Plans de leçons - Analyse

Jonathan BADIN

Table des matières

201 : Espaces de fonctions

Sans sortir du programme, il y a au moins deux Thèmes très riches pour nourrir le plan : espaces de fonctions continues sur un compact, espaces L^p sur le cercle ou sur la droite réelle. Sur le premier sujet, le jury attend une bonne familiarité avec la convergence uniforme et son utilisation pour justifier des régularités. Le Théorème de Stone-Weierstrass est évidemment incontournable, dans ses différentes versions, constructives ou non. La complétude peut également être exploitée, par exemple en lien avec les équations différentielles ou intégrales. Sur le second, la convolution et ses applications, ainsi que l'analyse de Fourier fournissent un large terrain d'exploration. Plusieurs prolongements s'offrent aux candidates et candidats solides : Théorème de Baire et ses innombrables applications, espaces de fonctions holomorphes (Théorème de Montel et ses applications, espaces de Hardy, etc.), espaces de fonctions régulières (fonctions lipschitziennes, C^k, classe de Schwartz), algèbres de Banach de fonctions (algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R}^q)$, algèbre du disque, algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, etc.), étude des parties compactes de $C(K)$ (K compact) voire de L^p.

Plan

I. Espace des fonctions continues sur un compact

Introduire les notations : $\mathscr{C}(K,\mathbf{R})$ avec K espace métrique compact munie de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f|$ et $\mathscr{C}(\Omega,\mathbf{R})$ avec Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ définie à partir d'une exhaustion de compacts.

I.1. Complétude et sous-ensembles compacts

- Complétude, app : Cauchy-Lipschitz
- Ascoli, app : Théorème de Cauchy-Peano

I.2. Résultats de densité

Référence : Hirsch-Lacombes [HL99]

- Théorème de Stone-Weierstrass, exemples : densité des polynômes algébriques lorsque K compact de $\mathbf{R}^d$, densité des polynômes trigonométriques
- cor : si K est un espace métrique compact alors $\mathscr{C}(K,\mathbf{R})$ est séparable
- rem : c'est en fait une équivalence

I.3. Dual des fonctions continues

Référence : Rudin [Rud20]

1. Riesz-Markov-Kakutani
2. App : Théorème d'approximation de Runge
3. Corollaire : théorème de Prokhorof
4. app : théorème de Lévy fort (Billingsley)

II. Espaces de Lebesgue

Rappel de la définition des espaces de Lebesgue (voir Hirsch-Lacombes [HL99]).

II.1. Complétude et compacité

Référence : Hirsch-Lacombes [HL99] et Brézis [Bre10]

- Théorème de Riesz-Fisher avec lemme suite de Cauchy a une sous-suite convergeant p.s.
- app : surjectivité coefficients de Fourier L^2.
- Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov
- app : injection de $W^{1,1}$ dans tout L^p

II.2. Densité des fonctions régulières

Référence : Briane-Pagès
Rappels sur la convolution : définition, bonnes définitions et dérivation.

- Définition : approximation de l'unité
- Exemple d'approximations de l'unité $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{1-|x|^2}} \mathbf{1}_{|x|\leqslant 1}$.
- Lemme : continuité des translations

Théorème 16. (Briane-Pagès) Soit ρ_n une approximation de l'unité et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$.

1. Pour $1 \leqslant p < \infty$ on a $f * \rho_n$ converge vers f dans $L^p(\mathbf{R}^d)$;
2. Pour $p = \infty$ si f est uniformément continue sur K alors $f * \rho_n$ converge uniformément vers f sur K.

- Conséquence : Riesz-Fréchet-Kolmogorov
- Corollaire : densité des fonctions régulières
- app : lemme de Riemann-Lebesgue

II.3. Dualité dans les espaces L^p

Référence : Hirsch-Lacombes [HL99] et Brézis [Bre10]

Proposition 20. Tout élément $g \in L^{p'}(\mu)$ définit une forme linéaire continue sur $L^p(\mu)$ via $T_g : f \mapsto \int_X fg\,\mathrm{d}\mu$. Si μ est σ-finie et $1 \leqslant p < \infty$ l'application $g \in L^{p'}(\mu) \mapsto T_g \in (L^p(\mu))'$ est une isométrie surjective. En particulier pour $1 < p < \infty$ l'espace $L^p(\mu)$ est réflexif.

app : Théorème de Rademacher. [**DEV1**]

Corollaire 22. De toute suite bornée de L^p on peut donc extraire une sous-suite convergeant faiblement.

Corollaire 23. Soit $f : (X, \mu) \to \mathbf{K}$ mesurable. Pour $1 < p \leqslant \infty$ si pour tout ϕ dans une partie dense de $L^{p'}(\mu)$, l'intégrale $\int_X f\phi$ a un sens et est majorée en module par $c\|\phi\|_{L^{p'}}$ alors $f \in L^p(\mu)$ et $\|f\|_{L^p} \leqslant c$.

Application 24. *Théorème de Riesz-Thorin*
Soient (X, μ) un espace mesuré puis $1 \leqslant p_0 \neq p_1 \leqslant \infty$ et q_0, q_1 leurs exposants conjugués. On se donne T une application linéaire continue définie sur $L^{p_0} + L^{p_1}$ envoyant continument L^{p_0} sur L^{q_0} et L^{p_1} sur L^{q_1}. Alors T se prolonge en une application linéaire envoyant L^{p_Θ} sur L^{q_Θ} pour tout $\Theta \in [0,1]$ avec

$$\frac{1}{p_\Theta} = \frac{1-\Theta}{p_0} + \frac{\Theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\Theta} = \frac{1-\Theta}{q_0} + \frac{\Theta}{q_1}.$$

Ex : transformée de Fourier, inégalité de Hausdorff-Young.

III. Espaces de fonctions régulières

III.1. Dérivation faible et espaces de Sobolev

Référence : Brézis [Bre10]

- Définition dérivation faible et espace de Sobolev
- rem : complétude, réflexivité des espaces de Sobolev
- Proposition : intégration de la limite faible avec lemme
- Corollaire : injection dans les fonctions continues

III.2. Trace et conditions aux bords

Référence : Brézis [Bre10]

1. Pro : application trace continue
2. Définition de $W_0^{1,p}$
3. Pro : inégalité de Poincaré
4. Cor : c'est une norme équivalent !

III.3. Application à la résolution de problèmes aux limites

Référence : Brézis [Bre10]

- Sturm-Liouville
- Un problème non linéaire avec rappels compacité faible, minimisation des fonctionnelles convexes et pouf !

203 : Utilisation de la notion de compacité

Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son utilisation. On peut songer à plusieurs Thèmes : Théorèmes d'existence exploitant la compacité, utilisation de la compacité pour obtenir des uniformités. Sur le premier sujet, on peut s'intéresser à l'utilisation, dans les espaces compacts ou les espaces normés de dimension finie, des valeurs d'adhérence pour prouver des convergences ou des continuités, et bien sûr aux problèmes d'extrema. Un exemple est le Théorème d'équivalence des normes sur un espace de dimension finie, qui repose sur un argument de compacité qu'il faut avoir bien compris. Sur le second, on peut explorer quelques unes des innombrables applications du Théorème de Heine (intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues sur un segment, continuité des translations dans L^p mais aussi l'utilisation de sous-recouvrements finis (par exemple pour passer du local au global). Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation des espaces normés de dimension finie par la compacité de la boule unité fermée (éventuellement assortie d'applications), aux équations différentielles non linéaires (phénomène de sortie de tout compact), à l'équicontinuité (Théorème d'Ascoli), aux familles normales (Théorème de Montel), aux opérateurs compacts.

Plan

I. Définition de la compacité

I.1. Compacité dans un espace métrique

- Définition = espace complet précompact
- Exemple $[0,1]^d$ est précompact
- Propriétés du local au global : localement borné implique borné, loc lipschitz implique lipschitz ou encore ponctuellement équicontinue implique équicontinue et surtout théorème de Heine
- Critère séquentielle aka propriété de Bolzano-Weierstrass
- Conséquence : critère de convergence dans les compacts

I.2. Propriété de Borel-Lebesgue : compacité dans un espace topologique

- Théorème de Borel-Lebesgue
- Corollaire : caractérisation des parties compactes
- app : dans un espace de Hausdorff la partie formé d'une suite et de sa limite est compacte
- Définition de la compacité dans un espace topologique

- Rem : un espace compact est borné, une partie compacte est fermé, une partie fermé d'un espace compacte est compacte.
- Propriété : applications continues sur un compact

I.3. Stabilité de la notion de compacité

- Produit dénombrable d'espaces métriques compactes est compact
- Pour un produit indénombrable, plus nécessairement de structure métrique, dans ce cas la propriété de Bolzano-Weierstrass peut être fausse
- Proposition : Critère d'extraction dans une suite de fonctions
- Théorème de Tychonoff

Exemple 1. Un produit quelconque d'espaces séquentiellement compact n'est pas nécessairement séquentiellement compact. Par exemple dans $X = \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ la suite $f_k(x) = x_k$ n'admet pas de valeur d'adhérence car si ϕ est une extractrice en prenant x une suite telle que $x_{\phi(k)} = 1$ si k est pair et 0 sinon la suite $f_{\phi(k)}$ ne converge pas simplement.

Proposition 2. *Extraction dans une suite de fonctions*
Soient E un espace métrique séparable, F un espace métrique quelconque puis $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de E dans F. On suppose que :

(i) pour tout $x \in E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est une partie relativement compact de F ;

(ii) pour tout $x \in E$, la suite f_n est équicontinue en x i.e. $f_n(y) \to f_n(x)$ lorsque $y \to x$ uniformément en n.

Alors on peut extraire de (f_n) une sous-suite convergeant simplement vers une fonction continue f. De plus si E est un espace compact, la convergence est uniforme.

II. Résultats de compacité

II.1. Compacité dans les e.v.n de dimension finie

Référence : [Gou21]

Lemme 3. On fixe une base de E et on note $\vec{x}$ le vecteur de coordonnées x. L'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur le compact $S = \{x \in \mathbf{K}^n \,:\, \|x\|_\infty = 1\}$ donc est borné et atteint ses bornes.

Proposition 4. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sur E sont équivalentes. En particulier La convergence d'une suite équivaut à la convergence de ses coordonnées dans une base quelconque.

Corollaire 5. Les parties compactes de E sont exactement les fermés bornés.

rem : résultat fondamental dans l'optimisation des fonctions de plusieurs variables
app : existence d'une mesure invariante pour une chaîne de Markov sur un espace d'états finis

II.2. Compacité faible en dimension infinie

Théorème 8. Théorème de Riesz.

1. Définition de la topologie faible
2. Critère de compacité faible
3. Exemples d'espaces réflexifs : espaces de Hilbert, espaces L^p, espaces de Sobolev.
4. Corollaire : optimisation des fonctionnelles convexes coercitives
5. app : résolution d'un problème aux limites [**DEV1**].

