbres affines quantiques (décalés, tronqués, ...). Mais trève de mondanités, voici un petit descriptif de ce document.

La première section est essentiellement à visée historique : d'où viennent les groupes quantiques ? Qu'est-ce qui a motivé leur construction ? En commençant par quelques notions du passage de la mécanique classique à la mécanique quantique, je tente d'expliciter le parallèle avec l'avènement des groupes quantiques. Cette section est principalement inspirée par l'introduction de [VP95].

La deuxième section contient davantage d'algèbre, mais est - je pense - accessible à un public avec des bases d'algèbre linéaire prêt à faire usage de quelques boîtes noires. J'y rappelle les définitions élémentaires des algèbres de Lie, avec un petit laïus sur leur riche monde des représentations, avant d'explciter la construction de leur algèbre enveloppante et leur intérêt. La dernière sous-section est dédiée à la déformation de ces algèbres dans le cas particulier de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ pour découvrir une construction de groupe quantique.

La troisième et dernière section est dédiée à une application des groupes quantiques dans le cadre de la théorie des noeuds. Comment se servir de cette nouvelle grande famille d'objets ? J'y explique le lien profond entre les groupes quantiques quasi-triangulaires et les noeuds, en donnant un exemple de calcul d'invariants dans le cas du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Cette section est principalement inspirée de [Abd14].

1 Histoire des groupes quantiques

1.1 Mécanique classique et mécanique quantique

En mécanique classique, adaptée à une étude macroscopique, un système est la donnée

- d'**états**, modélisés par une variété différentielle complexe M, servant à donner une description du système (le temps, par exemple)
- d'**observables**, modélisés un espace de fonctions sur M à valeurs complexes, noté $\mathcal{F}(M)$, muni d'un crochet de Poisson. Cet espace permet de décrire les propriétés du système qui se calculent de manière exacte (la position ou le moment, par exemple)

Un crochet de Poisson, c'est un crochet de Lie muni de quelques conditions supplémentaires. Par exemple, l'action de l'opérateur hamiltonien sur un observable peut être décrite via le crochet de Poisson.

En mécanique quantique, adaptée à une étude microscopique, les états (désormais appelés états quantiques) sont remplacés par un espace de Hilbert V [1] et les observables par les opérateurs (non nécessairement bornés) sur V. Moralement, le commutateur de cet espace d'opérateurs correspond au crochet de Poisson dans le cadre classique : l'action de l'opérateur hamiltonien quantique sur un observable peut être décrite via ce commutateur.

Un modèle classique devient pertinent lorsque la constante de Planck est très petite par rapport aux grandeurs qui entrent en jeu. Ainsi, nous pouvons passer d'un modèle quantique à un modèle classique lorsque $\hbar \to 0$.

Une question naturelle est donc : de quelle manière peut-on passer de la mécanique classique à la mécanique quantique ?

Une première idée est d'exhiber une application Q qui à chaque observable $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ associe un opérateur sur V, satisfaisant les relations liées au crochet de Poisson et au commutateur, au sens où l'on aimerait :

$$Q\left(\{f_1, f_2\}\right) = \frac{2i\pi\left[Q(f_1), Q(f_2)\right]}{\hbar}.$$

Néanmoins, Hip Groenewold démontra en 1946 qu'il ne peut exister de telle application. Dès lors, comment procéder à la quantification ?

En 1949, José Moyal propose une autre formulation du problème de quantification. Une différence notable entre l'espace des observables du cas classique et le cas quantique est la commutativité. L'idée est donc de substituer au produit commutatif de $\mathcal{F}(M)$ un produit légèrement déformé par un paramètre h. Le choix de la lettre h n'est pas anodine : ce paramètre doit vérifier la même logique que la constante de Planck, c'est-à-dire que le cas classique doit correspondre au cas limite $h \to 0$.

1. Il me semble qu'il s'agit plutôt de l'ensemble des rayons d'un espace de Hilbert, mais je laisse ces précisions de côté.

