Séminaire 1236 : Algèbres de Lie et exemples de représentations

Jérôme Milot

Introduction

Ce document est réalisé dans le cadre du très sérieux **Séminaire 1236** du Laboratoire Paul Painlevé de l'Université de Lille.

L'objectif du séminaire est simple : les bureaux 12 et 236 (dit "quantique") se réunissent à peu près régulièrement, à l'occasion d'un exposé sur le thème du choix de l'orateur.

Ayant pour ma part un amour profond pour la théorie des algèbres de Lie, j'ai décidé de tenter de faire un exposé accessible autour de celles-ci.

La première section est vouée à définir les notions de bases et fournir quelques exemples afin de se familiariser avec les notions d'algèbres de Lie, de morphismes d'algèbres de Lie et d'idéaux.

La deuxième section traitera des différentes familles d'algèbres de Lie : les nilpotentes, les résolubles, les simples et les semi-simples. Les liens entre chacune de ces familles seront explicités de manière succinte.

Enfin, la dernière section donnera de premiers éléments d'études des représentations, dans le cadre des algèbres de Lie résolubles et des algèbres de Lie nilpotentes, notamment via la forme de Killing et l'élément de Casimir.

Bonne lecture !

Résumé

La théorie des algèbres de Lie est un vaste domaine étudié depuis la deuxième moitié du XIX^e siècle. En particulier, sa théorie des représentation a trouvé de nombreuses applications, comme en physique pour l'étude des niveaux d'énergies d'une particule, et sa généralisation quantique est encore un domaine actif de recherche (si le temps et la motivation le permettent, nous irons un jour explorer les tréfonds de ce milieu dans des exposés ultérieurs).

L'objectif du présent exposé est d'offrir une première introduction aux algèbres de Lie, avec la définition des algèbres de Lie résolubles d'une part, et des algèbres de Lie semi-simple d'autre part. On s'intéressera alors aux premiers résultats de théorie des représentations des ces algèbres de Lie, en s'attardant sur l'étude ad hoc de la mythique $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

1 Algèbres de Lie : notions de base

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1. *Une **algèbre de Lie** est un espace vectoriel L muni d'une application bilinéaire $[\ ,\ ] : L \times L \to L$, appelée **crochet de Lie**, telle que :*

$$\forall x \in L : \quad [x, x] = 0; \tag{1}$$

$$\forall x, y, z \in L : \quad [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0. \tag{2}$$

Remarque Le premier point est équivalent à l'antisymétrie du crochet.

La deuxième relation est appelée **relation de Jacobi**. Elle peut s'interpréter comme une dérivation.

Une manière d'intuiter le crochet de Lie est de l'imaginer dans un premier temps comme un commutateur.

Définition 1.1.2. *Une **sous-algèbre de Lie** d'une algèbre de Lie L est un sous-espace vectoriel L' de L dont le crochet est obtenu par restriction du crochet de L.*

Exemple 1.

- *Toute algèbre est une algèbre de Lie (on la munit de son commutateur).*
- *L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ (associée au groupe de Lie[1] $GL_N(\mathbb{C})$ des matrices inversibles de taille N) est l'espace vectoriel des matrices carrées de taille N muni du commutateur.*
- *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$ (associée au groupe de Lie $SL_N(\mathbb{C})$ des matrices de déterminant 1) est l'espace vectoriel des matrices de traces nulles muni du commutateur. En revanche, ce n'est pas une algèbre.*
- *$\mathbb{R}^3$ munie du produit vectoriel est une algèbre de Lie.*

1. Nous ne parlerons pas du lien entre algèbres et groupes de Lie dans ce pdf

- *L'espace vectoriel $H = Vect(f, g, c)$ muni du crochet défini par*

$$[p, q] = c; \ [c, p] = [c, q] = 0$$

est l'algèbre de Lie de Heisenberg[2].

- *Un espace vectoriel E de dimension infinie muni du crochet nul est une algèbre de Lie*[3].

Définition 1.1.3. *Une algèbre de Lie munie d'un crochet nul est dite **abélienne**.*

Donnons deux exemples plus précisément, en exhibant la base des algèbres de Lie.

Exemple 2.

- *La $\mathbb{C}$-algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \ Tr(M) = 0\}$ admet pour base*

$$x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

avec pour relations crochet

$$[h, x] = 2x; \quad [h, y] = -2y; \quad [x, y] = h.$$

- *La $\mathbb{R}$-algèbre de Lie $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) := \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : \ M^* + M = 0 \ \text{et}\ Tr(M) = 0\}$ admet pour base*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad B := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec pour relations crochet

$$[A, B] = 2C; \quad [B, C] = 2A; \quad [A, C] = -2B.$$

Remarque Attention, $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie mais pas une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie. Par exemple, iA n'est pas dans $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$.