II.3. Résultats de compacité forte

- Th : Ascoli
- ex : Injection de Hölder
- app : Théorème de Cauchy-Peano
- cor : Montel
- cor : Riesz-Fréchet-Kolmogorov

III. Exemples d'utilisations de la compacité

III.1. Convergence faible de mesures

Référence : Billingsley

- def : convergence faible de mesures de probabilités par les fonctions tests
- rem : 1. on peut se restreindre à $C_c(\mathbf{R}^d)$ puis $C_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ par densité. 3. Sur l'ensemble des mesures de probabilités cette convergence correspond à une distance. On est bien dans un espace métrique.
- Lem : caractérisation par les fonctions de répartitions
- Th : théorème de Prokhorof
- app : problème des moments
- ex : Erdos-Kac

III.2. Approximation uniforme

Th : théorème de Stone-Weierstrass

Exemple 20. On associe à une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ son n-ème polynôme d'approximation de Bernstein définie comme

$$B_n f := \mathbf{E}\left(f(\overline{X}_n)\right) \in \mathbf{R}[x] \qquad \text{où} \quad \overline{X}_n \sim \frac{1}{n}\mathrm{Bin}(n,x).$$

En notant ω le module d'uniforme continuité de f on a :

$$\|f - B_n f\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

app : unicité problème des moments sur un compact
du même acabit convolution, densité des fonctions en escalier dans les fonctions continues

204 : Connexité, exemples d'applications

Dans cette leçon, une fois les propriétés élémentaires présentées, il convient de mettre en évidence à travers un choix judicieux, non nécessairement exhaustif, d'applications le fait que la connexité formalise l'idée d'espace "d'un seul tenant", que la connexité par arcs permet d'illustrer géométriquement. Du point de vue opérationnel, les deux idées maîtresses sont la préservation de la connexité par image continue, et l'utilisation de la connexité pour passer du local au global. La seconde est abondamment illustrée dans le domaine du calcul différentiel, des équations différentielles non linéaires (passage d'une unicité locale à une unicité globale), des fonctions holomorphes (principe du prolongement analytique ou du maximum). En cas de non-connexité, la notion pertinente est celle de composante connexe, dont une première application est la structure des ouverts de R, et leur mesure. Les exemples issus de l'algèbre linéaire sont bien entendu les bienvenus, à condition de ne pas trop détourner la leçon... Pour les candidates et candidats solides, de bons prolongements sont le théorème de Runge, l'ensemble triadique de Cantor comme prototype d'espace métrique compact, parfait et totalement discontinu, la notion de simple connexité.

Plan

Sur l'ensemble des entiers naturels, un argument classique pour établir une propriété est le raisonnement par récurrence. On montre d'abord la propriété à un instant initiale puis qu'étant vraie à un instant t elle l'est un peu plus loin à un instant $t+1$. En passant à $\mathbf{R}$ ou plus généralement à $\mathbf{R}^d$ on perd le raisonnement par récurrence auquel vient se substituer l'argument par connexité. La connexité est une propriété topologique des espaces qui s'interprète comme être d'un seul tenant...

I. Notion de connexité

I.1. Espaces connexes, composantes connexes

Référence : Gourdon [Gou21]

- définition de la connexité
- ex : les parties connexes de $\mathbf{Q}$ sont les singletons, parties connexes de $\mathbf{R}$
- définition : composantes connexes.
- Exemples : les composantes connexes d'un ouvert de $\mathbf{R}$, mesure
- pro : sont fermés, ouvertes si nombres finis.

I.2. Connexité par arcs : un critère de connexité

Référence : Gourdon [Gou21]

- Définition
- Exemple : les boules sont connexes par arcs
- Propriété : connexité par arcs implique connexité
- Exemples : $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cap \mathrm{S}_n$
- Contre-exemple : sinus topologique (Hauchecorne)

I.3. Propriétés de stabilité

Lemme : caractérisation des connexes par l'image dans un ensemble discret
Propriétés de stabilités :

- si A connexe et $A \subset B \subset \overline{A}$ alors B connexe ;
- Union de connexe ;
- Produits de connexe ;
- Image par une application continue.

cor : théorème des valeurs intermédiaires

II. L'argument de connexité

II.1. Exemples en calcul différentiel

- Inégalité des accroissements finis
- cor : une fonction de dérivée positive est croissante sur un connexe
- cor : une fonction de dérivée nulle est constante sur les connexes
- Pro : Principe des zéros isolés

II.2. Surjectivité d'une application à valeurs dans un connexe

- Lemme : une application ouverte et fermée à valeurs dans un connexe est surjective
- Proposition : théorème d'inversion local sous cas particulier
- app : surjectivité de l'exponentielle de matrice
- Proposition : Applications propres entraine fermé
- app : fonctions dilatantes

II.3. Stabilité des équations différentielles

- Lem : contrôle exponentielle de matrices avec interprétation en terme de stabilité
- Théorème de stabilité en première approximation, exemple du pendule avec frottements
- rem : cas critique $x \mapsto x^3$ est stable si $x_0 < 0$ et instable si $x_0 > 0$. Maintenant si une valeur propre est de partie réelle strictement positive instable

III. La simple connexité

III.1. Définition

Référence : Rudin [Rud20]

- Définition
- ex : les étoilés sont simplement connexes
- Théorème d'Hadamard-Lévy

III.2. Caractérisation

Référence : Rudin [Rud20]

- Caractérisation en terme d'indice et de complémentaire aka pas de trous
- ex : un disque épointé n'est pas simplement connexe
- théorème de représentation conforme [admis]

III.3. Théorème de runge

Référence : Rudin [Rud20]

Théorème 32. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$. On se donne pour chaque composante connexe de $S^2 - \Omega$ un point a_i dans cette composante connexe. Pour toute fonction holomorphe sur Ω, il existe une suite de fonctions rationnels dont les pôles sont parmi les a_i qui converge uniformément sur tout compact vers f.

- rem : s'il manque un point ça ne marche pas
- app : Mitlag-leffer

Corollaire 35. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$. Pour que toute fonction holomorphe soit limite de polynômes il faut et il suffit que Ω soit simplement connexe.

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence. Les illustrations ne manquent pas : existence de limites, utilisation de la convergence absolue ou normale, théorème du point fixe de Picard-Banach et ses applications, prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace métrique complet, et leurs innombrables applications. Le cas particulier des espaces de Hilbert est un riche terrain d'exploration : théorème de projection sur un convexe fermé et ses applications, analyse de Fourier sur le cercle ou sur la droite réelle. Les espaces L^p peuvent être abordés dans le cadre de cette leçon, mais sous leur angle spécifique d'espaces de Banach. Pour les candidates et candidats solides, le théorème de Baire fournit d'innombrables applications passionnantes. Ils pourront également songer à la théorie des algèbres de Banach, notamment l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, ou à l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

I. Espaces complets

I.1. Exemples d'espaces complets

- Définition suites de Cauchy et espaces complets
- Exemple fondamental $\mathbf{R}$
- Espaces de Banach
- Caractérisation par les séries

I.2. Propriétés de stabilités

Propriétés de stabilités :

1. sous-espace caractérisation
2. produit d'espaces complets
3. applications uniformément continue

Application au prolongement des applications uniformément continue. Exemples :

1. intégrale de Riemann
2. transformée de Fourier-Plancherel

I.3. Exemples d'espaces complets

- Fonctions continues
- Espaces de Lebesgue
- Espaces des fonctions régulières
- Espaces de Sobolev
- rem : tous les espaces complets ne sont pas des espaces de fonctions, par exemple les espaces des compacts munis de la distance de Hausdorff

II. Méthode du point fixe

II.1. Point fixe de Banach-Picard

- Théorème du point fixe de Banach-Picard

- App : théorème de Cauchy-Lipschitz
- App : convergence mesure invariante chaîne de Markov sous hypothèse $P > 0$.

II.2. Compacité en manque de contrôle

- Première généralisation (Gourdon) avec exemple, on garde dans ce cas la convergence du processus
- Deuxième généralisation, on perd dans ce cas la convergence du processus
- app : existence mesure invariante chaîne de Markov
- rem : deuxième résultat nettement généralisé par Brouwer ou Schauder

III. Théorie de Baire

III.1. Lemme de Baire

- Lemme de Baire
- app : les fonctions continues nulle part dérivables forme un G-delta dense
- voire d'autres

III.2. Conséquence pour les applications linéaires continues

Le triptique : BS, app ouverte, graphe fermé voir Brézis [Bre10]

IV. Structure géométrique

IV.1. Existence d'une projection

- Projection sur un convexe fermé
- Corollaire : projection sur un s.e.v fermé, théorème du supplémentaire orthogonal
- Corollaire : Théorème de Riesz
- app : Théorème de Rademacher

IV.2. Compacité faible

- Compacité dans un Hilbert
- Optimisation des fonctionnelles convexes
- rem : retour sur le théorème de projection
- app : résolution d'un problème aux limites

206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse

Cette leçon d'exemples est l'occasion d'une réflexion sur de nombreuses parties du programme. En topologie, il s'agit bien sûr des propriétés spécifiques aux espaces normés de dimension finie, notamment l'utilisation des valeurs d'adhérence, l'équivalence des normes ou encore l'identité entre parties compactes et parties fermées et bornées. D'autres champs d'application sont : la théorie de la mesure (mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$), le calcul différentiel (utilisation de matrices jacobiennes, espaces tangents, extrema liés, etc.), les équations différentielles linéaires, les séries de Fourier et plus généralement l'approximation dans un espace préhilbertien séparable par projection sur des sous-espaces de dimension finie. Les candidates et candidats solides peuvent aborder la question de l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, ou les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles. D'autres pistes possibles sont l'étude des propriétés spectrales des opérateurs compacts, ou le théorème de Grothendieck sur les sous-espaces fermés de L^p contenus dans L^∞.

I. Utilisation de la compacité

I.1. Rappels sur la compacité

- Définition = espace complet précompact
- Exemple $[0,1]^d$ est précompact
- Propriétés du local au global : se concentrer sur Heine

I.2. Compacité en dimension finie

- Équivalence des normes en dimension finie
- app : Théorème de Housholder et conséquence pour le contrôle.
- Corollaire : dans un e.v.n les compacts sont exactement les fermés bornés
- app : obtention d'uniformité sur de la convergence Bernstein

I.3. Compacité en dimension infinie

- Théorème de Riesz
- rem : que faut-il pour être compact en dimension infinie ?
- Pro : critère d'Ascoli
- app : Cauchy-Peano, faux sur un Banach de dimension infinie

II. Travail en coordonnées

II.1. Calcul différentiel

- Grande idée du calcul différentielle
- app : théorème de stabilité de Liapounov
- Lem : stabilité exponentielle de matrice

II.2. Inversion local et fonctions implicites

- Théorème d'inversion local

- app : Lemme de Morse et calcul de l'intégral de Laplace
- cor : fonctions implicites
- rem : pourquoi c'est particulièrement utile en dimension finie

II.3. Sous-variétés

- Équivalence des sous-variétés
- exemple de la parabole (Rouvière)
- Cor : extremas liés
- Exemple : loi d'entropie minimale

III. Approximation par des sous-espaces de dimension finie

III.1. Projection dans le cadre euclidien

- Existence et unicité projeté avec caractérisation
- Corollaire : formule de Gram pour évaluer la distance
- ex : Théorème de Muntz
- rem : que se passe t-il dans le cadre non euclidien ?