On note alors ce produit $\star_h$. Celui-ci est construit de sorte que son commutateur, appelé crochet de Moyal, corresponde effectivement au crochet de Poisson dans le cas classique :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1 \star_h f_2 - f_2 \star_h f1}{h} = \{f_1, f_2\}.$$

Le nouvel espace est alors noté $\mathcal{F}_h(M)$.

De cette manière, à partir d'une variété différentielle M du cas classique, on peut associer une famille d'espaces quantiques M_h tels que chaque espace $\mathcal{F}_h(M)$ correspond à l'algèbre des fonctions sur M_h.

Bienvenue dans le monde merveilleux de la géométrie non commutative.

1.2 L'avènement des groupes quantiques

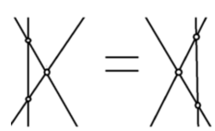
La première apparition des groupes quantiques remonte à la fin des années 70, dans l'étude de l'école de Saint-Pétersbourg - et plus particulièrement de Ludvig Faddeev - de systèmes intégrables quantiques via la "quantum inverse scattering method".

Toutefois, ceux-ci ne sont pas encore définis de la manière qui nous intéresse ici, et leur importance n'est pas encore saisie. Il s'agit d'algèbres associatives définies par des relations exprimées en terme d'une matrice appelée **R-matrice**. Les R-matrice sont choisies comme des solutions de l'équation de Yang-Baxter quantique, laquelle encode des symétries du système.

Soyons un peu plus précis. L'équation de Yang-Baxter peut se formuler sous la forme suivante : pour un espace vectoriel V, on dit que l'opérateur de $V \otimes V$ R est une solution de l'équation de Yang-Baxter s'il vérifie

$$(R \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes R) \circ (R \otimes \mathrm{id}_V) = (\mathrm{id}_V \otimes R) \circ (R \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes R).$$

On peut encoder cette relation sous forme de tresses : il faut imaginer que si R est une R-matrice, alors elle agit comme une interversion de deux brins.



C'est en 1985 que Vladimir Drinfel'd et Michio Jimbo introduisent, indépendamment, une construction algébrique de certains groupes quantiques comme déformations - au sens développée dans la première sous-section - d'algèbres de Lie [2].

Ces articles fondateurs marquent le début de la ruée vers l'or du monde - gargantuesque - des groupes quantiques, avec de nombreux résultats récompensés

2. J'en vois déjà certain·e·s bondir au plafond : ce ne sont pas les algèbres de Lie qu'on déforme, mais leur algèbre enveloppante. Nous reviendrons sur cette idée plus tard, mais les non-initiés peuvent tout de même retenir cette grossière approximation en première lecture.

(médaille Fields 1990 par exemple) et des applications dans des domaines variés, inimaginables à l'aube de l'essor du domaine (topologie en basse dimension, théorie des représentations des groupes algébriques en caractéristique non nulle, etc.).

Petite parenthèse pour souligner que les groupes quantiques cristallisent le va-et-vient des idées et des découvertes en physique et mathématiques. D'abord, les physiciens introduisent de nouvelles algèbres à partir de solutions d'équations. Ensuite, les mathématiciens décrivent algébriquement ces structures, et permettent ainsi de systématiser leur création. Les physiciens peuvent alors s'en servir pour obtenir de nouvelles solutions à l'équation de départ. C'est de toute beauté.

D'accord, lorsque la gigantesque roue de la recherche mathématique est en marche et qu'on constate son cheminement à postériori, c'est magnifique. Mais finalement, on n'est pas vraiment plus avancé : c'est quoi, un groupe quantique ?

1.3 Les groupes quantiques : tentative de définition

> C'est un groupe ? - Non, Sire,
> c'est un groupe quantique !
>
> *Toute personne découvrant les groupes quantiques*

Commençons pas faire de l'anti-pédagogie, en expliquant tout d'abord ce qu'un groupe quantique n'est pas : ce n'est pas un groupe. Toutefois, nous allons voir en quoi cette appellation n'est pas - totalement - saugrenue. Pour comprendre l'état d'esprit derrière les groupes quantiques, nous allons nous intéresser aux groupes.