Définition 1.1.4 (Morphisme d'algèbres de Lie)**.** *Soient L et L' deux algèbres de Lie. Un **morphisme d'algèbres de Lie** entre L et L' est une application linéaire $\varphi : L \to L'$ cohérente avec les crochets, c'est-à-dire telle que pour tous $x, y \in L$:*

$$\varphi([x, y]_L) = [\varphi(x), \varphi(y)]_{L'}.$$

*De plus, si φ est bijective, on dit que c'est un **isomorphisme d'algèbres de Lie**.*

2. Cet exemple provient de la mécanique hamiltonienne. L'opérateur p correspond au *moment* et l'opérateur q correspond à la *vitesse* d'une particule
3. J'espère avoir l'occasion de parler d'algèbres de Kac-Moody (qui sont des exemples un peu plus intéressants d'algèbre de Lie de dimension infinie) dans un exposé ultérieur ...

Remarque On peut donc travailler sur les algèbres de Lie à isomorphismes d'algèbres de Lie près, puisque les caractéristiques d'une algèbre de Lie (une base et l'effet du crochet sur celle-ci) sont préservées par isomorphisme d'algèbres de Lie.

De fait, lorsque je parlerai d'unicité d'une algèbre de Lie, ce sera à isomorphisme près.

Exemple 3.
- *Nous allons montrer que* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ *est le* ***complexifié*** *de* $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$.

  Déjà, il est clair que $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

  D'autre part, l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \to & \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \\ & & x \otimes 1 & \mapsto & x \\ & & x \otimes i & \mapsto & ix \end{array}$$

  est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

  Il est clair qu'une base est envoyée sur une base, il suffit donc de vérifier que les relations crochet sont préservées, en définissant le crochet sur $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ *par*

$$\forall x \otimes z, x' \otimes z' \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} : \quad [x \otimes z, x' \otimes z'] = [x, x'] \otimes zz'.$$

Remarque Notons le fait que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ sont deux algèbres de Lie réelles avec le même complexifié $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, mais elles ne sont pas isomorphes en tant qu'algèbres de Lie.

À partir de maintenant, L désignera toujours une algèbre de Lie complexe de dimension finie.

Prenons le temps de classifier les algèbres de Lie en basse dimension.

Exemple 4.

Il n'existe qu'une seule algèbre de Lie de dimension 1*. Son crochet est le crochet nul.*

Il n'existe qu'une seule algèbre de Lie non abélienne de dimension 2*.*

En effet, soit $E = Vect(x, y)$*. Puisque l'algèbre de Lie est non abélienne,* $[x, y]$ *est non nul.*

On peut donc le compléter en un base de E *avec un vecteur* z*. Par commodité, renotons ces éléments respectivement* x *et* y*. Mais alors*

$$[x, y] = ax$$

avec $a \in \mathbb{C}$ *non nul. En particulier, si on remplace* y *par* $a^{-1}y$*, alors* $E = Vect(x, y)$ *avec* $[x, y] = x$*. En particulier, toute algèbre de Lie non abélienne de dimension* 2 *vérifie ça : il ne peut donc y en avoir qu'une seule.*

Il ne reste qu'à vérifier qu'un espace vectoriel satisfaisant ces relations crochet est bien une algèbre de Lie, ce qui est le cas.

1.2 Idéaux d'une algèbre de Lie

Définition 1.2.1. *Soit I un sous-espace vectoriel de L. On dit que I est un* ***idéal*** *de L si :*

$$\forall x \in I, y \in L : \quad [x, y] \in I.$$

Cette propriété est dite ***d'absorption***[4].

Remarque

- Un idéal d'une algèbre de Lie est en particulier une sous-algèbre de Lie (la stabilité par crochets entre éléments de I est assurée par la propriété d'absorption).
- La somme de deux idéaux est un idéal, le quotient de l'algèbre de Lie par un idéal est un idéal.

Exemple 5.
- *L'espace vectoriel nul et l'algèbre de Lie L sont des idéaux de L.*
- *Le noyau d'un morphisme d'algèbres de Lie est un idéal de l'espace de départ du morphisme.*
- *On définit le* **centre** *de L par :*

  $$Z(L) := \{x \in L : \quad [x, y] = 0 \ \ \forall y \in L\}.$$

  Le centre est un idéal de L.
- *On définit l'****algèbre dérivée*** *de L par :*

  $$D(L) := \{[x, y] \mid \ \ x, y \in L\}.$$

  L'algèbre dérivée est un idéal de L.
- *$\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$ est un idéal de $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$. En effet : la trace d'un commutateur est toujours nulle, donc en particulier, la trace du crochet entre une matrice de trace nulle et une autre matrice est nulle. En fait, on peut même prouver que $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$ est l'algèbre dérivée de $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$.*

L'idée qui gouvernera la section suivante est qu'il est naturel d'analyser la structure des algèbres de Lie par le biais de leurs idéaux.