III.2. Bases hilbertiennes

- Définition base hilbertienne
- ex : système trigonométrique
- ex : densité des polynômes orthogonaux
- Caractérisation projeté, expression de l'erreur et théorème de Parseval
- ex : séries de Fourier estimation de l'erreur d'estimation
- app : estimation d'une densité

209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

Le programme offre aux candidats plusieurs pistes très riches pour nourrir cette leçon : l'approximation uniforme par des polynômes algébriques ou trigonométriques, la régularisation par convolution. Mais on pourra également penser à l'approximation des fonctions intégrables sur la droite réelle par des fonctions continues à support compact. Les séries de Fourier s'intègrent parfaitement à cette leçon, mais le jury a constaté lors de la session 2022 que la théorie L^2 était très rarement abordée par les candidats. Dans la même thématique, on peut citer le théorème de Fejér (dans ses versions L^p ou $C(T)$) et ses applications. Voici enfin quelques pistes à réserver aux candidats solides : le théorème de Runge, le théorème taubérien de Littlewood, l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles, l'approximation uniforme par des fonctions lipschitziennes.

Plan

I. Régularité des fonctions mesurables

I.1. Régularité de la mesure de Lebesgue

- Lemme une mesure borélienne finie vérifie : $\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \supset A\} = \sup\{\mu(F) : F \subset A\}$
- Théorème : si la mesure est sigma-finie alors la propriété des fermés, si ouverts sigma-finie on a la propriété des ouverts
- Corollaire : la mesure de Lebesgue vérifie la propriété des ouverts et des fermés (extérieurement) régulière
- rem : contre-exemple pour une mesure sigma-finie quelconque

I.2. Approximation des fonctions mesurables

- Lemme approximation des ouverts de mesure finie !
- Théorème : si f mesurable bornée par M sur un ensemble à support de mesure finie alors il existe une suite de fonctions continues f_n tel que $|f_n| \leqslant M$ converge p.p vers f.
- Corollaire : densité des fonctions lipschitzienne à support compact dans $L^p(\mathbf{R}^d)$ pour $1 \leqslant p < \infty$.
- Application : continuité des translations

II. Régularisation par convolution

II.1. Convolution

Référence : Briane-Pagès
- Définition convolution
- Propriétés élémentaires
- Inégalité de Hausdorff-Young (Hirsch-Lacombe)

II.2. Approximation de l'unité

- Définition : approximation de l'unité
- Exemple d'approximations de l'unité $x \mapsto e^{\frac{1}{1-|x|^2}} \mathbf{1}_{|x| \leqslant 1}$.
- Lemme : continuité des translations

Théorème 15. (Briane-Pagès) Soit ρ_n une approximation de l'unité et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$.

1. Pour $1 \leqslant p < \infty$ on a $f * \rho_n$ converge vers f dans $L^p(\mathbf{R}^d)$;
2. Pour $p = \infty$ si f est uniformément continue sur K alors $f * \rho_n$ converge uniformément vers f sur K.

- Corollaire : densité des fonctions régulières
- app : lemme de Riemann-Lebesgue

II.3. Utilisation de la régularisation par convolution

- Rappel : théorème d'Ascoli
- Conséquence 1 : Cauchy-Peano
- Conséquence 2 : Riesz-Fréchet-Kolmgorov (**DEV1**)

Application 22. Toute partie bornée de $W^{1,1}(\mathbf{R})$ est de restriction relativement compacte sur $L^p(I)$ où I est un intervalle bornée pour tout $1 \leqslant p < \infty$.

III. Approximation polynomiale

III.1. Théorème de Stone-Weierstrass

Référence : Hirsch-Lacombe [HL99]
- Théorème
- Exemple des polynômes
- App : unicité dans le problème des moments
- Exemples des polynômes trigonométriques
- App : critère de Weyl
- Rem : théorème de Runge pour les polynômes à coefficients complexes

III.2. Meilleur approximation au sens des moindres carrés

- Définition séries de Fourier
- Convergence L^2 et estimation de l'erreur avec régularité
- Cor : convergence en norme uniforme
- Rem : on verra que ce n'est pas la bonne borne

III.3. Recherche de meilleurs approximation en norme uniforme

- Exemple : polynôme de Bernstein avec vitesse de convergence
- Application : convergence des polynômes d'interpolation de Tchebychev
- Lemme de Lebesgue

Théorème 36. Si u est une fonction continue 2π-périodique tel que $\delta_n(u) = O\left(\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right)$ avec $k \in \mathbf{N}$ et $0 < \alpha < 1$ alors u est de classe C^k et $u^{(k)}$ est α-holdérienne.

Corollaire 37. On a idem pour l'approximation polynomiale.

Remarque : on peut aussi en déduire des résultats sur Fourier...

213 : Espaces de Hilbert

L'analyse de Fourier, sur le cercle où la droite réelle, est évidemment une illustration fondamentale des résultats de ce chapitre. Le jury a noté que rares étaient les candidats qui maîtrisaient correctement la théorie L^2 des séries de Fourier. Le fait que les polynômes constituent une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à certains poids est présenté quasi systématiquement en développement. Peut-être faudrait-il songer à trouver d'autres sources d'inspiration, d'autant que la preuve n'est pas toujours parfaitement comprise, et que de nombreux candidats sont incapables d'en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R})$. Les candidats solides pourront s'intéresser aux propriétés spectrales des opérateurs autoadjoints compacts d'un espace de Hilbert, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, ou encore au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, ou encore au théorème d'échantillonnage de Shannon.

Plan

I. Définition et projection

I.1. Espaces de Hilbert

Référence : Brézis
définition : produit scalaire, espace préhilbertien, espace de Hilbert
pro : Identité du parallélogramme, théorème de Jordan-Von-Neumann
exemples : espaces euclidiens, L^2 et espaces de Sobolev.

I.2. Projection sur un convexe complet

Référence : Brézis
Théorème : projection sur un convexe complet
cor : projection sur un s.e.v fermé dans un espace de Hilbert
Proposition : Somme orthogonal
cor : théorème de Riesz
application : Sturm-Liouville
app : Théorème de Rademacher.

I.3. Bases hilbertiennes

Référence : Brézis
définition des bases hilbertiennes
exemples de bases hilbertiennes :

1. système trigonométrique
2. polynômes orthogonaux

pro : Identité de Parseval
ex : Série de Fourier et calcul de sommes, théorème de Shannon. Proposition : tout espace préhilbertien séparable possède une base hilbertienne
exemple bases hilbertiennes de $L^2(\mathbf{R})$
Proposition : Théorème de Riesz-Fisher
ex : reformuler en coefficients de Fourier de ℓ^2.

II. Convergence faible dans un Hilbert

II.1. Définition et propriétés

Définition
Propriétés de la convergence faible :
Exemples.

II.2. Compacité faible et minimisation des fonctionnelles

Proposition : théorème de compacité faible
App : Problème aux limites Sobolev [**DEV1**]
Lem : Le lemme pour le développement. cor : Minimisation des fonctionnelles convexes
Rem : revenir sur le théorème de projection.

III. Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

III.1. Opérateurs auto-adjoints compacts

Définition des opérateurs compacts
Propriétés
Définition des opérateurs auto-adjoints.
exemple ?, opérateurs de Hilbert-Smitch et opérateurs à noyaux ?

III.2. Valeurs propres des opérateurs auto-adjoints compacts

Définition.

Proposition 34.
1. les sous-espaces propres d'un opérateur compact sont de dimension finie
2. les sous-espaces propres d'un opérateur auto-adjoint sont orthogonaux.

3. Les valeurs propres sont réels.

Exemples de spectres (voir dans Hirsch-Lacombe)

III.3. Propriétés des opérateurs auto-adjoints

Lemme 38.

Théorème 39.

app : valeurs propres et sturm-Liouville.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Les deux théorèmes fondamentaux auxquels cette leçon est consacrée offrent une belle utilisation de la complétude, qu'il conviendra d'évoquer. La démonstration de l'un de ces deux théorèmes peut parfaitement faire l'objet d'un des deux développements. On pourra par exemple mettre en pratique, sur des exemples bien choisis, le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles, pour enrichir le plan avec profit. Des applications significatives aussi bien en analyse qu'en géométrie sont attendues : problèmes d'optimisation sous contraintes (inégalité de Hölder, inégalité d'Hadamard, etc), régularité des racines d'un polynôme en fonction des coefficients, etc. La méthode des multiplicateurs de Lagrange a bien évidemment toute sa place dans cette leçon, à condition qu'elle soit illustrée par des exemples. L'interprétation de l'énoncé en termes d'espace tangent est visuellement éclairante et permet d'éviter les éventuelles confusions résultant de raisonnements purement matriciels. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude locale d'applications suffisamment régulières (submersions, immersions, théorème du rang constant, lemme de Morse), au lemme de Sard, ainsi qu'aux sous-variétés de $\mathbf{R}^n$.

IV. Inversion local et fonctions implicites

IV.1. Inversion en dimension 1

- Caractérisation des bijections
- app : définition des fonctions réciproques
- Caractérisation différentielle de la stricte croissante

IV.2. Inversion local

On présente le théorème d'inversion local en discutant de la régularité (C^k, holomorphe) avec quelques exemples et contre-exemples qu'on trouvera dans le Rouvière : racines d'un polynôme etc... Application lemme de Morse (**DEV1**)

IV.3. Fonctions implicites

A partir de l'équation $f(x_\lambda, \lambda) = 0$ on peut obtenir les valeurs des différentielles successives de x_λ donc son comportement local. On peut appliquer cela à l'asymptotique des racines d'un polynôme (Rouvière). On peut aussi montrer un théorème de point fixe à paramètre qu'on appliquera à la dépendance en les paramètres d'une EDO

V. Du local au global

V.1. Théorème d'inversion global

1. Énoncer le résultat
2. pourquoi pas satisfaisant : vérifier l'injectivité revient à peu près à inverser.

V.2. Argument de connexité pour la surjectivité

- Lemme : une application ouverte et fermée à valeurs dans un connexe est surjective
- Proposition : théorème d'inversion local sous cas particulier
- app : surjectivité de l'exponentielle de matrice
- Proposition : Applications propres entraine fermé
- app : fonctions dilatantes

V.3. Théorème d'Hadamard-Lévy

Exemple 46. L'application $f : (x, y) \mapsto \left(\sin \frac{x}{2} - y, \sin \frac{y}{2} - x\right)$ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.

VI. Sous-variétés

VI.1. Présentation

On introduit la notion de sous-variété avec le théorème des sous-variétés. Il faut aussi des exemples, on peut mettre le folium de Descartes, des groupes de Lie, la sphère.

VI.2. Espace tangent

On définit l'espace tangent et on donne les expressions suivant les différentes caractérisations.