Soit G un groupe, on note μ son produit et i l'opération inverse. L'opération multiplication peut avoir un sens physique : elle peut s'interpréter comme l'amalgame de deux particules en une seule. On aimerait également disposer d'une opération encodant la scission d'une particule en deux. On appelerait alors une telle opération un coproduit, et on le noterait Δ.

Ce paragraphe va être un peu plus technique et peut être sauté si vous le souhaitez. On va essayer de donner un sens plus formel à l'intuition précédente. Si on considère l'algèbre des fonctions sur G $\mathcal{F}(G)$, on constate que μ induit une application

$$\mu^* \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(G) & \rightarrow & \mathcal{F}(G \times G) \\ f & \mapsto f \circ \mu & \end{array}.$$

En considérant le produit tensoriel usuel de $\mathcal{F}(G)$, on constate qu'on dispose d'un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{F}(G \times G) \simeq \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$. Cette opération correspond en réalité au coproduit Δ que l'on souhaite. On peut procéder de la même manière pour l'inverse, qui induit l'application

$$i^* \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(G) & \rightarrow & \mathcal{F}(G) \\ f & \mapsto f \circ i & \end{array}.$$

Cette opération est alors appelée antipode et est notée S.

Enfin, la dernière application qu'il est naturel de considérer est l'unité η, qui induit l'application :

$$\eta^* \quad : \quad \mathcal{F}(G) \quad \to \mathbb{C}$$

qu'on appelle counité et qu'on note ε.

Ces trois nouvelles applications vérifient certaines propriétés que nous ne détaillerons pas ici, mais nous touchons au but. Une algèbre munie du coproduit, de l'antipode et de la counité est appelée **algèbre de Hopf**.

Et c'est ici qu'interviennent les premières discussions sur ce que sont les groupes quantiques : pour certains auteurs, un groupe quantique est ... une algèbre de Hopf. Néanmoins, je ne suis pas friand de cette idée pour la raison suivante.

Avec cette définition, l'algèbre d'un groupe est donc un groupe quantique. On peut expliciter son coproduit, qui est simplement donné par

$$\Delta(g) = g \otimes g.$$

On constate que si l'on intervertit le premier et le deuxième facteur du coproduit, le résultat est inchangé. Cette propriété n'est pas anodine : c'est la notion duale de la notion de commutativité, que l'on appelle donc **cocommutativité**. Toutefois, cette propriété n'est pas inhérente aux algèbres de Hopf. Il se trouve que les algèbres de Hopf cocommutatives ne sont pas très intéressantes [3]. C'est pour cette raison que certains auteurs préfèrent qualifier de groupe quantique toute algèbre de Hopf non cocommutative. On retrouve alors l'idée que le monde quantique, c'est le monde du non (co)commutatif.

Toutefois, que vous préfériez une considération ou l'autre, il ne s'agit que de la face émergée de l'iceberg. À comprendre : il existe des tonnes et des tonnes de familles de groupes quantiques différentes, avec des constructions et des propriétés qui diffèrent. Dans la suite de cette petite histoire, nous allons nous concentrer sur le cas particulier des algèbres de Hopf quasi-triangulaires [4]. D'une part parce que l'on dispose d'une manière d'en construire de manière systématique à partir d'algèbres de Lie, d'autre part parce que la propriété sous-jacente permet de lier ces groupes quantiques aux R-matrices utilisées dans la quantum inverse scattering method.

2 Réalisation algébrique des groupes quantiques

Nous allons dans cette section nous intéresser à la construction de groupes quantiques à partir d'algèbres de Lie, via la réalisation de Drinfel'd-Jimbo. Il s'agit, historiquement, de la première construction algébrique des groupes quantiques. Réalisée indépendamment en 1985 par Drinfel'd et Jimbo, elle est reliée à la construction de Faddeev par Drinfel'd, puis ce dernier proposera une autre réalisation en 1988.

3. À ma connaissance du moins.