Définition 1.2.2. *On dit qu'une algèbre de Lie L est* ***simple*** *si elle n'est pas abélienne et que ses seuls idéaux non triviaux sont $\{0\}$ et L.*

Remarque

- La condition "non abélienne" est introduite pour éviter toute mauvaise blague avec le cas particulier de l'algèbre de Lie unidimensionnelle.

4. En réalité, je ne trouve ce nom nulle part dans la nature, mais le parallèle avec un idéal d'un anneau me paraît trop naturel pour ne pas l'employer.

- Une algèbre de Lie avec un centre non trivial ne peut être simple.

Exemple 6.
- *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ *n'est pas simple.*

- *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ *est simple. On consate que chaque vecteur de la base peut s'obtenir comme crochet à partir d'au moins un des autres. Or, en appliquant le crochet de n'importe quel élément de* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ *à* x *deux fois, on obtient* $y \in I$*, et donc* $x \in I$ *et* $h \in I$*. De fait, le seul idéal non-nul de* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ *est l'algèbre entière.*

- *L'algèbre de Heisenberg n'est pas simple.*

On va s'intéresser aux cas de deux familles d'algèbres de Lie caractérisées par des idéaux particulier.

2 Algèbres résolubles et semi-simples

2.1 Algèbres de Lie résolubles

On s'inspire de la définition de groupe résoluble.

Définition 2.1.1. *On définit les* ***séries dérivées*** *de* L *par récurrence :*

$$L^{[1]} := L;$$
$$L^{[n]} := D\left(L^{[n-1]}\right).$$

Définition 2.1.2. *Une algèbre de Lie* L *telle qu'il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *de sorte que* $L^{[n]}$ *est dite* ***résoluble****.*

Un idéal de L *est dit résoluble s'il est résoluble en tant qu'algèbre de Lie.*

Remarque Je ne parlerai pas d'algèbre de Lie nilpotente dans cet exposé, par souci de concision. Il s'agit d'une sous-familles d'algèbres de résolubles, définies de manière similaire avec des séries centrales descendantes. On peut se référer à [Hum80], par exemple, pour plus d'informations.

Exemple 7.
- *Une algèbre de Lie abélienne est résoluble.*

- *L'espace vectoriel* $\mathbb{C}\,x \oplus \mathbb{C}\,y$ *muni du crochet* $[x, y] = x$ *est une algèbre de Lie résoluble.*

Proposition 2.1.3. *La somme de deux idéaux résolubles est un idéal résoluble.*

Définition 2.1.4. *Le* ***radical*** *d'une algèbre de Lie* L *est l'idéal résoluble maximal de* L*.*

Plus explicitement, il s'agit de la somme de tous les idéaux résolubles.

Exemple 8.
- *Pour une algèbre de Lie résoluble,* $rad(L) = L$*. C'est même une caractérisation du fait d'être résoluble.*

- *Pour une algèbre de Lie simple, rad$(L) = 0$. Toutefois, une algèbre de Lie avec un radical nul peut ne pas être simple. Par exemple, l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (avec le crochet défini terme à terme) n'est pas simple (ses seuls idéaux non triviaux sont deux copies de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ qui ne sont pas résolubles).*

Nous allons donc nous intéresser aux algèbres de Lie de radical nul : les algèbres de Lie semi-simple.

2.2 Algèbres de Lie semi-simples

Définition 2.2.1. *Une algèbre de Lie L est dite **semi-simple** si rad$(L) = 0$.*

Exemple 9.

- *Une algèbre de Lie simple est semi-simple.*
- *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est semi-simple.*

Proposition 2.2.2. *Une algèbre de Lie L est semi-simple si et seulement si son seul idéal résoluble est 0.*

Remarque Je profite de cette proposition pour mentionner le fait qu'il existe en réalité plusieurs définitions équivalentes de la semi-simplicité et de la résolubilité des algèbres de Lie [5].

Démonstration. $\Rightarrow$ Supposons que L est semi-simple. Soit I un idéal résoluble de L.

Par maximalité du radical, si $I \neq L$, on a $I \subset \mathrm{rad}(L) = 0$. Donc les seuls idéaux résolubles de L son triviaux.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si L n'admet que des idéaux résolubles triviaux, alors $\mathrm{rad}(L) = 0$ et donc L est semi-simple. $\square$

Remarque Mais pourquoi nous embêtons-nous avec ces histoires d'algèbres de Lie résolubles et semi-simples ? À quel point recouvre-t-on les algèbres de Lie en général ?