VI.3. Théorème des extremas liés

On s'intéresse à la minimisation de fonctions définies sur une partie S de l'espace E. En utilisant le calcul différentielle, on a une condition du premier ordre à savoir que si x_0 est un extremum de f, tout vecteur v tel qu'il existe une courbe $t \mapsto \gamma(t)$ tracé sur S avec $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$ est tel que $\mathrm{d}f(x_0) \cdot v = 0$. On peut appliquer cela au calcul des variations. Encore que ce point de vue prend tout son intérêt lorsque S est une sous-variété et $E = \mathbf{R}^d$, dans ce cas le critère revient à l'annulation de $\mathrm{d}f(x_0)$ sur le plan tangent de S en x_0. En particulier, pour une sous-variété définie par une équation on en déduit le théorème des extremas liés qu'on pourra appliquer à la minimisation de l'entropie de Shannon.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

L'idée de base de cette leçon est qu'une fonction suffisamment régulière se comporte localement comme une application linéaire. De nombreuses différentielles usuelles (notamment issues de l'algèbre linéaire) peuvent ainsi être obtenues en calculant directement un développement limité. Sur ce point, une aisance raisonnable est attendue des candidats. Un cas particulier important est la caractérisation des fonctions holomorphes parmi les fonctions différentiables, et son interprétation géométrique. Les candidats semblent en général peu familiers avec les propriétés élémentaires des fonctions harmoniques, qui fournissent pourtant un riche champ d'applications. Les candidats solides pourront s'intéresser à la différentielle de l'exponentielle matricielle, ainsi qu'aux points où celle-ci est un difféomorphisme local. Pour ce qui concerne les applications, de nombreux thèmes relatifs aux leçons 214 ou 219 sont ici appropriés

VII. Variations d'une fonction

VII.1. Dérivée selon un vecteur, applications différentiables

- Dérivée directionnelle, dérivée partielles
- Exemple
- Définition des fonctions différentiables
- Th : caractérisation des fonctions de classe C^1
- rem : dérivées selon tout vecteurs sans être continue

VII.2. Inégalité de la moyenne

- Inégalité de la moyenne
- Conséquence : si diff nulle fonction nulle

Proposition 47. Supposons que f admette des dérivées directionnels en tout point de (a,b) avec $b = a + v$. Alors,

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{x \in (a,b)} \|f'_v(x)\|.$$

VII.3. Application à l'optimisation des fonctions de plusieurs variables

- Point critique
- Exemple des fonctions convexes

VIII. Variations d'ordre supérieur

VIII.1. Différentielle d'ordre supérieur

- Définition
- Principe de symétrie de Schwartz

VIII.2. Formules de Taylor

1. Expression des diverses formules de Taylor
2. Lemme de Morse et app à Laplace

VIII.3. Application à l'optimisation des fonctions de plusieurs variables

1. Critère d'ordre 2
2. rem : comment déterminer la signature de la hessienne

IX. Utilisation de l'approximation linéaire

IX.1. Théorème d'inversion local

1. TIL
2. app : surjectivité exponentielle de matrices
3. TFI
4. app : théorème des extremas liés

IX.2. Théorème du changement de variable

1. Interprétation métrique de la différentielle
2. Théorème du changement de variable
3. Exemple en dimension 2 avec coordonnées polaire

IX.3. Stabilité des équations différentielles non linéaires

1. Théorème de stabilité de Liapounov
2. Exemple du pendule simple
3. rem : cas critique $x \mapsto x^3$ est stable si $x_0 < 0$ et instable si $x_0 > 0$. Maintenant si une valeur propre est de partie réelle strictement positive instable

218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

La connaissance des différentes formules de Taylor, en une, ou plusieurs variables, de leurs différences et de leurs champs d'applications, allant de la géométrie (par exemple la position d'une courbe ou une surface par rapport à son espace tangent) jusqu'aux probabilités (comme par exemple le théorème central limite), doit constituer le coeur de la leçon. Les énoncés devront être illustrés par des exemples pertinents. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Cette analyse impose une bonne compréhension des relations de comparaison (notamment o et O). Le jury s'attend à ce que le lien entre l'existence d'un développement limité à un ordre n et l'existence d'une dérivée n-ième soit connu. On peut aussi montrer comment les formules de Taylor permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives. Pour les candidates et candidats solides, on peut mentionner des applications comme le lemme de Morse, l'étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema. On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées, ou encore à l'analyse de méthodes d'intégration numérique.

Plan

I. Approximation local d'une fonction d'une variable réelle

I.1. Approximation affine

Référence : [Gou21]
Définition des fonctions dérivables
Points critiques
Propriété de Rolle
app : Majoration écart polynômes d'interpolations
Cor : théorème des accroissements finis app : caractérisation croissance ou Rouvière.

I.2. Approximation aux ordres supérieurs

Définition des dérivées sucessives Théorème : Formules de Taylor avec toutes les expressions du reste
ex : Moments et fonction caractéristique
Application : contrôle des dérivées intermédiaires
Application : théorème central limite
Application : expression du noyau de Peano.
Rem : 1. contre-exemple reste en un point.
2. fonctions non C2 avec un développement limité.

I.3. Application à l'étude asymptotique des suites récurrentes

Pro : cas des points attractifs
rem GW
Méthode pour les cas critiques
ex : suite du sinus
ex : GW.

II. Extension aux fonctions de plusieurs variables

II.1. Approximation affine

Pro : points critiques
Pro : IAF
app :?

II.2. Formules de Taylor des fonctions de plusieurs variables

Application : Nature des points critiques

II.3. Lemme de Morse

Application : Méthode de Laplace.

III. Développement à l'ordre infini

III.1. Séries entières

III.2. Développement en série entière

App : Problème des moments.

III.3. Exemples de solutions d'équations différentielles

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche

Cette leçon offre aux candidates et candidats une multitude d'approches possibles : utilisation de la topologie, du calcul différentiel, de la convexité (fonctions convexes, projection sur un convexe fermé et leurs multiples applications), de l'holomorphie. Les candidates et candidats peuvent proposer des problèmes d'optimisation sous contraintes, si possible autres que la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique. À ce sujet, une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels. Les algorithmes de recherche d'extremums ont également leur place dans cette leçon (méthode de Newton, du gradient à pas optimal, problème des moindres carrés, etc). Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux diverses versions du principe du maximum (fonctions holomorphes ou harmoniques, équations aux dérivées partielles), au calcul des variations, ou réfléchir à l'unicité de la meilleure approximation dans divers espaces fonctionnels, à commencer par celle des fonctions continues sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d.

IV. Existence d'extremums

IV.1. Rappels de compacité

- Les caractérisations de la compacité dans les espaces métriques : trois.
- Corollaire : l'image d'un compact est un compact. En particulier une fonction continue sur un compact est borné et atteint ses bornes.

IV.2. Résultats de compacité en dimension finie

Lemme 3. On fixe une base de E et on note $\vec{x}$ le vecteur de coordonnées x. L'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur le compact $S = \{x \in \mathbf{K}^n \, : \, \|x\|_\infty = 1\}$ donc est borné et atteint ses bornes.

Proposition 4. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sur E sont équivalentes. En particulier La convergence d'une suite équivaut à la convergence de ses coordonnées dans une base quelconque.

Corollaire 5. Les parties compactes de E sont exactement les fermés bornés.

Application à l'optimisation de fonctions. Exemple loi d'entropie minimale.

IV.3. Compacité faible en dimension infinie

1. Théorème de Riesz
2. Définition de la topologie faible
3. Critère de compacité faible
4. Exemples d'espaces réflexifs : espaces de Hilbert, espaces L^p, espaces de Sobolev.

V. Utilisation du calcul différentiel

V.1. Conditions du premier et du second ordre

- Critère du premier ordre
- x3 contre-exemple
- Critère du second ordre

- exercice 1 page 317 du Gourdon
- rem : pour calculer la signature de la différentielle Gauss

V.2. Optimisation sous contraintes

Lemme 11. Soit $f : U \subset E \to \mathbf{R}$ différentiable. Si f atteint son minimum sur A en un point x alors pour tout chemin γ de classe C^1 tracé sur A avec $\gamma(0) = x$ on a $\mathrm{d}f(\gamma'(0)) = 0$.

Application 12. Rouvière, équations d'Euler-Lagrange
Soit $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 puis,

$$S : f \in C^1([a,b],\mathbf{R}) \mapsto \int_a^b L(x, f(x), f'(x))\mathrm{d}x.$$

Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$, si f réalise le minimum de S parmi l'ensemble des fonctions $f \in C^1([a,b],\mathbf{R})$ avec $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$ alors,

$$\forall x \in [a,b], \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\partial_3 L(x, f(x), f'(x))\right) = \partial_2 L(x, f(x), f'(x)).$$

Exemple 13. Pour $L(x, f, f') = \sqrt{1+f'^2}$ le minimum est atteint pour f affine.

Proposition 14. Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 puis N une sous-variété de $\mathbf{R}^d$. Si la restriction de f à N atteint un maximum en un point x alors $\mathrm{d}f(x) = 0$ sur $\mathrm{T}_x N$. En particulier si $N = \{g_1 = 0, \cdots, g_p = 0\}$ où les $g_i : U \to \mathbf{R}$ sont des fonctions C^1 dont les différentielles sont linéairement indépendantes alors il existe des scalaires λ_i tels que $\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \cdots + \lambda_p \nabla g_p(x)$.

Exemple 15 (Rouvière simplifié)**.** On définit sur $\mathbf{R}^d_{>0}$ l'entropie $H(p) = -\sum_{i=1}^d p_i \log p_i$. Sur l'ensemble $N = \{p \in \mathbf{R}^d_{>0} : \sum_{i=1}^d p_i = 1\}$ des lois de probabilités la fonction H atteint son maximum en un unique point à savoir $(1/d, \cdots, 1/d)$.

Exemple 16 (Gourdon)**.** L'ensemble des matrices de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ de norme de Frobenius minimal est exactement $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$.

V.3. Principe du maximum

Théorème 17. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{R}^d$ puis $u : \Omega \to \mathbf{R}$ est deux fois dérivable vérifiant :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\partial_{i,j} u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_i u(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \Omega$$

où les fonctions $a_{i,j}$ et b_i es fonctions uniformément bornés sur Ω avec $a_{i,j} = a_{j,i}$. Si u atteint son maximum en un point de Ω, alors u est constante.

- Exemples : fonctions sous-harmoniques en particulier harmoniques en particulier holomorphe mais aussi fonctions convexes qui sont sous-harmoniques
- Exemple : équation de la chaleur
- Corollaire : Existence maximum sur le bord cas ouvert borné
- Dans le cas d'un ouvert non borné on va chercher à pondérer la fonction, fonctionne bien pour des fonctions holomorphes stables par produit.
- Ex : Trois droites d'Hadamard

VI. Classe des fonctions convexes

VI.1. Définition et caractérisation des fonctions convexes

- Définition
- Caractérisation sup de fonctions affines
- Caractérisation différentielles ordre 1 et ordre 2

VI.2. Optimisation des fonctions convexes

- Minimum des fonctions convexes : point critique = minimum et si convexe strict alors min unique
- app : modèles exponentielles
- Continuité faible en dimension infinie
- rem : hypothèse de coercitivité donnée par alpha-convexité, en dimension finie juste strict convexité

VI.3. Algorithmes de gradient

Développement algorithme du gradient à pas fixe.

220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires

La théorie de Cauchy-Lipschitz non linéaire est le fondement de cette leçon, et comporte plusieurs points importants : passage du local au global, phénomènes d'explosion en temps fini, etc. La leçon étant orientée vers l'étude d'exemples, il convient d'éviter cependant de consacrer une trop large portion du plan à des théorèmes généraux. Le nombre des exemples proposés aura avantage à être restreint : il ne s'agit pas de présenter une longue compilation d'exemples à peine effleurés, mais d'en analyser avec soin un petit nombre, choisis pour leur intérêt et dans un souci d'illustrer des méthodes variées. Des exemples de résolutions explicites peuvent bien sûr être proposés, mais l'intitulé appelle également des études qualitatives d'équations différentielles non linéaires d'ordre 1 ou 2, par exemple l'étude qualitative de systèmes autonomes plans. Il est important d'avoir compris comment l'étude d'une équation d'ordre 2 se ramène à celle d'un système différentiel d'ordre 1. Dans les exemples d'études proposés, on a tout intérêt à faire des dessins (portrait de phase par exemple) et à mettre en évidence l'utilisation d'éléments géométriques pour construire l'allure des trajectoires : symétries, champs de vecteurs, points d'équilibre, barrières, isoclines, intégrales premières. Les candidates et candidats solides pourront s'intéresser au problème de linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre ou au théorème de Poincaré-Bendixson.