4. Pour les plus curieux souhaitant explorer d'autres familles de groupes quantiques, la notion de produit bicroisé d'algèbres de Hopf peut vous intéresser.

2.1 Algèbres de Lie : notions élémentaires

Nous allons commencer par rappelle succintement quelques notions élémentaires sur les algèbres de Lie et essayer de comprendre l'intérêt de l'"envelopper" dans une algèbre plus grande. Ici, nous nous plaçons dans le corps $\mathbb{C}$.

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1 (Algèbre de Lie)**.** *Une algèbre de Lie est un espace vectoriel L muni d'une opération bilinéaire antisymétrique appelée crochet, vérifiant l'identité dite de Jacobi :*

$$\forall x, y, z \in L : \quad [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y\, [z, x]] = 0.$$

Exemple 1.

- *Toute algèbre peut être vue comme une algèbre de Lie, où le crochet est défini comme le commutateur.*
- *En particulier, toute algèbre de matrices est une algèbre de Lie. C'est par exemple le cas de l'algèbre des matrices carrées de taille n de traces nulles, que l'on note $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.*
- *Un espace vectoriel de dimension infinie muni du crochet nul est une algèbre de Lie de dimension infinie.*

Nous allons

Exemple 2 (L'exemple fondamental de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$)**.** *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ peut être définie par générateurs et relations :*

- *Générateurs :*

$$X^+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad X^- := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- *Relations entre générateurs :*

$$\left[X^+, X^-\right] = H; \quad \left[H, X^+\right] = 2X^+; \quad \left[H, X^-\right] = -2X^-.$$

Remarque Il est important de noter que l'exemple de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ n'est pas qu'à visée pédagogique : on travaille sur les algèbres de Lie semi-simples de la même façon que sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. À dire vrai, on se ramène même à des copies de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans ces algèbres de Lie pour travailler dessus.

Nous en profiter pour donner la définition d'un morphisme d'algèbres de Lie. Celle-ci est naturelle : il s'agit d'une application entre espaces vectoriels qui préserve les données des crochets.

Définition 2.1.2 (Morphisme d'algèbres de Lie)**.** *Soient L et L' deux algèbres de Lie. Un **morphisme d'algèbres de Lie** de L dans L' est une application linéaire ρ de L dans L' compatible avec les crochets, c'est-à-dire :*

$$\forall x, y \in L : \quad \rho([x, y]_L) = [\rho(x), \rho(y)]_{L'}\,.$$

2.1.2 Théorie des représentations

En mathématiques, lorsque l'on découvre [5] un nouvel objet, un nouveau concept, on aime bien pouvoir se ramener à des objets et concepts sur lesquels on a déjà travaillé et qu'on maîtrise mieux. C'est le cas par exemple pour les représentations de groupes : on préfère travailler avec des outils d'algèbre linéaire pour étudier les groupes. Les algèbres de Lie n'échappent pas à cette règle.

Définition 2.1.3. *Une **représentation d'algèbre de Lie** de L est la donnée :*

- *d'un espace vectoriel V ;*
- *d'un morphisme d'algèbres de Lie ρ de L dans $End(V)$, l'espace des endomorphismes de V.*

Autrement dit, c'est la donnée d'un espace vectoriel V et d'une application linéaire $\rho : L \to End(V)$ telle que

$$\forall x, y \in L : \quad \rho([x, y]_L) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x).$$

De plus, on définit la dimension de la représentation comme la dimension de l'espace vectoriel sous-jacent.