En fait, la **décomposition de Levi** affirme que toute algèbre de Lie peut se décomposer en le produit semi-direct (notion analogue à celle de théorie des groupes) d'une sous-algèbre de Lie semi-simple et d'un idéal résoluble. En particulier, l'idéal résoluble est le radical de l'algèbre de Lie.

Dans le cas particulier où l'algèbre de Lie est **réductive** (son radical est égal à son centre), alors l'idéal résoluble est son centre et l'algèbre de Lie semi-simple est son algèbre dérivée.

5. Les pages wikipédia respectives de ces notions les répertorient, par exemple

3 Représentations des algèbres de Lie

3.1 Définition et représentation adjointe

Définition 3.1.1. *Une **représentation** d'une algèbre de Lie L est la donnée d'un espace vectoriel V et d'un morphisme d'algèbres de Lie $\rho : L \to End(V)$.*

*De plus, on définit la **dimension** d'une représentation comme la dimension de l'espace vectoriel associé.*

Remarque Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la représentation, on assimilera une représentation à l'espace vectoriel associé.

De plus, dans ce cas, au lieu de noter $\rho(x)(v)$ l'évaluation en un élément $v \in V$ de l'endomorphisme $\rho(x)$, on écrira $x \cdot v$.

Exemple 10.

- *N'importe quel espace vectoriel peut être muni d'une structure de représentation avec le morphisme nul.*
- *Soit L une algèbre de Lie. Alors L peut être muni d'une structe de représentation de L, via la **représentation adjointe** :*

$$\begin{array}{rcccc} ad & : & L & \to & End(L) \\ & & x & \mapsto & ad_x : y \mapsto [x,y] \end{array}.$$

Exemple 11. *Nous allons donner des représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ de dimensions* 1, 2 *et* 3.

- *Soit $V = Vect(v)$ une représentation de dimension 1 de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Alors V est la **représentation triviale** (tout élément de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est envoyé sur l'endomorphisme nul).*

  En effet, notons λ_x (resp. λ_y, λ_h) la valeur propre de x (resp. y, h). Alors, par exemple :

  $$\lambda_h v = h \cdot v = [x,y] \cdot v = \lambda_x \lambda_y v - \lambda_y \lambda_x v = 0$$

  donc $\lambda_h = 0$. De même :

  $$2\lambda_x v = [h,x] \cdot v = \lambda_h \lambda_x v - \lambda_x \lambda_h v = 0$$

  et donc $\lambda_x = 0$. De la même manière, $\lambda_y = 0$, et donc la représentation est triviale.

- *Soit $\mathbb{C}^2$. Alors $\mathbb{C}^2$ peut être muni d'une structure de représentation (on identifie $End(\mathbb{C}^2)$ à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) :*

  $$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ & & a & \mapsto & aM \end{array}$$

  *(l'action est donc définie par le produit matriciel). Cette représentation est appelée **représentation naturelle**.*

- *La représentation adjointe fournit un exemple de représentation de dimension* 3 *de* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Remarque Nous verrons à la fin de ce document que ces représentations sont en fait les seuls à isomorphisme de Lie près.
Remarque Pourquoi nous intéressons-nous au représentations d'algèbre de Lie ? Parce qu'il est plus commode de travailler avec des algèbres de Lie matricielles, c'est-à-dire de la forme $\mathrm{End}(V)$ pour un espace vectoriel V. Si le morphisme d'une représentation est injectif, on peut identifier l'algèbre de Lie à une algèbre de Lie matricielle. Le théorème d'Ado assure par exemple qu'on peut toujours identifier une algèbre de Lie de dimension finie à une algèbre de Lie matricielle.

3.2 La forme de Killing

Nous allons définir une forme bilinéaire sur l'algèbre de Lie L qui nous permettra de caractériser les différentes algèbres de Lie.

Définition 3.2.1 (Forme de Killing)**.** *On définit la* ***forme de Killing*** *comme la forme bilinéaire symétrique*

$$\begin{array}{cccc} K & : & L \times L & \to & \mathbb{C} \\ & & (x,y) & \mapsto & Tr\,(ad_x \circ ad_y) \end{array}.$$

Remarque

- La symétrie provient de la propriété $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
- Invariance

Exemple 12. *Calculons explicitement la forme de Killing de* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. *On écrit les différents adjoints de la base* (x, y, h) *dans cette même base.*

$$ad_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ad_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ad_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$K(x,y) = 4; \quad K(y,h) = 4; \quad K(h,h) = 8$$

et tous les autres valent 0.

Définition 3.2.2. *Une forme bilinéaire* φ *sur* L *est dite* ***non-dégénérée*** *si*

$$\{x \in L| \quad \forall y \in L : \ \varphi(x,y) = 0\} = 0.$$

Cet ensemble est appelé ***radical*** *de* φ *et on le note* $Rad(\varphi)$.