I. Existence, unicité et domaine de définition des solutions

I.1. Théorème de Cauchy-Lipschitz

- Définition problème de Cauchy, formulation intégrale
- Théorème de Cauchy-Lipschitz local
- Corollaire : existence et unicité solution maximale
- Exemple de non globalité $x' = x^2$ avec $1/(x-1)$.
- Exemples de résolutions explicites : linéaire d'ordre 1, équation de Bernoulli, équation de Ricatti

I.2. Théorème de Cauchy-Peano

- Théorème de Cauchy-Peano
- Exemple de non unicité de $\sqrt{y}$

I.3. Comportement des solutions maximales

Référence : Demailly essentiellement

- Théorème de prolongement
- Corollaire : critère de maximalité, critère de globalité
- ex : $x' = -\nabla U(x)$ ou Lokta-Volterra

Théorème 1. Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Si $x : [t_0, t_+[\to \Omega$ est une solution de $x' = f(t,x)$ tel que $t_2 < \sup I$ et $x(t) \in K$ un compact de Ω pour tout $t \in [t_0, t_+]$ alors x peut se prolonger au delà de t_+.

Corollaire 2. Soit $x : [t_0, t_+[\to \Omega$ est une solution maximale de $x' = f(t,x)$. Si $t_+ < \sup I$ alors x s'approche du bord de Ω ou tend vers ∞ à mesure que t se rapproche de t_+ i.e. $\|x(t)\| \to +\infty$ ou $d(x(t), \partial\Omega) \to 0$. Idem en t_-. Dans le cas contraire la solution est globale.

II. Équations différentielles linéaires

II.1. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Théorème 3. Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $b : I \to \mathbf{R}^n$ continues. Pour tout $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbf{R}^n$ le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

a une unique solution définie sur I tout entier.

Proposition 4. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $x'(t) = A(t)x(t)$ forme un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathbf{K})$ de dimension n. Et sous-espace affine pour les applications linéaires

II.2. Expression des solutions

Définition 5. On appelle résolvante $R(t, t_0)$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $x_i(t)$ où $(x_1, \cdots, x_n)$ est la base de solution associée à la base canonique en t_0.

Exemple 6. Pour un système linéaire homogène à coefficients constants on a $R(t, t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}$ l'exponentielle de la matrice $(t - t_0) \cdot A$. Le calcul de l'exponentielle est possible à partir de la décomposition en sous-espaces caractéristiques de A.

Proposition 7. L'unique solution est donnée par :

$$R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t - s, t_0)b(s)\mathrm{d}s.$$

Exemple 8. (Wadi) Oscillateur harmonique forcé L'équation $x'' + \omega^2 x(t) = b(t)$ a pour solution :

$$x(t) = \cos(\omega t)x_0 + \sin(\omega t)\frac{\dot{x_0}}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin(\omega(t - s))b(s)\mathrm{d}s.$$

II.3. Système périodique

- Surjectivité exponentielle de matrices
- Théorème de Floquet
- Exemple : équation de Hill ?

III. Étude qualitative

III.1. Équation différentielles autonomes

1. Définition
2. Représentation du champs de vecteurs pour une étude qualitative et portrait de phase avec exemple
3. Proposition : point d'équilibre

III.2. Stabilité des systèmes linéaires

1. Contrôle exponentielle de matrices
2. Exemple en dimension 2 (avec portrait de phase en annexe)

III.3. Stabilité des systèmes non linéaires

1. Théorème de stabilité de Liapounov
2. application au pendule ?
3. rem : cas critique $x \mapsto x^3$ est stable si $x_0 < 0$ et instable si $x_0 > 0$. Maintenant si une valeur propre est de partie réelle strictement positive instable

221 : Equations différentielles linéaires

La théorie de Cauchy-Lipschitz linéaire est une porte d'entrée naturelle pour cette leçon. La complétude (via la méthode des approximations successives) y joue un rôle crucial, et la preuve est un exemple fondamental d'intervention de la dimension finie en analyse. Sans que cet aspect devienne trop prépondérant, les candidates et candidats peuvent proposer quelques exemples de résolutions explicites : cas scalaire d'ordre un qui fait intervenir des outils élémentaires, cas des coefficients constants avec l'exponentielle de matrice (qui mobilise fortement la réduction des endomorphismes), utilisation de séries entières ou de séries de Fourier, variation des constantes, etc. On se gardera d'aborder des théorèmes généraux s'appliquant au cas non linéaire qui sont réservés à la leçon 220. Même dans le cadre linéaire, les études qualitatives présentent un grand intérêt et fournissent de nombreuses possibilités : étude du comportement asymptotique des solutions (pour lequel le lemme de Grönwall est un outil d'une grande efficacité), de la distribution des zéros, du Wronskien, etc. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la linéarisation d'équations non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre, proposer des exemples de problèmes aux limites (théorie de Sturm- Liouville) ou d'études d'équations aux dérivées partielles linéaires.

IV. Équations linéaires avec condition de Cauchy

IV.1. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

- Écriture en système différentielle
- Théorème de Cauchy-Linéaire, structure de l'ensemble des solutions
- Rem : dans le cas non linéaire pas nécessairement existence d'une solution

IV.2. Base de l'espace des solutions

Définition 9. Wronskien d'une famille de vecteurs

Lemme 10. Les assertions suivantes sont équivalentes avec i.e. wronskien

Proposition 11. Evaluation du Wronskien

Application 12. Utilisation du wronskien. Voir exercices Gourdon

IV.3. Résolvante, expression des solutions

Définition 13. On appelle résolvante $R(t,t_0)$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $x_i(t)$ où $(x_1,\cdots,x_n)$ est la base de solution associée à la base canonique en t_0.

Proposition 14. L'unique solution est donnée par :

$$R(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}R(t-s,t_0)b(s)\mathrm{d}s.$$

Exemple 15. (Wadi) Oscillateur harmonique forcé L'équation $x''+\omega^2x(t)=b(t)$ a pour solution :

$$x(t)=\cos(\omega t)x_0+\sin(\omega t)\frac{\dot{x_0}}{\omega}+\frac{1}{\omega}\int_0^t\sin(\omega(t-s))b(s)\mathrm{d}s.$$

V. Équations linéaires autonomes

V.1. Résolution des équations autonomes

- Expression de la résolvante en tant exponentiellement de matrices
- Calcul par les sous-espaces caractéristiques

Corollaire 16. Pour un système linéaire homogène à coefficients constants sur $\mathbf{C}$ il existe une base de l'espace des solutions de la forme $\sum_{j=1}^{n} P_j^i(t)\mathrm{e}^{\lambda_j t}$ où les P_j^i sont des polynômes à valeurs réelles et les λ_j les valeurs propres complexes de A. Si le système est à coefficients réels une base de l'espace des solutions réelles s'obtient en remplaçant les solutions $\sum_{j=1}^{n} P_j^i(t)\mathrm{e}^{\lambda_j t}$ et $\sum_{j=1}^{n} P_j^i(t)\mathrm{e}^{\overline{\lambda_j} t}$ associés à deux valeurs propres complexes conjugués par $\sum_{j=1}^{n} P_j^i(t)\cos(b_j t)\mathrm{e}^{a_j t}$ et $\sum_{j=1}^{n} P_j^i(t)\sin(b_j t)\mathrm{e}^{a_j t}$ en notant $\lambda_j = a_j + \mathrm{i}b_j$.

Exemple 17. Les solutions de l'équation $x'' + ax' + bx = 0$ pour $a, b \in \mathbf{R}$ s'écrivent :
- $x(t) = \alpha\mathrm{e}^{\lambda t} + \beta\mathrm{e}^{\mu t}$ si λ et μ sont les deux racines réelles de $X^2 + aX + b = 0$;
- $x(t) = (\alpha t + \beta)\mathrm{e}^{\lambda t}$ si λ est l'unique racine double de $X^2 + aX + b = 0$;
- $x(t) = \alpha\cos(bt)\mathrm{e}^{at} + \beta\sin(bt)\mathrm{e}^{at}$ si $a+\mathrm{i}b$ et $a-\mathrm{i}b$ sont les deux racines complexes conjugués de $X^2+aX+b=0$.

V.2. Stabilité des points d'équilibre

1. Contrôle exponentielle de matrices
2. Exemple en dimension 2 (avec portrait de phase en annexe)
3. app : théorème de stabilité de Liapounov
4. ex : pendule avec frottements
5. rem : cas critique $x \mapsto x^3$ est stable si $x_0 < 0$ et instable si $x_0 > 0$. Maintenant si une valeur propre est de partie réelle strictement positive instable

V.3. Application à l'étude des équations linéaires périodiques

- Surjectivité exponentielle de matrices
- Théorème de Floquet
- Exemple : équation de Hill ?

VI. Équations linéaires avec conditions aux limites

VI.1. Espaces de Sobolev

VI.2. Formulation faible

- Formulation faible
- Théorème de Lax-Milgram
- Résolution de l'équation de Sturm-Louville avec régularité solution

VI.3. Étude spectral

- Diagonalisation des opérateurs compacts
- Existence d'une base de solution orthonormée pour Sturm-Liouville
- app : résolution équation de la chaleur sur un domaine quelconque (rôle joué par les séries de Fourier sinon)

223 : Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

L'utilisation des valeurs d'adhérence pour montrer des convergences ou des continuités, ainsi que celle des limites inférieures et supérieures d'une suite réelle (qui permettent des rédactions expurgées d'epsilons superflus) sont des thèmes centraux. Le théorème de Bolzano-Weierstrass ainsi que celui de Cesàro, que les candidates et candidats doivent savoir démontrer, sont incontournables dans cette leçon. Sans se limiter aux cas convergents, on peut également présenter des exemples d'études asymptotiques de suites définies par des sommes ou des relations de récurrence, voire implicitement. D'autres pistes, comme les différentes méthodes d'approximation des réels par des irrationnels, la résolution numérique d'équations et leur vitesse de convergence peuvent être explorées. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser par exemple à l'équirépartition, à l'étude de systèmes dynamiques discrets, à l'accélération de la convergence, aux procédés de sommation des séries divergentes et aux théorèmes taubériens qui en découlent.

I. Suites numériques

Rappel : suite dans un espace métrique, convergence

I.1. Construction de R et de C

Def : suites de Cauchy
ex : exemple d'une suite de rationnel de Cauchy qui ne converge pas e
Pro : définition de **R**, densité de **Q**
ex : développement dans une base
Pro : définition de **C**, caractérisation convergence des suites.

I.2. Propriétés fondamentales de R (et de suites)

Propriété de la borne supérieur

Pro : Propriété de la borne supérieur.
cor : théorème de la limite monotone
exemple ?

Propriétés des segments emboités

Proposition : Propriété des segments emboités
cor : théorème des suites adjacentes
exemples :

Équivalence des propriétés fondamentales

Remarque 1. Si K est un corps totalement ordonnée les assertions suivantes sont équivalentes :

1. K est archimédien complet ;
2. K vérifie la propriété de la borne supérieur ;
3. K vérifie le théorème de la limite monotone ;
4. K est archimédien et vérifie la propriété des segments emboités ;

5. K est archimédien et vérifie le théorème des suites adjacentes.

I.3. Conséquences pour les fonctions d'une variable réelle

Pro : théorème des valeurs intermédiaires
Pro : théorème des bornes atteintes
rem : la dichotomie permet d'accéder à ses résultats avec une convergence linéaire, problème dépend de la dimension.

