CONSTRUCTION DE L'ALGÈBRE DE LIE D'UN GROUPE DE LIE

Antoine Médoc

Résumé. — Troisième exposé d'un groupe de travail sur la théorie de Lie.

1. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

1.1. Champs de vecteurs. —

Définition 1.1. — Dérivée directionnelle : $X(f) : x \mapsto df_x(X(x))$.

Proposition 1.2. — *Isomorphisme entre les champs de vecteurs et les dérivations de $\mathcal{C}^\infty$.*

Définition 1.3. — $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

Proposition 1.4. — *L'ensemble des champs de vecteurs est une algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre de Lie des dérivations sur $\mathcal{C}^\infty$ (donc une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathcal{C}^\infty)$.*

Définition 1.5. — Un champ de vecteurs est invariant à gauche (resp. à droite) si $(dL_g)_h(X(h)) = X(gh)$ (resp. $(dR_g)_h(X(h)) = X(hg)$).

Proposition 1.6. — *L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie.*

***Proposition 1.7* (Définition équivalente).** — *On note $(\lambda_g f)(h) = f(g^{-1}h)$ l'action à gauche de G sur $\mathcal{C}^\infty$: $\mathfrak{g} = \{D \text{ dérivation} | D\lambda_x = \lambda_x D\}$*

1.2. Espace tangent. —

Remarque 1.8. — $dm_{(e,e)}(x,y) = x + y, di_e x = -x$

Proposition 1.9. — *L'évaluation en le neutre est un isomorphisme (d'espaces vectoriels) $\mathfrak{g} \simeq T_eG$.*

Proposition 1.10. — *La dimension d'un groupe de Lie et de son algèbre de Lie sont égales.*

Proposition 1.11. — *Sur $\mathfrak{gl}_n$, le crochet de Lie est le commutateur.*

***Proposition 1.12* (Définition équivalente).** — *Avec f une carte d'un voisinage du neutre,* $f(f^{-1}(x)f^{-1}(y)) = x + y + [x, y] + o(\left|\left|x^2\right|\right| + ||y||^2)$.
Définition 1.13. —

$$c_g : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & ghg^{-1} \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Ad} : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \\ g & \longmapsto & T_e c_g \end{array} \right.$$

$$\mathrm{ad} = d_e \,\mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

***Proposition 1.14* (Définition équivalente).** — $[x, y] = \mathrm{ad}_x\, y$

1.3. Morphismes. —

Proposition 1.15. — *L'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Lie est une sous-algèbre de Lie, l'algèbre de Lie du groupe produit est l'algèbre de Lie produit.*
Proposition 1.16. — *Soit Φ un morphisme de groupes de Lie $G \to H$ et ϕ sa différentielle en e. C'est un morphisme d'algèbre de Lie Φ-équivariant :* $\phi \circ \mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(\phi(x)) \circ \phi$ $\varphi \circ \mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}(\Phi(g)) \circ \phi$.

2. Application exponentielle

2.0.1. *Définition.* —
Définition 2.1. — Une courbe intégrale de X à travers g est une fonction γ d'un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ dans M telle que $\gamma' = X \circ \gamma$ et $\gamma(0) = g$.
Remarque 2.2. — L'ensemble des groupes à un paramètre de G est en bijection avec $\mathfrak{g}$ par la dérivation en 0.
Définition 2.3. — L'exponentielle de $x \in \mathfrak{g}$ est la valeur en 1 du groupe à un paramètre dont x est la dérivée en 0.
Proposition 2.4. — *Sur* $\mathfrak{gl}(V)$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

2.0.2. *Formules, liens avec le crochet de Lie.* —
Proposition 2.5. — *Si γ est un groupe à un paramètre de dérivée x en 0,* $\gamma(t) = \exp(tx)$. *En particulier,*

$$\begin{aligned} \exp(0) &= e \\ \exp((s+t)x) &= \exp(tx)\exp(sx) \\ \exp(x)^{-1} &= \exp(-x) \\ \frac{d}{dt}(\exp(tx))|_0 &= x. \end{aligned}$$