Exemple 13. *Pour* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, *on peut décrire* K *sous forme matricielle dans la base* (x, y, h) *:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de déterminant $-128 \neq 0$: la forme de Killing de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est non-dégénérée.

Lemme 3.2.3. *Le radical d'une algèbre de Lie L est un idéal de L.*

Démonstration. Cela provient de la propriété d'invariance de la forme de Killing. □

Le radical de la forme de Killing d'une algèbre de Lie n'est pas sans lien avec le radical de celle-ci.

Théorème 3.2.4 (Critère de Cartan)**.** *Une algèbre de Lie L est résoluble si et seulement si sa forme de Killing K vérifie $D(L) \subset Rad(K)$.*

Démonstration. $\Rightarrow$ D'après le théorème de Lie, on sait que la représentation adjointe est trigonalisable. En particulier, pour tout $x \in D(L)$, ad_x peut être écrite sous forme de matrice triangulaire supérieure stricte. En particulier, pour tout $y \in L$, $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y$ est triangulaire supérieure stricte, donc de trace nulle. D'où $x \in \mathrm{Rad}(K)$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons $K\left(D(L)\right) = 0$. On note $H := \mathrm{ad}_{|D(L)}(D(L))$. Le noyau de $\mathrm{ad}_{|[D(L)]}$ est l'intersection du noyau de ad (qui est exactement $Z(L)$) et de $D(L)$. Ainsi, on a

$$H \simeq \mathrm{ad}([L,L]) / \left(Z(L) \cap D(L)\right)$$

□

Théorème 3.2.5. *Une algèbre de Lie L est semi-simple si et seulement si sa forme de Killing est non-dégénérée.*

Démonstration. $\Rightarrow$ Supposons que L est semi-simple, c'est-à-dire que $\mathrm{rad}(L) = 0$. Soit S le radical de K.

Par définition, pour tous $x \in S$ et $y \in L$, on a $K(x,y) = 0$. C'est donc vrai en particulier pour $x \in [S,S]$. Par critère de Cartan, cela signifie donc que S est résoluble. Or S est aussi un idéal de L. Par définition de $\mathrm{rad}(L)$, on a nécessairement $S = 0$: la forme de Killing est non-dégénérée.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons $\mathrm{Rad}(K) = 0$. On souhaite montrer que L est semi-simple, on peut donc par exemple prouver que tout idéal abélien I de L est inclus dans $\mathrm{Rad}(K)$.

En effet, soit $x \in I$. Alors, pour tout $y \in L$, on a $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y : L \to L \to I$ (par propriété d'absorption de I). Ainsi, $\left(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y\right)^2 : L \to D(I)$. Or I est abélien, donc $D(I) = 0$. Ainsi, $(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$ nilpotente, et donc sa trace est nulle. Autrement dit, $K(x,y) = 0$. C'est vrai pour tout $y \in L$, donc $x \in \mathrm{Rad}(K) = 0$, d'où I idéal nul. □

Nous sommes maintenant armés pour justifier la terminologie "semi-simple" des algèbres de Lie.

Théorème 3.2.6. *Soit L une algèbre de Lie semi-simple. Alors il existe des idéaux simples $L_1, \dots, L_t$ de L tels que*

$$L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_t.$$

Démonstration. Soit I un idéal de L. On considère $I^\perp := \{x \in L| \quad K(x,y) = 0 \; \forall y \in I\}$. Cet ensemble est également un idéal de L, par invariance de K.

On considère l'idéal $I \cap I^\perp$ de L. La restriction de la forme de Killing à cet idéal est, par définition, nulle. Par critère de Cartan, cela signifie que $I \cap I^\perp$ est un idéal résoluble de L. Par semi-simplicité, $I \cap I^\perp = 0$. Par ailleurs, on peut prouver que $\dim I + \dim I^\perp = \dim L$, et donc $L = I \oplus I^\perp$.

On peut maintenant procéder par récurrence sur la dimension de L. Si L n'a pas d'idéal propre non nul, alors L est simple. Sinon, soit L_1 un idéal non nul de L minimal. D'après ce qui précède, on peut décomposer $L = L_1 \oplus L_1^\perp$.En particulier, un idéal de L_1 est également un idéal de L. Ainsi, L_1 est semi-simple, et même simple par minimalité. De la même manière, $L_1^\perp$ est également semi-simple. Par hypothèse de récurrence, on peut donc le décomposer en somme directe d'idéaux simples de $L_1^\perp$, qui sont aussi des idéaux simples de L. □

Corollaire 3.2.6.1. *Tout idéal d'une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple.*

Démonstration. Soit I un idéal d'une algèbre de Lie semi-simple L. D'après ce qui précède, il existe $I_1, \dots, I_k$ des idéaux simples de L tels que

$$L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_k.$$

On considère les $I \cap I_j$ non-nuls : chacun d'eux est un idéal non-nul de I_j, qui est simple. Donc $I \cap I_j = I_j$, d'où $I_j \subset I$: I est semi-simple. □

Remarque L'intérêt de la forme de la Killing ne se limite pas à caractériser les différentes algèbres de Lie. Par exemple, on peut exhiber un générateur du centre de l'algèbre universelle enveloppante de l'algèbre de Lie en regardant l'image réciproque de l'identité, appelé **élément de Casimir**.