II. Convergences des suites réelles et complexes

II.1. Valeurs d'adhérences

définition des valeurs d'adhérences
Théorème de Bolzano-Weierstrass avec aussi le cas divergence vers $\pm\infty$.
cor : caractérisation de la convergence d'une suite
définition des limsup et liminf
Pro : plus grande et plus petite valeurs d'adhérences
cor : caractérisation de la convergence
app : Lemme de Feteke
app : Lemme de Cesaro.

II.2. Relations de comparaisons

Définition des relations de comparaisons
Opérations
Tableau des fonctions usuelles
ex : formule de Stirling
ex : convergence d'Euler.

II.3. Résultats taubérien

Théorème de taubérien d'Hardy
app : Séries de Fourier.
Théorème taubérien d'Hardy-Littlewood
App : Marche aléatoire sur $\mathbf{Z}^d$ **DEV2**
Cor : Théorème taubérien fort de Littlewood
Critère convergence séries de Fourier

III. Suites récurrentes, résolutions d'équations

III.1. Convergence d'une suite récurrente

III.2. Vitesse de convergence

Point fixe attractif

ex : méthode du gradient
rem : accélération de la convergence de Romberg, Galton-Watson.

Point fixe super-attractif

ex : méthode de Newton

Point fixe neutre

ex : Galton-Watson

224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cette leçon est exclusivement consacrée à des exemples : on n'attend aucun exposé systématique sur les notions de développement asymptotique ou d'échelle de comparaison. Une certaine aisance dans la manipulation des relations de comparaison est attendue dans cette leçon. Presque toutes les parties du programme peuvent être mises à contribution : suites définies par une relation de récurrence ou implicitement, estimation asymptotique de sommes partielles ou de restes, fonctions définies par une série ou une intégrale (comportement de la fonction ζ au voisinage de 1 ou du logarithme intégral au voisinage de ∞, méthode de Laplace ou de la phase stationnaire notamment), mais aussi solutions d'équations différentielles dont on peut étudier le comportement à l'infini ou la distribution des zéros. Il ne s'agit pas de présenter un grand nombre d'exemples triviaux, mais quelques exemples significatifs bien choisis et diversifiés, pour lesquels on analysera avec soin les idées essentielles des méthodes utilisées. Pour les candidates et candidats solides voulant aller plus loin, des exemples de méthodes d'accélération de convergence peuvent être présentées.

I. Introduction aux développements asymptotiques

I.1. Relations de comparaisons

définition des relations de comparaisons
Pro : opérations sur les relations de comparaisons

I.2. Échelle de comparaison

Définition
Théorème : Formule de Taylor-Young
Exemples
app : développement asymptotique de suites récurrentes attractive.

I.3. Calcul des développements asymptotiques

Pro : Calcul sur les échelles de comparaisons : sommes, produit, composition
app : application sur des combinaisons d'opérations.
Pro : développement asymptotique de fonctions implicites.

II. Développement asymptotique de sommes et d'intégrales

II.1. Sommation et intégration des relations de comparaisons

II.2. Utilisation des outils de calcul d'intégrales

II.3. Comparaison série-intégrale

III. Développement asymptotique de fonctions définies par une somme ou une intégrale à paramètre

III.1. Utilisation du calcul d'intégrale

III.2. Méthode de Laplace

III.3. Méthode de la phase stationnaire

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

L'intitulé de la leçon permet de se placer dans des contextes variés : $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ voire certains espaces de Banach fonctionnels. En ce qui concerne le cadre réel, on pourra présenter des exemples d'études asymptotiques (si possible autres que $u_{n+1} = \sin(u_n)$) étudier l'itération d'une fonction suffisamment régulière au voisinage d'un point fixe ou encore présenter des exemples de méthodes de résolution approchée d'équations. En ce qui concerne l'étude asymptotique des suites récurrentes, le jury souligne le fait que la mise en œuvre d'une analogie discret-continu permet souvent de faire surgir naturellement la suite auxiliaire adaptée. En se plaçant dans $\mathbf{R}^n$ on peut aborder par exemple l'étude des suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2 ou plus, la convergence en loi de chaînes de Markov à espace d'états fini, l'extension à ce cadre de la méthode de Newton ou plus généralement les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires. Dans le cadre des espaces de Banach, les applications de la méthode des approximations successives ne manquent pas, qu'il s'agisse de la construction de solutions d'équations différentielles, intégrales, ou fonctionnelles.

I. Suites récurrentes : définitions et premiers exemples.

I.1. Présentation

- Définition suites récurrentes
- Indication pour se ramener d'une récurrence d'ordre n à une récurrence d'ordre 1
- Exemple $f(z) = z^2$ résolution explicite. Par contre $f(z) = z^2 + c$ beaucoup plus compliqué, l'ensemble des points c pour lesquelles la suite récurrente de dynamique f et de donnée initiale 0 forme la fractale de Mandelbrot.
- Un autre exemple : suite et ensemble de Cantor [Rouvière ex 53].

I.2. Étude général des suites récurrentes linéaires

- Proposition : forme normale de Jordan
- Cor : description de l'ensemble des solutions
- Exemple de la suite de Fibonnaci

Corollaire 8. Théorème de convergence
Soit $A \in \mathrm{M}_p(\mathbf{C})$. La suite de matrices A^n converge si et seulement si toute valeur propre de A est de module < 1 ou est 1 et si de plus la valeur propre 1 est non défective. Dans ce cas, la limite est la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(A^\top - I)$. De plus la vitesse de convergence est contrôlé par r le module de la deuxième plus grande valeur propre de A i.e.

$$\|A^n - A^\infty\| \leqslant Cr^n.$$

- Application : convergence des chaînes de Markov sur un espace d'états finis (avec Perron-Frobenius en lemme)
- Exemple de la marche aléatoire sur $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$.

II. Convergence des suites récurrentes

II.1. Point fixe

- S'il y a convergence et que f est continue la limite est un point fixe de f.
- Proposition si f croissante suite monotone, si f décroissante suites pairs et impairs monotones.
- Application : convergence Galton-Watson.

II.2. Critère de convergence

- Théorème du point fixe de Banach-Picard.

Exemple 15. Soient $f(x,y) = \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(y), \sin(y)+\cos(x))$ alors quelque soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, la suite récurrente de donnée initiale (x_0, y_0) dynamique f converge vers une valeur indépendante de la donnée initiale ($\simeq 0.70481$). [Personelle]

Application 16. *Cauchy-Lipschitz*
Soit $f : I \times \Omega \to E$ une fonction continue avec I un intervalle ouvert non vide, Ω un ouvert d'un espace de Banach E. On suppose f localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors, il existe alors une unique solution maximale au problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

- Théorème d'inversion local (Rouvière).

II.3. Extension du critère de convergence

- Extension cas limite convexe compact on a un point fixe mais pas nécessairement convergence
- ex : la suite ping-pong
- App : existence mesure invariance chaîne de Markov.

III. Vitesse de convergence

III.1. Point fixe attractif

Proposition 21. (Dieudonné) Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ de classe C^1. On suppose qu'il existe $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$ et $0 \leqslant q < 1$ tels que :

$$\forall x \in B(x_0, r), \quad \|\mathrm{Id} - \mathrm{d}f(x)\| \leqslant q \quad \text{et} \quad |f(x_0)| \leqslant r(1-q).$$

Alors la suite récurrente $x_{n+1} = x_n - f(x_n)$ est bien définie, appartient à $\overline{B}(x_0, r)$ à tout instant et $|x_n - x^*| \leqslant cq^n$ où x^* est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

- Exemple de Rouvière de suites convergeant vers $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.

Application 23. *Méthode de la sécante*
Soit $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1. On définit pour la suite x_n par la récurrence $x_{n+1} = x_n - t\nabla f(x_n)$.

- Si f est strictement convexe coercitive alors f possède un unique minimum x^* vers lequel la suite x_n converge quelque soit la donnée initiale.
- Si l'on suppose qu'il existe $0 < \alpha < \beta < \infty$ tels qu'en tout point les valeurs propres de $\mathrm{D}^2 f(x)$ soit comprises entre α et β ce qui implique les hypothèses précédentes alors avec $t = \frac{1}{\alpha+\beta}$ pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^d$ on a en notant κ le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$;
$$\|x_n - x^*\| \leqslant \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^n \|x_0 - x^*\|.$$

Proposition 24. Sous les hypothèses précédentes pour $d = 1$ et si f est deux fois dérivable, la convergence est exactement géométrique de rapport q *i.e.* il existe une constante $\lambda \neq 0$ tel que $x_n = a + \lambda q^n + o(q^n)$, en fait on a même $x_n = a + \lambda q^n + O(q^{2n})$.

Exemple 25. Soit Z_n un processus de Galton-Watson de loi de reproduction p avec $0 < p_0 \leqslant p_0 + p_1 < 1$. On suppose que p admet une espérance $m < 1$, alors Z_n converge presque sûrement vers 0 et $\mathbf{P}(Z_n > 0) \leqslant m^n$. De plus si p admet un moment d'ordre 2 alors $m^{-n}\mathbf{P}(Z_n > 0)$ converge vers une constante > 0.

Remarque 26. 1. Lorsque f n'est plus C^2 la convergence peut être moindre. Par exemple dans le cas d'un processus de Galton-Watson sous-critique, la convergence est géométrique d'ordre m si et seulement si $\mathbf{E}(X\log^+(X)) < +\infty$.

2. En dimension plus grande est il plus difficile d'établir précisément la vitesse de convergence car cela dépend de la direction prise par la suite lors de sa convergence vers le point critique. Exemple (Rouvière) suite arithmético-géométrique.

III.2. Point fixe super-attractif

Proposition 27. Si $f:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ est de classe C^2 avec $f(x^*)=0$ et $\nabla f(x^*)=0$ il existe un voisinage V de x^* stable par f tel que :

$$\|x_k - x^*\| \leqslant \frac{1}{C}(C|x_0 - x^*|)^{2k}$$

où C désigne le sup de f sur $\overline{V}$. En particulier si x_0 est suffisamment proche de x^*, on a convergence quadratique de x_k vers x^*.

Application 28. *Méthode de Newton*
Soit $f:\Omega\subset\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d$ puis $x_0\in\Omega$. On suppose qu'il existe deux constantes c et m tels que :

1. $|f(x_0)| \leqslant c/2m$;
2. $\forall x,y\in B(x_0,c)$, $\|\mathrm{d}f(x)\| \geqslant 1/m$ et $\|\mathrm{d}f(x)-\mathrm{d}f(y)\| \leqslant 1/(2m)$.

