Morphismes de $(\mathcal{S}^1, \times)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 2*, 2e édition, Cassini. Exercice 4.29 page 251.

Recasage : 102, 155, 156.

Proposition 1

Pour tout morphisme de groupes continu $\varphi : (\mathcal{S}^1, \times) \to (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), r \in \mathbb{N}, k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}^*$ tels que

$$\varphi : e^{it} \longmapsto Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{tk_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

où, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$\triangleright$ Analyse : Soit $\varphi : \mathcal{S}^1 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu.

– *Étape 1 : Montrons que $\varphi(\mathcal{S}^1) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.* Notons $\psi : \det \circ \varphi$. Comme ψ est continu et $\mathcal{S}^1$ est connexe, $\psi(\mathcal{S}^1)$ est un intervalle de $\mathbb{R}^*$. Comme $\psi(1) = 1$, on a donc $\psi(\mathcal{S}^1) \subset \mathbb{R}_+^*$. De plus, comme $\mathcal{S}^1$ est compact, $\psi(\mathcal{S}^1)$ est un segment. En particulier, $\psi(\mathcal{S}^1)$ est borné. Comme $\psi(\mathcal{S}^1)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$, on en déduit que $\psi(\mathcal{S}^1) = \{1\}$. Ainsi, $\forall z \in \mathcal{S}^1$, $\varphi(z) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

– *Étape 2 : Montrons que les valeurs propres des images sont de module 1.* Comme $\varphi(\mathcal{S}^1)$ est compact, pour une norme $\|.\|$ quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall z \in \mathcal{S}^1$, $\|\varphi(z)\| \leq M$. On en déduit que

$$\forall z \in \mathcal{S}^1, \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi(z)), \qquad |\lambda| \leq M.$$

Soient $z \in \mathcal{S}^1$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi(z))$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\lambda^p \in \mathrm{Sp}(\varphi(z)^p) = \mathrm{Sp}(\underbrace{\varphi(z^p)}_{\in \varphi(\mathcal{S}^1)})$ donc $|\lambda^p| \leq M$. Ainsi, la suite $(|\lambda|^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est bornée. Donc $|\lambda| = 1$.

– *Étape 3 : Relèvement.* Notons $\psi : t \mapsto \varphi(e^{it})$. ψ est un morphisme de groupes continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$. En fait, ψ est dérivable. En effet, posons $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x \psi(t)\mathrm{d}t$. F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, en particulier, $F'(0) = I_n$. Ainsi, $\frac{1}{t}F(t) \xrightarrow[t \to 0]{I}{}_n$. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert, on en déduit que $\frac{1}{t}F(t)$, donc $F(t)$ est inversible pour t petit. Soit donc $a > 0$ tel que $F(a) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors, en intégrant $\psi(x+t) = \psi(x)\psi(t)$, on obtient

$$\int_0^a \psi(x+t)\mathrm{d}t = \psi(x) \int_0^a \psi(t)\mathrm{d}t \qquad \textit{ie} \qquad \psi(x) = F(a)^{-1} \int_x^{x+a} \psi(t)\mathrm{d}t.$$

Donc ψ est dérivable. Alors, de $\psi(x+t) = \psi(x)\psi(t)$ on déduit $\psi'(x+t) = \psi'(t)\psi(x)$ d'où, pour $t = 0$, $\psi'(x) = \psi'(0)\psi(x)$. En notant $A = \psi'(0)$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \psi(t) = e^{tA}.$$

– *Étape 4 : A est diagonalisable.* Comme ψ est 2π-périodique, $e^{tA} = e^{tA + 2\pi A} = e^{tA}e^{2\pi A}$ donc $e^{2\pi A} = I_n$. On a donc $\mathrm{Sp}(e^{2\pi A}) = \{e^{2\pi\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ donc

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \qquad e^{2\pi\lambda} = 1 \qquad \textit{ie } \lambda \in i\mathbb{Z}.$$

De plus, si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme D et N commutent, on a $I_n = e^{2\pi A} = e^{2\pi D}e^{2\pi N}$. Or D est diagonalisable et a les mêmes valeurs propres que A, donc $e^{2\pi D}$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont $\{e^{2\pi\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} = \{1\}$. Donc $e^{2\pi D} = I_n$. Ainsi, $e^{2\pi N} = I_n$. Si, par l'absurde, $N \neq 0$, on a, pour $X \in \mathrm{Ker}\, N^2 \setminus \mathrm{Ker}\, N (\neq \emptyset)$,

$$e^{2\pi N}X = X + 2\pi NX \neq X$$

ce qui contredit $e^{2\pi N} = I_n$. Ainsi, $N = 0$ et A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Étape 5 : Conclusion. A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres non nulles sont conjuguées et dans $i\mathbb{Z}$, donc il existe $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}^*$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $A = P\mathrm{diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_r, -ik_r, 1, \dots, 1)P^{-1}$. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{ik_1} & & & & & & & \\ & e^{-ik_1} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & e^{ik_r} & & & & \\ & & & & e^{-ik_r} & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Or, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} R_\theta \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1}.$$

Donc il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$e^{tA} = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{tk_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Comme les matrices semblables sont réelles, on peut prendre $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

– Synthèse : soit $\varphi : e^{it} \mapsto \psi(t)$ comme ci-dessus. φ est bien défini car R_{tk} ne dépend que de t mod 2π pour $k \in \mathbb{Z}$. C'est un morphisme de groupes car $R_{(t+t')k} = R_{tk}R_{t'k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Il est continu car, pour $k \in \mathbb{Z}$, $|e^{itk} - e^{ikt'}| \leq |k||e^{it} - e^{it'}|$ d'où

$$|\cos(kt) - \cos(kt')| \leq |k||e^{it} - e^{it'}| \qquad |\sin(kt) - \sin(kt')| \leq |k||e^{it} - e^{it'}|.$$

□