Proposition 2.6. — *L'exponentielle est régulière et sa différentielle en e est l'identité.*

Proposition 2.7. —

$$\Phi \circ \exp = \exp \circ d\Phi$$
$$\mathrm{Ad}(e^x) = e^{\mathrm{ad}(x)}$$
$$c_g(e^x) = e^{\mathrm{Ad}(g)(x)}$$

***Proposition 2.8* (Formules de passage à la limite)**

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y + \frac{1}{2}[x,y] + o(||x||^2 + ||y||^2))$$
$$\left(\exp(\frac{1}{n}x)\exp(\frac{1}{n}y)\right)^n \to \exp(x+y)$$
$$\left(\exp(\frac{1}{n}x)\exp(\frac{1}{n}y)\exp(-\frac{1}{n}x)\exp(-\frac{1}{n}y)\right)^{n^2} \to \exp([x,y])$$

***Proposition 2.9* (Définition équivalente).** —

$$[x,y] = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}(e^{tx}e^{sy}e^{-tx})|_{s=0}\right)|_{t=0}$$

3. Étude des groupes de Lie

3.1. Composante connexe du neutre. —

Remarque 3.1. — L'algèbre de Lie de G et de G^0 sont les mêmes.

Proposition 3.2. — *L'ensemble $U := \exp(\mathfrak{g})$ est un voisinage de l'identité vérifiant $U = U^{-1}$ et $< U >= G^0$. L'exponentielle est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de e.*

3.2. Sous-groupes et sous-algèbres. —

Proposition 3.3. — *Si $H < G$ est fermé,*

$$\mathfrak{h} = \left\{x \in \mathfrak{g} | \forall t \in \mathbb{R}, e^{tx} \in H\right\}.$$

Proposition 3.4. — *Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre. Il existe un unique $H < G$ sous-groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On a $H =< \exp(\mathfrak{h}) >$.*

Proposition 3.5. — *On a l'application*

$$d : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(G,H) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \\ \Phi & \longmapsto & d\Phi \end{array} \right. .$$

Si G est connexe, elle est injective. Si G est simplement connexe, elle est bijective.

Proposition 3.6. — *L'algèbre de Lie de* $\mathrm{Ker}\,\Phi$ *est* $\mathrm{Ker}\, d\Phi$.

3.3. Idéaux. —
Proposition 3.7. — *Soient* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *et* $H < G$ *le sous-groupe connexe correspondant : H est normal dans* G^0 *si et seulement si* $\mathfrak{h}$ *est un idéal.*
Exemple 3.8. — Si G est connexe, G' est le sous-groupe connexe associé à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
Exemple 3.9. — L'algèbre de Lie de Z_G est $\{x | \forall y, [x, y] = 0\}$.

3.4. Groupe adjoint. —
Proposition 3.10. — *L'algèbre de Lie de* $\mathrm{Aut}(G)$ *est l'ensemble des dérivations de* $\mathfrak{g}$*,* $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$ *est le sous-groupe connexe associé à* $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$*, généré par* $\exp(\mathrm{ad}\,\mathfrak{g})$.
Proposition 3.11. — *Si G est connexe,* $0 \to Z_G \to G \to \mathrm{Ad}(G) \to 0$ *est exacte.*

3.5. Groupes de Lie semi-simples. —
Proposition 3.12. — *Un groupe de Lie connexe est semi-simple si et seulement s'il n'admet pas de sous-groupe normal connexe abélien non trivial.*
***Théorème 3.13* (Weyl).** — *Un groupe de Lie connexe tel que* $B_{\mathfrak{g}}$ *est définie négative est compact semi-simple.*

---

14 octobre 2024

ANTOINE MÉDOC, IMAG, Université de Montpellier
E-mail : antoine.medoc@umontpellier.fr