Sous ces hypothèses l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution x^* dans $B(x_0,c)$, la suite $x_{n+1} = x_n - \mathrm{d}f(x_n)^{-1}\cdot f(x_n)$ est à valeurs dans $B(x_0,c)$ et converge vers x^*. De plus si pour tout $x\in B(x_0,c)$, $\|\mathrm{d}^2 f\| \leqslant M$ alors en posant $q=\frac{1}{2}mM$,

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{1}{q}(\|x_0 - x^*\| q)^{2^n}.$$

Exemple 29. *Méthode de Héron*
Pour $f(x) = x^2 - a$ avec $a > 1$ on a en prenant $c = 1/4$ et $x_0 - c > 1$, $|f'(x)| \geqslant 2$ pour tout $x \geqslant x_0 - c$ et $|f'(x) - f'(y)| = 2|x-y| \leqslant 4c = 1$ pour $x,y\in[x_0-c, x_0+c]$. Dès lors le schéma de Newton qui s'écrit alors

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

converge vers la racine carrée de a.

III.3. Point fixe neutre

- Description de la méthode
- Lemme de Cesaro
- Exemple de la suite du sinus
- Exemple du processus de Galton-Watson critique (**DEV2**).

228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Au delà des définitions et premiers théorèmes, le programme offre de nombreuses pistes aux candidates et candidats pour élaborer leur plan : recherche d'extrema, utilisations de la continuité uniforme, fonctions convexes et leur régularité, approximation par des fonctions régulières, utilisations des formules de Taylor, liens entre caractère C^∞ et analycité, etc. Des exemples explicites de fonctions continues et nulle part dérivables, de fonctions continues et croissantes à dérivée nulle presque partout, de fonctions C^∞ à dérivées en un point prescrites, etc. sont les bienvenus dans cette leçon. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la dérivabilité des fonctions monotones ou lipschitziennes ou à celle de l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable, proposer diverses applications du théorème de Baire (continuité d'une limite simple de fonctions continues, points de continuité d'une dérivée, généricité des fonctions nulle part dérivables parmi les fonctions continues ou des fonctions nulle part analytiques parmi les fonctions C^∞, etc.)

Plan

I. Continuité

Continuous-mapping theorem.

I.1. Définition

Définition
Opérations sur les fonctions continues : limite, intégrable, opérations algébriques.

I.2. Continuité uniforme

def : continuité uniforme
Th : théorème de Heine
app : Bernstein, convolution, fonctions en escaliers (définition Riemann).

I.3. Résolution d'équations

Théorème des valeurs intermédiaires
cor : théorème de la bijection
app : définition des fonctions réciproques.

II. Dérivabilité

II.1. Présentation

On introduit la dérivée d'une fonction de la variable réelle, en pensant à donner le point de vue développement limité. On décrit ensuite les opérations algébriques pour finalement faire le lien avec l'intégration dans le théorème fondamental du calcul d'intégrale. Penser aussi, une dérivée est continue sur une partie dense car est limite simple de fonctions continues. Pour terminer on pourra mentionner les dérivées successives avec les formules de Taylor et en application GW.

II.2. Accroissements finis

On commence par l'égalité des accroissements finis qui donne des informations précises qu'on pourra appliquer à la caractérisation des fonctions croissantes. Seulement ce n'est valable que pour les fonctions à valeurs réelles. En corollaire on a l'inégalité de la moyenne qui elle reste valable peut importe l'e.v.n d'arrivée. En conséquence on mettre la dérivabilité des intégrales à paramètres.

II.3. Théorème fondamental de l'analyse

énoncé RUDIN.

II.4. Entre continuité et dérivabilité

Les fonctions dérivables sont en particulier continues mais il y a un monde entre les deux. Avec Baire on peut montrer l'existence de fonctions continues nulles part dérivables, un exemple explicite est la fonction de Tatagi [Gourdon]. Toutefois imposer des contraintes à une fonction peut lui procurer de la régularité. C'est par exemple le cas des fonctions monotones qui sont dérivables presque partout, ce qui est encore vraie pour les fonctions convexes. On s'intéressa à la dérivabilité des fonctions lipschitziennes qui fait l'objet du second développement.

III. Développements aux ordres supérieurs

III.1. Formules de Taylor

Définition des dérivées sucessives Théorème : Formules de Taylor avec toutes les expressions du reste
ex : Moments et fonction caractéristique
Application : théorème central limite
Application : expression du noyau de Peano.
Rem : 1. contre-exemple reste en un point.
2. fonctions non C2 avec un développement limité.

III.2. Développement en série entière

III.3. Application à l'étude asymptotique des suites récurrentes

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Les définitions et premières propriétés liées à ces notions doivent bien sûr être présentées pour pouvoir aborder les questions de limites et de continuité de ces fonctions et leurs caractérisations à l'aide de leurs dérivées. Il convient d'illustrer son exposé par de nombreux dessins. La convexité est une source inépuisable d'inégalités, dans divers domaines y compris les probabilités. Dans ce même domaine, l'étude des fonctions de répartition de variables aléatoires réelles, fonctions croissantes s'il en est, est une piste intéressante. Au delà de la dimension 1, les fonctions convexes définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$ font partie de cette leçon. La recherche de leurs extrema constitue une thématique riche d'exemples. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à des questions de dérivabilité des fonctions monotones, ou de continuité des fonctions convexes définies sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$.

I. Fonctions monotones

I.1. Définition

Définition : fonction croissante, décroissante, monotone sur une partie X.
Pro : une fonction monotone admet des limites à droite et à gauche en tout point.
Cor : l'ensemble des points de discontinuités d'une fonction monotone est dénombrable
théorème de la bijection
app : définition des fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

I.2. Caractérisation différentielle

Proposition : caractérisation par la dérivée de la croissante
cor : caractérisation par la dérivée de la stricte croissance
ex : $x \mapsto x^3$.
Proposition admise : régularité des fonctions monotones.

I.3. Limites de fonctions monotones

exemple : caractérisation de la convergence en loi
pro : passage de la croissance à la limite simple
Deuxième théorème de Dini
ex : Carnet de voyage en analystan
app : théorème de Glivenko-Cantelli
Théorème d'extraction de Helly
app : Théorème de Prokhorof
app : Théorème de Lévy Fort.

II. Fonctions convexes

II.1. Définition et minorante affine

Définition : fonctions convexes
lem : lemme des trois pentes
pro : inégalité des tangentes générale
app : Galton-Watson [**DEV1**]
cor : caractérisation des fonctions convexes comme sup de fonctions affines
app : Inégalité de Jensen.

II.2. Caractérisation différentielle

pro : caractérisation d'ordre 1
cor : caractérisation d'ordre 2
app : fonctions convexes usuelles.

II.3. Inégalités de convexité

Référence : Gourdon
app : Inégalité de ?? et intervalle de confiance.

III. Extensions à plusieurs variables

III.1. Fonctions monotones et convexes

III.2. Optimisation des fonctions convexes

III.3. Algorithme du gradient

Algorithme du gradient à pas constant. [**DEV2**]

230 : Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Dans cette leçon, il faut se garder de proposer un interminable catalogue de propriétés et de "règles" illustrées de quelques rares exemples triviaux (Riemann, Bertrand). Mieux vaut se limiter à quelques résultats fondamentaux bien choisis et mis en perspective, et accompagnés de quelques exemples significatifs. Plutôt que de se limiter à la seule étude de la convergence de séries, les candidats pourront par exemple s'intéresser à l'estimation de sommes partielles (pour laquelle la comparaison entre somme et intégrale, en présence ou non de monotonie, est un outil particulièrement efficace), à l'étude asymptotique de suites récurrentes (si possible autres que $u_{n+1} = \sin(u_n)$ ou encore à l'itération d'une fonction régulière au voisinage d'un point fixe. L'utilisation de séries entières ou de séries de Fourier pour calculer la somme de certaines séries, le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète fournissent également de riches thèmes d'étude. Les candidats solides pourront s'intéresser aux procédés de sommation des séries divergentes (qui interviennent naturellement dans la théorie des séries de Fourier, entre autres) ainsi qu'aux théorèmes taubériens qui s'y rapportent.

I. Sommation des suites numériques

I.1. Séries numériques

Définition d'une série numérique = sommes partielles
ex : série géométrique, série arithmétique
Définition : convergence, convergence absolue, semi-convergence.
ex : convergence absolue ou semi-convergence de la série géométrique
Th : théorème de réarrangement de Riemann v.s. invariance commutative pour l'autre.
exemple : espérance d'une loi discrète.

I.2. Comparaison série intégrale

Proposition 1. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction décroissance. Alors,

$$\int_0^n f(t)\mathrm{d}t + f(0) \leqslant \sum_{k=0}^n f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\mathrm{d}t + f(n).$$

En particulier $\sum f(k)$ à la même nature que $\int_0^{+\infty} f$. De plus $\sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ converge vers une constante.

ex : Série harmonique
rem : on a un énoncé alternatif pour f croissante.
Lemme de comparaison dans le cas C^1.
Pro : Formule de Taylor-MacLaurin à l'ordre 1
application du Rouvière.
Th : Formule de Taylor-MacLaurin, application au développement complet de Stirling.

I.3. Critères de convergences des séries par comparaison

Lemme de comparaison (Gourdon ?)
Critères de d'Alembert, Raabe-Duhamel, Bertrand.
exemples.

II. Estimations des sommes partielles

II.1. Sommation des relations de comparaisons

Proposition : sommations des relations de comparaisons (Dieudonné)
app : GW [**DEV1**].

II.2. Intégration par parties

Lemme : transformation d'Abel (deux expressions)
Pro : critère d'Abel (Gourdon)
app : en particulier séries alternés.

III. Méthodes de calcul

III.1. Série entière

théorème d'Abel
théorème taubérien d'Hardy-Littlewood

III.2. Série de Fourier

Théorème de Jordan-Dirichlet
app : calcul des $\zeta(2k)$
autres ?

III.3. Théorème des résidus

Proposition 2. Soit f une fraction rationnelle de degré $\leqslant -2$ de pôles $a_1, \cdots, a_p \notin \mathbf{Z}$ alors la série de terme général $f(n)$ indexé sur $\mathbf{Z}$ converge au sens de Cauchy et,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\sum_{k=1}^{p} \pi \mathrm{Res}(f(z)\mathrm{cotan}(\pi z), a_j).$$

Exemple 3. Pour tout complexe a non entier on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi a}\right)^2.$$

Exemple 4. Pour tout réel$a > 0$ on a,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a.$$

234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

Cette leçon est orientée vers l'étude et l'utilisation des espaces L1 (voire L^p) associés à la mesure de Lebesgue (supposée construite) sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$ voire à d'autres mesures. Les grands théorèmes de la théorie (permutations limite-intégrale, Fubini, etc.) sont évidemment incontournables et la proposition systématique d'exemples d'application significatifs doit enrichir ce déroulé. Le thème de l'approximation (approximation des fonctions intégrables par des fonctions continues à support compact, utilisation de la convolution) fournit de nombreuses applications, ainsi que celui de l'analyse de Fourier sur le cercle ou la droite réelle. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la transformée de Fourier sur L^2, la dualité entre L^p les liens entre intégration et dérivation, les procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, l'algèbre de convolution L^1, l'étude des parties compactes de L^p, etc...

IV. Espaces de Lebesgue

Référence : [HL99]

.1. Rappels concernant l'intégration de Lebesgue

On pourra recopier le Brézis... On pourra ajouter le théorème de Vitalli.

.2. Construction des espaces L^p

Définition 1. Soit (X,μ) un espace mesurée. Pour $1 \leqslant p < \infty$ on note $\mathscr{L}^p(X,\mu,\mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions $f:(X,\mu) \to \mathbf{K}$ mesurables telles que $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} < \infty$. On note $\mathscr{L}^\infty(X,\mu,\mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions $f:(X,\mu) \to \mathbf{K}$ mesurables telles qu'il existe un réel $M > 0$ tel que μ-presque partout $|f| \leqslant M$ et on pose $\|f\|_\infty$ la borne inférieur sur l'ensemble des réels M vérifiant la propriété précédente.