3.3 Représentations des algèbres de Lie résolubles

Cette sous-section est inspirée de [Car05]. Soit L une algèbre de Lie résoluble.

On commence par caractériser les représentations de dimension 1 (donc les morphismes d'algèbres de Lie de L dans $\mathbb{C}$).

Lemme 3.3.1. *Une forme linéaire $\rho : L \to \mathbb{C}$ est une représentation de L si et seulement si $\rho_{|L^{[2]}} = 0$.*

Démonstration. $\Rightarrow$ Supposons que ρ est une représentation. Alors, pour $x, y \in L$, on a :

$$\rho\left([x,y]\right) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) = 0$$

puisque $\mathbb{C}$ est commutatif. Ainsi, ρ est nulle sur $L^{[2]}$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si ρ est nulle sur $L^{[2]}$, alors

$$\rho([x,y]) = 0 = [\rho(x), \rho(y)]$$

d'où le résultat. $\square$

Nous allons maintenant prouver que les représentations de dimension 1 sont les seules représentations irréductibles de dimension finie des algèbres de Lie résoluble.

Théorème 3.3.2 (Théorème de Lie)**.** *Toute représentation V irréductible de dimension finie d'une algèbre de Lie résoluble L est de dimension* 1*.*

Remarque Le théorème de Lie assure donc que toute représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie résoluble admet un vecteur propre commun aux éléments de l'algèbre de Lie.

Démonstration. Puisque L est résoluble, on sait que $L^{[2]} \neq L$. On a également vu qu'on peut alors choisir un idéal I de L tel que $L^{[2]} \subset I$ et $\dim I = \dim L - 1$. On rappelle que I est également une sous-algèbre de Lie de L, et qu'elle est également résoluble.

Nous démontrons le théorème par récurrence sur la dimension de L que l'on note n.

$n = 1$: on peut écrire $L = \mathbb{C}\,x$ pour $x \in L$. Soit v un vecteur propre de $\rho(x) \in \mathrm{End}(V)$, de valeur propre λ_v. Alors, $\mathbb{C}\,v$ est un sous-L-module non nul de V. En effet, pour $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\rho(ax)(bv) = a\lambda_v bv \in \mathbb{C}\,v.$$

Par irréductibilité de V, on a alors nécessairement $V = \mathbb{C}\,v$.

$n \in \mathbb{N}$: on suppose le résultat acquis au rang n. On considère V en tant que I-module. En particulier, V contient un sous-I-module W irréductible.

Par hypothèse de récurrence, on sait alors que W est de dimension 1. Soit $w \in W$ non nul. Alors, pour tout $y \in I$:

$$\rho(y)(w) = \lambda(y)w$$

avec λ le morphisme d'algèbre de Lie associé à la représentation W. On pose alors :

$$U := \{u \in V : \quad \rho(y)(u) = \lambda(y)u \;\; \forall y \in I\}.$$

On constate donc que $0 \neq W \subset U \subset V$. Nous allons montrer que U est un sous-L-module de V. Soit $u \in U, x \in L$. On a :

$$\rho(y)(\rho(x)(u)) = \rho(x)(\rho(y)(u)) + \rho([x,y])(u) = \lambda(y)\rho(x)(u) + \lambda([x,y])u$$

puisque $[x,y] \in I$.

L'objectif est alors de montrer que $\lambda([x,y]) = 0$. En effet, si c'est bien le cas, on a alors $\rho(x)(u) \in U$, et donc U est un sous-L-module de V qui est irréductible. Ainsi, $V = U$. En particulier, on a donc pour tout $v \in V$ et $y \in I$:

$$\rho(y)(v) = \lambda(y)v.$$

De plus, on peut décomposer $L = I \oplus \mathbb{C}\,x$ avec $x \notin I$ (car on a choisi I tel que $\dim I = \dim L - 1$). Soit v un vecteur propre de $\rho(x)$. Alors, d'après ce qu'on a vu, $\mathbb{C}\,v$ est un sous-L-module de V. V étant irréductible, on a donc $\dim V = 1$.

Il ne reste donc qu'à justifier proprement la nullité de $\lambda([x,y])$. $\square$

Remarque Attention, le résultat ne tient pas si le corps de base n'est pas de caractéristique nulle.