Exemple 3.
- *L'algèbre de Lie L étant un espace vectoriel, on peut la voir comme une représentation d'algèbres de Lie, en définissant l'action adjointe :*

$$\begin{array}{cccc} ad & : & L & \to End(L) \\ & & x \mapsto [x, \cdot] & \end{array}.$$

- *Les représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sont paramétrées par les entiers naturels. Plus précisément, pour tout entier naturel m, il existe une unique représentation de dimension m.*

Exemple 4. *Donnons explicitement des exemples de représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.*

- *L'unique représentation de dimension 1 V_0 est la représentation triviale : tous les éléments de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ agissent le vecteur nul sur L_0.*
- *L'unique représentation de dimension 2 $V_1 = Vect(e_1, e_2)$ est la représentation standarde. On peut alors voir V_1 comme $\mathbb{C}^2$. Dans ce cas, l'action de L sur C^2 est donnée par la multiplication matricielle, où e_1, e_2 sont vus comme les vecteurs de la base canonique.*

  L'action explicite des générateurs est alors donnnée par :

$$X^+ \cdot e_1 = 0; \; X^+ \cdot e_2 = e_1;$$
$$X^- \cdot e_1 = e_2; \; X^- \cdot e_2 = 0;$$
$$H \cdot e_1 = e_1; \; H \cdot e_2 = -e_2.$$

- *L'unique représentation de dimension 3 est L elle-même munie de l'action adjointe.*

5. ou invente, selon votre philosophie !

2.2 L'algèbre enveloppante

2.2.1 Définition

Nous commençons par définir la notion d'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie. Celle-ci, en plus de pouvoir être déformée comme nous le verrons dans la section suivante, présente plusieurs intérêts :

- Elle agrandit l'espace dans lequel on considère l'algèbre de Lie : l'algèbre enveloppante est une algèbre *contenant* l'algèbre de Lie, dans laquelle le crochet de Lie s'interprète désormais comme un commutateur.
- Toute représentation d'algèbre de Lie est un module de son algèbre enveloppante, et réciproquement.
- On dispose du tout puissant théorème PBW qui permet d'ordonner les vecteurs de la base, permettant d'établir nombre de théorèmes de structures utiles et de décrire plus simplement bon nombre de représentationts, dont celles de plus haut poids.

Prenons le temps de décrire sa construction. Dans l'idée, on veut construire une algèbre à partir de l'algèbre de Lie. Celle-ci étant un espace vectoriel, il ne lui manque finalement qu'un produit interne. On le construit artificiellement via l'algèbre tensorielle.

Définition 2.2.1 (Algèbre tensorielle)**.** *On définit l'algèbre tensorielle de L par :*

$$T(L) := \mathbb{C} \oplus L \oplus (L \otimes L) \oplus (L \otimes L \otimes L) \oplus \dots$$

Comme son nom l'indique, cet espace est muni d'une structure d'algèbre, où le produit correspond à la concaténation (i.e $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m$).

L'algèbre enveloppante suit la même idée, mais on souhaite interpréter le commutateur du produit comme le crochet dans l'algèbre de Lie sous-jacente. La manière algébrique de réaliser cela est de quotienter l'algèbre tensorielle.

Définition 2.2.2 (Algèbre enveloppante)**.** *Soit I l'idéal bilatère engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ pour tous $x, y \in L$. On définit l'algèbre enveloppante :*

$$U(L) = T(L)/I.$$

Remarque Même si l'algèbre de Lie L est également une algèbre (par exemple pour un espace de matrices), l'algèbre enveloppante ne correspond pas à cette algèbre. Par exemple, l'algèbre enveloppante est toujours de dimension infinie.
Remarque Désormais, pour $x, y \in L$, on notera xy le produit de ces deux éléments dans l'algèbre enveloppante, même si l'algèbre de Lie initiale était une algèbre initialement (on "oublie" [6] cette structure).

6. Dédicace à mes catégoristes sûrs.

Il existe de nombreuses directions pour travailler avec l'algèbre enveloppante, je vais me contenter de souligner certaines de ses propriétés remarquables.

Proposition 2.2.3.
- *L'algèbre de Lie s'injecte dans l'algèbre enveloppante. Ce résultat n'est pas évident (on recourt au théorème de Poincarré-Birkhoff-Witt), mais il est vrai.*
- *L'algèbre enveloppante est dotée d'une propriété universelle : pour tout application linéaire de L dans une algèbre associative A, il existe un unique morphisme d'algèbre de $U(L)$ dans A factorisant cette application linéaire.*
- *Toute représentation d'algèbre de Lie de L est un $U(L)$-module et réciproquement. Cela permet de travailler indifféremment avec l'un ou l'autre point de vue.*

2.2.2 Structure d'algèbre de Hopf

Le dernier point de la liste (non-exhaustive) des propriétés de l'algèbre enveloppante souligne l'intérêt d'expliciter une structure d'algèbre de Hopf dessus : on peut alors considérer le produit tensoriel de représentations de L comme une représentation de L.