Par exemple, si le corps est de caractéristique $p > 0$, on peut considérer

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \operatorname{diag}(0, 1, \dots, p-1).$$

On peut alors vérifier que $[x,y] = x$, donc, d'après ce qu'on a déjà vu, l'algèbre de Lie engendrée par x et y est l'algèbre de Lie non abélienne de dimension 2, résoluble. Or, on peut vérifier que x et y n'admette aucun vecteur propre commun pour la représentation adjointe.

3.4 Représentations des algèbres de Lie semi-simples

3.4.1 Le théorème de Weyl

Nous commençons par constater la cohérence des notions de semi-simplicité des algèbres de Lie d'une part et des représentations d'autre part. Nous allons donc démontrer le résultat suivant.

Théorème 3.4.1 (Théorème de Weyl)**.** *Soit L une algèbre de Lie semi-simple et V une représentation de dimension finie de L. Alors V est complètement réductible : il existe $V_1, \dots, V_t$ des sous-représentations irréductibles de V telles que*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t.$$

Démonstration. Par souci de concision, la démonstration ne sera pas explicitée (notamment parce que celles que j'ai vues utilisent l'élément de Casimir dont je ne souhaite pas parler dans cet exposé. Les curieux peuvent se reférer à [Hum80]). $\square$

Remarque Le résultat n'est vrai que pour les représentations de dimension finie. Nous verrons un contre-exemple dans le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

3.4.2 Le cas $\mathfrak{sl}_2$

Nous allons maintenant étudier à la main les représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Ceci concluera le présent document et donnera les premières intuitions à ceux qui souhaiteront découvrir par eux-mêmes la théorie de plus haut poids des représentations des algèbres de Lie semi-simple.

On rappelle les générateurs de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$:

$$x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et les relations :

$$[x, y] = h, \; [h, x] = 2x, \; [h, y] = -2y.$$

En particulier, h agit diagonalement sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Soit V une représentation de L. On peut alors montrer que h agit également diagonalement sur V (il est ici important que l'on soit sur $\mathbb{C}$, plus précisément que l'on travaille sur un corps algébriquement clos). On peut alors décomposer V en sous-espaces propres :

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda$$

où $V_\lambda := \{v \in V | \quad h \cdot v = \lambda v\}$. Si λ n'est pas une valeur propre de h, alors $V_\lambda = \{0\}$. Si λ est bien une valeur propre de h, alors λ est appelé **poids** de h dans V et V_λ est appelé **espace de poids** de poids λ de V.

Les espaces de poids vont nous permettre de décrire l'ensemble des représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Nous allons vite constater qu'il y a des conditions sur les poids possibles.

Lemme 3.4.2. *Soit $v \in V_\lambda$. Alors $x \cdot v \in V_{\lambda+2}$ et $y \cdot v \in V_{\lambda-2}$.*

Démonstration. On utilise la définition du crochet dans $\mathrm{End}(V)$:

$$h \cdot x \cdot v = [h, x] \cdot v + x \cdot h \cdot v = 2x \cdot v + \lambda x \cdot v$$

d'où $x \in V_{\lambda+2}$. Le calcul est le même pour y. □

Remarque Puisque l'on regarde des représentations de dimension finie, le résultat précédent permet de voir facilement que les opérateurs x et y sont nilpotents.

Définition 3.4.3. *Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in V_\lambda$ non nul tel $x \cdot v = 0$. On dit que v est un **vecteur maximal**[6].*

Exemple 14. *Pour la représentation adjointe, il est clair que x est un vecteur maximal, de poids 2.*

6. D'après la terminologie de [Hum80]. On peut retrouver la terminologie de vecteur "primitif".

Puisque $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie semi-simple (car simple), le théorème de Weyl nous assure que toute représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est complètement réductible : il suffit donc d'étudier ses représentations irréductibles. Procédons à la classification de celles-ci.

Soit $v_0 \in V_\lambda$ un vecteur maximal. On pose alors

$$v_{-1} := 0; \quad v_i := \frac{1}{i!} y^i \cdot v_0.$$

Lemme 3.4.4. *On peut décrire les actions des générateurs de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur chacun de ces vecteurs :*

1. $h \cdot v_i = (\lambda - 2i) v_i$;
2. $x \cdot v_i = (\lambda - i + 1) v_{i-1}$;
3. $y \cdot v_i = (i+1) v_{i+1}$.

Remarque À ce stade, l'action des opérateurs peut rappeler aux plus physiciens d'entre vous les **opérateurs d'échelles**. L'opérateur de création correspond à x et l'opérateur d'annihilation correspond à y. On commence à voir poindre le lien avec l'étude des états d'énergie des particules.

Démonstration. 1. On utilise le lemme 3.4.2 plusieurs fois. On peut faire une récurrence rapide :

$$\begin{aligned} h \cdot v_i &= \frac{1}{i!} h \cdot y^i \cdot v_0 \\ &= \frac{1}{i} y \cdot h \cdot \frac{1}{(i-1)!} y^{i-1} \cdot v_0 + \frac{1}{i!} [h, y] \, y^{i-1} \cdot v_0 \\ &= \frac{1}{i} y \cdot h \cdot v_{i-1} - \frac{1}{i!} 2 y^i \cdot v_0 \\ &= \frac{1}{i} (\lambda - 2(i-1)) y \cdot v_{i-1} - 2 v_i \\ &= (\lambda - 2i) v_i. \end{aligned}$$

2. Ce point découle de la définition des vecteurs v_i.
3. On procède une nouvelle fois par récurrence.

$\square$

La première formule assure le fait que les v_i non nuls sont des vecteurs linéairement indépendants de V. Or V est de dimension finie : on peut donc définir $m \in \mathbb{N}$ le plus petit entier pour lequel $v_m \neq 0$ et $v_{m+1} = 0$.

On note alors $V' := \operatorname{Vect}(v_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$. Grâce au lemme, on sait qu'il s'agit d'une sous-représentation de V, non nulle. Par irréductibilité de V, on a ainsi nécessairement :

$$V = \operatorname{Vect}(v_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}.$$

Regardons en particulier l'effet de x sur v_{m+1}. La formule 3. du lemme donne :

$$x \cdot v_{m+1} = (\lambda - m)v_m.$$

Puisque $v_{m+1} = 0$ et $v_m \neq 0$ par définition, on a nécessairement $\lambda = m$. En fait, le poids d'un vecteur maximal est nécessairement un entier naturel non nul (égal à la dimension de V -1). On l'appelle alors **plus haut poids** de V. De plus, le lemme assure également que chaque espace de poids est de dimension 1. Par ailleurs, puisqu'il ne peut y avoir qu'un seul vecteur de plus haut poids ($\lambda = \dim V - 1$), il ne peut y avoir qu'un seul vecteur maximal, à scalaire près.

On obtient alors la caractérisation :

Théorème 3.4.5. *Soit V une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.*

1. *Soit $m := \dim V - 1$. Alors*

$$V = \bigoplus_{\mu} V_\mu$$

pour $\mu = -m, -(m-2), \ldots, m-2, m$. En particulier, chaque V_μ est de dimension 1.

2. *V admet un unique (à scalaire près) vecteur maximal, et celui-ci est de poids m.*

3. *L'action de L sur V est donnée explicitement comme précédemment. Ceci implique en particulier qu'il existe au plus une représentation irréductible de L de dimension $m+1$ pour $m \in \mathbb{N}$.*

Reste une dernière question naturelle : existe-t-il une représentation irréductible de dimension $m+1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$? Il suffit pour cela de vérifier que les équations du lemme 3.4.2 suffisent pour définir une structure de représentation irréductible.

Démonstration. Écrivons les matrices associées aux opérateurs x, y, h en tant qu'endomorphismes de V (dans la base $(v_0, \ldots, v_m)$).

$$H = \mathrm{diag}\,(m, m-2, \ldots, -(m-2), -m)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & m & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors vérifier que ces matrices vérifient les mêmes relations que les générateurs x, y, h de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, assurant que V est bien une représentation de

L. Pour son caractère irréductible, on constate que l'action des générateurs à partir d'une combinaison linéaire de vecteurs de la base permet de récupérer tous les autres (par exemple en appliquant x autant de fois que nécessaire pour récupérer v_m, puis en appliquant y m fois pour récupérer tous les autres), donc la représentation n'admet pas de sous-représentation non triviale et est bien irréductible. $\square$

Corollaire 3.4.5.1. *Les représentations irréductibles de dimension finie de* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ *sont paramétrées par les entiers naturels.*

Remarque

- La théorie de poids s'étend à n'importe quelle algèbre de Lie semi-simple. L'action de $h \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est remplacée par l'action d'une sous-algèbre de Lie abélienne maximale de L, apppelée **algèbre de Cartan**. Il n'y a pas unicité des algèbres de Cartan, mais elles sont toutes de même dimension et conjuguées entre elles.

- On pourrait imaginer une notion de plus bas poids (pour laquelle c'est y qui annule le vecteur maximal, au lieu de x). Dans le cas des représentations de dimension finie, c'est la même chose (par exemple pour $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, on voit bien que v_m est un vecteur de plus bas poids). Néanmoins, en dimension infinie, ces deux notions ne coïncident pas nécessairement, et les deux caractérisent des familles de représentations irréductibles différentes.

Bibliographie

Références

[Car05] Roger Carter. *Lie Algebras of Finite and Affine Type*. T. 96. Cambridge University Press, 2005.

[Hum80] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. T. 9. Springer-Verlag, 1980.