Définition 2.2.4. *Le coproduit de $U(L)$ est défini par :*

$$\forall x \in U(L) \;:\; \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

L'antipode de $U(L)$ est défini par :

$$\forall x \in U(L) \;:\; S(x) = -x.$$

La counité de $U(L)$ est définie par :

$$\forall x \in U(L) \;:\; \epsilon(x) = 0.$$

De la même manière que pour l'espace de fonctions sur un groupe, on constate que notre coproduit est sage : si on lui applique le twist $\tau : x \otimes y \mapsto y \otimes x$, on constate que $\Delta = \tau \circ \Delta$. Nous allons donc maintenant étudier de quelle manière ont procédé Drinfel'd et Jimbo pour déformer ces relations.

2.3 Déformation de Drinfel'd et Jimbo

2.3.1 Définition par déformation

Pour construire des groupes quantiques quasi-triangulaires, nous allons déformer les relations définissant l'algèbre de Hopf, dans le même esprit que les déformations introduites par Moyal que nous avons vues en première section.

Nous allons procéder par l'exemple en construisant le groupe quantique associé à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

On introduit donc un paramètre de déformation h. On pose également $q = \exp(h)$ et $K = \exp(hH)$. Commençons par définir le groupe quantique associée à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ puis constatons que sa limite classique correspond bien à l'algèbre enveloppante.

Définition 2.3.1 (Algèbre quantique de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$)**.** *L'**algèbre quantique** de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, notée $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est définie par des générateurs X, Y, K et K^{-1} vérifiant :*

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1; \quad KXK^{-1} = q^2X; \quad KYK^{-1} = q^{-2}Y;$$
$$XY - YX = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

Faisons-le lien entre ces générateurs et ceux de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Le générateur X correspond au générateur X^+ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Le générateur Y correspond au générateur X^-. Le générateur K correspond au générateur H.

On souhaite donc vérifier que, lorsque $h \to 0$, les relations entre X, Y et K correspondent à celles entre X^+, X^- et H.

Or, on constate en effet :

$$\frac{KX - q^2XK}{h} = \frac{e^{hH}X - e^{2h}Xe^{hH}}{h} = \frac{h(HX - XH - 2X + o(h))}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} [H, X]-2X.$$

On peut vérifier de la même manière les autres relations, par exemple :

$$\frac{(q - q^{-1})\,(XY - YX) - \left(K - K^{-1}\right)}{h} = \frac{(2h + o(h))\,[X, Y] - (2hH + o(h))}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} [X, Y]-H.$$

2.3.2 Structure d'algèbre de Hopf

Nous pouvons dès lors munir $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ d'une structure d'algèbre de Hopf [7] qui correspond à celle de $U(\mathfrak{sl}_2)$ lorsque $h \to 0$.

Définition 2.3.2. *Le coproduit de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est défini sur les générateurs par*

$$\Delta(X) = 1\otimes X+X\otimes K;\ \Delta(Y) = Y\otimes 1+K^{-1}\otimes Y;\ \Delta(K) = K\otimes K,\ \Delta(K^{-1}) = K^{-1}\otimes K^{-1}.$$

L'antipode de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est défini sur les générateurs par

$$S(X) = -XK^{-1},\ S(Y) = -KY,\ S(K) = K^{-1}.$$

La counité de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est définie sur les générateurs par

$$\varepsilon(X) = \varepsilon(Y) = 0,\ \varepsilon(K) = 1.$$

2.3.3 Théorie des représentations

Nous allons commencer par imposer une condition sur notre déformation : nous allons considérer que q n'est pas une racine de l'unité [8]. Dans ce cas-là, la théorie des représentation de notre groupe quantique peut être vue comme une déformation de la théorie classique des représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Reprenons l'exemple de la représentation de dimension 2 de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On peut décrire l'action de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ dessus :

7. Ce n'est pas la seule possible, mais c'est la plus uselle (et de loin).
8. Le cas des racines de l'unité est pathologique, dans le sens où ça ne se déroule pas de manière analogue au cas classique, mais reste très intéressant et lié à d'autres domaines.

Exemple 5. *Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ agit sur $\mathbb{C}^2 = Vect(e_1, e_2)$ par :*

$$X \cdot e_1 = 0;\ X \cdot e_2 = e_1$$
$$Y \cdot e_1 = e_2;\ Y \cdot e_2 = 0$$
$$K \cdot e_1 = qe_1;\ K \cdot e_2 = q^{-1}e_2.$$

Comme dans le cas de l'algèbre enveloppante, la structure d'algèbre de Hopf permet de considérer des produits tensoriels de représentations. Toutefois, le fait que le coproduit ne soit plus cocommutative change quelque peu la donne.

2.4 Quasi-triangulaire ?

Nous allons maintenant expliciter un peu plus ce qui se cache derrière la notion de quasi-triangularité. Il s'agit d'une famille de groupes quantiques pour lesquelles on peut exhiber un élément de particulier : la R-matrice universelle. Algébriquement, la R-matrice universelle est un élément qui approche le plus possible l'algèbre de Hopf de la cocommutativité : le coproduit twisté est conjugué au coproduit par la R-matrice universelle :

$$\tau \circ \Delta = R\Delta R^{-1}.$$

Comme son nom l'indique, il s'agit d'une R-matrice. Le fait d'être quasi-triangulaire permet de systématiser sa construction. Il convient de noter ici qu'on fait le chemin inverse des toutes premières démarches de Faddeev : on dispose d'un groupe quantique, on construit alors une solution de l'équation de Yang-Baxter.

La R-matrice universelle associée à un groupe quantique revêt une importance fondamentale lorsqu'on étudie les représentations du groupe quantique. En effet, à priori, pour deux représentations V, W, il n'y a pas d'isomorphisme entre $V \otimes W$ et $W \otimes V$. Néanmoins, la R-matrice universelle fournit un tel isomorphisme[9]. Nous allons voir comment ce fait est utilisé pour construire des invariants quantiques de noeuds.

3 Application aux invariants de noeuds

> C'est bien de pouvoir joindre les deux bouts, mais c'est encore mieux de pouvoir faire un joli noeud.
>
> La pâle figure - *Philip Kerr*

L'objectif de cette section est d'intuiter autant que faire se peut la manière dont les groupes quantiques interviennent en théorie des noeuds, sans aucun requis préalable (hormis tout ce dont nous avons discuté jusqu'ici).

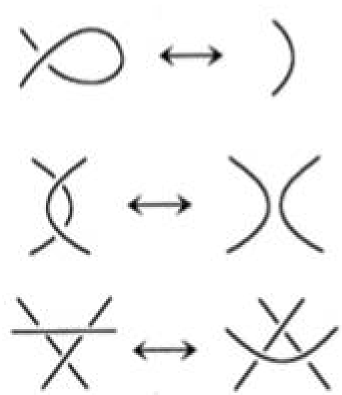
9. Il s'agit d'appliquer la R-matrice universelle puis de twister les deux facteurs.

3.1 Notions de théorie des noeuds

Tout d'abord, qu'est-ce qu'un noeud ? Un noeud, c'est un cercle [10]. On s'intéresse plus précisément, à une projection sur un plan d'un cercle dans l'espace, en gardant comme donnée la manière dont il est tordu (quel brin passe au-dessus de l'autre). Ceci nous donne un diagramme de noeuds.

Bien sûr, certains noeuds peuvent être tordus pour ressembler à d'autre (par exemple, un noeud de la forme d'un 8 peut aisément être ramené à un cercle standard, juste avec une petite rotation). De fait, il convient de mettre en place une notion de noeuds "équivalents". C'est pour répondre à ce problème qu'on introduit la notion de noeuds isotopes et des relations de Reidemeister.

Deux noeuds sont dits équivalents si et seulement si on peut passer d'un diagramme du premier au diagramme du deuxième en un nombre fini d'isotopies et de mouvements locaux appelés mouvements de Reidemeister.



Faites l'essai chez vous avec une cordelette : le premier mouvement revient juste à autoriser une torsion de la cordelette, tandis que le deuxième et la troisième reviennent à la faire coulisser au-dessus d'elle-même (au-dessus d'un croisement pour la troisième).

Le troisième mouvement doit vous rappeler quelque chose : il s'agit du même dessin que pour la relation de Yang-Baxter que vérifient nos représentations de groupes quantiques !

Pour travailler sur les noeuds, on va regarder ce qu'il se passe plus localement. On appelle un enchevêtrement un zoom sur un noeud : on considère un cercle qui s'intersecte quatre fois avec le noeuds et on oublie momentanément le reste.

On définit alors une notion de composition (on les juxtapose l'un au-dessus de l'autre) et de produit tensoriel (on les juxtapose l'un à côté de l'autre) des enchevêtrements.

10. Pas taper.

3.2 Calcul du polynôme de Jones via $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$

L'objectif de cette section est de calculer un invariant de noeuds, appelé polynôme de Jones [11]. Il s'agit d'un invariant associé au groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, néanmoins cette méthode est généralisable à tout groupe quantique quasi-triangulaire.

Pour ce faire, nous allons considérer la représentation standarde de dimension 2 de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ que l'on note V_2. Nous rappelons que celle-ci se définit comme $\mathbb{C}_2$ muni de la base canonique (e_1, e_2), sur laquelle les générateurs X, Y et K agissent comme suit :

$$\begin{aligned} &X \cdot e_1 = 0; \quad X\dot{e}_2 = e_1; \\ &Y \cdot e_1 = e_2; \quad Y \cdot e_2 = 0; \\ &K \cdot e_1 = qe_1; \quad K \cdot e_2 = q^{-1}e_2. \end{aligned}$$

Nous utilisons comme une boîte noire le fait que la R-matrice universelle s'écrive

$$R = \exp\left(\frac{-hH \otimes H}{2}\right) \sum_{n \geqslant 0} \frac{\left((q-q^{-1})X \otimes Y\right)^n}{q^{\frac{r(r-1)}{2}}} [r]_q!.$$

On pourrait penser que la R-matrice universelle est mal définie avec cette somme infinie, mais un résultat de théorie des représentations de $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ nous assure que X et Y sont nilpotents sur n'importe quelle représentation : cette somme est donc finie si les éléments sont vus en tant qu'opérateurs.

En particulier, si l'on considère la base $(e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$, l'image de la R-matrice universelle de $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ dans $V_2 \otimes V_2$ s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} q^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{\frac{1}{2}} & q^{\frac{1}{2}}(q-q^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & q^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

4 Mot de la fin

> Si vous croyez avoir compris la théorie quantique, c'est que vous ne l'avez pas comprise.
>
> *Niels Bohr*

Je vous remercie d'avoir lu ce document jusqu'ici. Il s'agit de ma modeste tentative de conter une petite histoire des groupes quantiques, et de rendre accessible la construction du plus répandu d'entre eux au plus grand nombre. L'Histoire des groupes quantiques reste encore à écrire, avec de nombreux résultats à établir. Peut-être serez-vous le prochain ?

11. Je ne m'attarderai pas sur l'histoire de cette invariant, dont la première construction n'est pas celle que je présente dans ce pdf.

Références

[Abd14] Malka Shah Bano Abdul Rauf Nizami Mobeen Munir. “The Quantum sl2-Invariant of a Family of Knots”. In : (2014).

[VP95] Chari Vyjayanthi et Andrew Pressley. *A Guide to Quantum Groups*. Cambridge University Press, 1995.