Proposition 2. Soit $p \in [1,\infty]$, on appelle exposant conjugué de p l'unique $p' \in [1,\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ avec la convention $1/\infty = 0$. Si $f \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ et $g \in \mathscr{L}^{p'}(X,\mu)$ alors $fg \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ et $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

Corollaire 3. Soient $f,g \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ avec $p \in [1,\infty]$ alors $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Définition 4. On définit l'espace $L^p(X,\mu,\mathbf{K})$ comme le quotient de $\mathscr{L}^p(X,\mu,\mathbf{K})$ par la relation d'équivalence : $f \sim g \Leftrightarrow \mu$-p.p $f = g$. L'application $\|\cdot\|_p$ est constante sur les classes d'équivalences et définit donc une application sur $L^p(X,\mu,\mathbf{K})$ qui est une norme.

Remarque 5. En particulier pour $p = 2$ la norme découle du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \int_X f\overline{g}\mathrm{d}\mu$.

Dans le langage on ne distinguera pas une fonction $\mathscr{L}^p$ de sa classe d'équivalence L^p et laissons cette distinction à l'état de sous-entendu.

Proposition 6 (Brézis)**.** Si $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ avec $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ alors pour tout $r \in [p,q]$, $f \in L^r(\mu)$ et $\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$ avec $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

.3. Propriétés des espaces L^p

Proposition : Densité des fonctions étagées
cor : séparabilité
Pro : Complétude avec lemme extraction sous-suite
app : Coefficients de Fourier
Pro : théorème de dualité
app : Riesz-Thorin et exemples
cor : réflexivité.

I. Densité des fonctions régulières

I.1. Convolution

Définition 7. Soient $f, g : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ mesurables. On dit que f et g sont convoluables en x lorsque la quantité :

$$\int_{\mathbf{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y < +\infty.$$

Dans ce cas on définit la convoluée de f par g en x comme :

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

Propriétés élémentaires
Inégalité de Hausdorff-Young [HL99].

Application 10. Soit $u(t,x)$ la solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}^d$ pour la donnée initiale $u_0 \in L^p$. Pour tout $p \leqslant q \leqslant +\infty$ il existe une constante C tel que pour tout $t > 0$

$$\|u(t,x)\|_{L^q} \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\|u_0\|_{L^p}.$$

I.2. Approximation de l'unité

Référence : Briane-Pagès
Définition : approximation de l'unité
Lem : continuité des translations

Théorème 14. (Briane-Pagès) Soit ρ_n une approximation de l'unité et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$.

1. Pour $1 \leqslant p < \infty$ on a $f * \rho_n$ converge vers f dans $L^p(\mathbf{R}^d)$;
2. Pour $p = \infty$ si f est uniformément continue sur K alors $f * \rho_n$ converge uniformément vers f sur K.

cor : résultats de densité
app : Riemann-Lebesgue

I.3. Critère de compacité forte

Référence : Brézis.
Rappel : théorème d'Ascoli
th : théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

Application 19. Toute partie bornée de $W^{1,1}(\mathbf{R})$ est de restriction relativement compacte sur $L^p(I)$ où I est un intervalle bornée pour tout $1 \leqslant p < \infty$.

II. Espaces de Sobolev

Référence : Brézis

II.1. Dérivation faible

Définition : dérivation faible, espaces de Sobolev
pro : Théorème d'intégration
lem : dérivée distributionnelle nulle = constante
Cor : Définition des traces et inégalité de Poincaré.

II.2. Propriétés des espaces de Sobolev

Définition des espaces de Sobolev
Propriétés des espaces de Sobolev : complétude, réflexivité, injections de Sobolev

II.3. Application à la résolution de problèmes aux limites

Pro : Problème de Sturm-Liouville, base hilbertienne [Bre10]
Pro : Résolution d'un problème aux limites [**DEV2**].

235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse

L'intitulé de cette leçon a été volontairement élargi afin de permettre explicitement aux candidats d'aborder des problèmes plus diversités de permutations de symboles, qu'il s'agisse de limites, d'intégrales, de dérivées, d'espérances. Le choix est large ! Les candidats pourront également inclure dans leur leçon des exemples de permutations de quantificateurs, obtenus par des arguments de compacité ou (pour les candidats aguerris) utilisant le théorème de Baire. Dans tous les cas, on évitera de présenter un catalogue désincarné d'énoncés, en privilégiant les exemples et applications significatifs.

III. Interversion de limites

III.1. Théorème de la double limite

Proposition 20. Soit X, Y deux espaces topologiques et E un espace métrique complet. On se donne $f : A \times B \subset X \times Y \to E$ puis $(a, b) \in \overline{A} \times \overline{B}$ tels que :

1. $f(x, \cdot)$ converge uniformément lorsque $x \to a$;
2. $f(\cdot, y)$ converge simplement lorsque $y \to b$.

Dans ce cas f possède une limite en (a, b) et :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y).$$

Exemple 21.
1. (Hauchecorne) Contre-exemple dans le cas d'une convergence pas uniforme $f_n(x) = x^n$ et limite en 1.
2. Contre-exemple dans le cas où l'espace d'arrivé n'est pas complet ?
3. $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ alors $\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 22. Théorème d'Abel.

Corollaire 23. Théorème de la limite.

Application 24.
1. Calculer les valeurs de log
2. Calcul de arctan.
3. Calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$.

III.2. Application à la continuité et la dérivabilité de la limite

Continuité de la limite

Proposition 25 (Gourdon)**.** Soient E et F deux espaces métriques puis $f_n : E \to F$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers f. Si les f_n sont continues en a, alors f est continue en a.

Exemple 26.
1. Encore $x \mapsto x^n$.
2. La fonction ζ est continue.
3. La fonction $\Theta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n^2}$ est continue sur $\mathscr{D}(0, 1)$.
4. Si f est une fonction continue par morceaux, la série de Fourier de f ne converge pas uniformément au voisinage des discontinuités de f [Phénomène de Gibbs].
5. (Hauchecorne) La série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+$ vers une fonction continue mais pas uniformément.

Remarque 27. Pour ces deux énoncés on vérifie en pratique la convergence sur un voisinage du point en question.

Dérivabilité de la limite

Proposition 28 (Gourdon)**.** Soit $f_n : [a,b] \to F$ une suite de fonctions dérivables tel que :

1. f_n' converge uniformément vers g,
2. f_n converge en un point x_1 vers b.

Alors f_n converge uniformément vers une fonction f dérivable de dérivée g. Si les f_n sont C^1 alors f également.

Exemple 29. 1. (Hauchecorne) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ les fonctions sont C^1 mais $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0 par ce que $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1/n}}$ ne converge pas uniformément au voisinage de 0.

Application 30 (Développement). Pour tout $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$ il existe une unique fonction $u \in C_{2\pi,x}(\mathbf{R}_t^{\geqslant 0} \times \mathbf{R}_x)$ une fois dérivable en temps et deux fois en espace de dérivées continues solution de l'équation de la chaleur $\partial_t u = \partial_{xx}^2 u$ pour tout $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbf{R}$ avec la donnée initiale $u_{|t=0} = f$.

Proposition 31. Soient Ω un ouvert connexe d'un e.v.n E puis $f_n : \Omega \to F$ une suite d'applications différentiables à valeurs dans un Banach F. On suppose que :

- $\mathrm{d}f_n$ converge uniformément vers une fonction g ;
- f_n converge un point de Ω ;

alors f_n converge uniformément sur Ω vers une fonction f différentiable de différentielle g. Si de plus les f_n sont C^1 alors f est C^1.

Exemple 32. 1. Exponentielle sur les matrices.

Remarque 33. On peut généraliser ces résultats à des dérivées successives.

Holomorphie de la limite

Théorème 34 (Weierstrass)**.** (Rudin ?)

Application 35. ??

IV. Interversion limite-intégrale

IV.1. Théorème d'interversions dans l'intégrale de Lebesgue

Proposition 36. Mettre en un convergence monotone et convergence dominée.

Applications spécifiques convergence monotone ?

Exemple 37. 1. $\mathbf{1}_{[n,n+1]}$ fuite.

2. Application à la formule de Gauss pour Γ.

Corollaire 38. Interversion somme-intégrale.

Application 39. Un petit calcul ?

Théorème 40. Vitalli

Application 41. Théorème de convergence L^p des sous-martingales.

IV.2. Application aux intégrales à paramètres

Continuité

Proposition 42 (Briane-Pagès)**.** Soit Λ un espace métrique puis $f : X \times \Lambda \to \mathbf{R}$ tel que :

1. pour tout $\lambda \in \Lambda$, $x \mapsto f(x,\lambda)$ est mesurable ;
2. Pour μ-presque toux x, $\lambda \mapsto f(x,\lambda)$ est continue en λ ;
3. il existe g intégrable positive tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $|f(x,\lambda)| \leqslant g(x)$ μ-p.p.

Alors la fonction $F(\lambda) = \int_X f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ est définie en tout point de Λ et continue en λ_0.

Exemple 43. Transformée de Fourier.

Dérivabilité

Proposition 44 (Briane-Pagès). Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ puis $f : I \times X \to \mathbf{R}$ tel que :

1. pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot)$ est intégrable ;
2. pour μ-presque tous x, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable en t_0 ;
3. il existe g positive intégrable tel que pour tout $t \in I$, $|f(t,x) - f(t_0,x)| \leqslant g(x)|t - t_0|$ μ-p.p.

Alors $F(t) = \int_X f(t,x)\mathrm{d}x$ est définie en tout point de u et est dérivable en t_0 de dérivée $F'(t_0) = \int_X \partial_t f(t_0,x)\mathrm{d}x$. En particulier les deux dernières hypothèses sont vérifiés dès que $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable μ-p.p. en tout point de I et $|\partial_t f(t,x)| \leqslant g(x)$ avec g positive intégrable.

Exemple 45. Transformée de Fourier. Moments d'une variable aléatoire. Avoir un exemple de calcul de moments par exemple gaussienne.

Holomorphie

Proposition 46.

Exemple 47. Fonction Γ. (à voir dans le rudin)

V. Interversion d'intégrales

V.1. Théorème de Fubini

Proposition 48. Théorème de Fubini avec les deux hypothèses. [Briane-Pagès ou Rudin]

Application 49. Pour la convolution (voir Rudin).

Corollaire 50. Interversion somme-intégrale.

V.2. Formule d'inversion de Fourier

Définition 51. Classe de Schwartz et ses propriétés de stabilité. [à voir]

Proposition 52. Formule sommatoire de Poisson. [Gourdon]

Exemple 53. Avec les exponentielles, équivalent Jacobi. [Gourdon p.269]

Corollaire 54. Formule d'inversion de Fourier.

236 : Calcul d’intégrales

Les exemples proposés par les candidates et candidats doivent mettre en oeuvre des techniques diversifiées : méthodes élémentaires, intégrales dépendant d’un paramêtre, utilisation de la formule des résidus, de sommes de Riemann, voire de la transformée de Fourier dans L^1 ou L^2. Il est attendu par le jury quelques exemples significatifs de calculs d’intégrales multiples (utilisation du théorème de Fubini, de changements de variables, etc.). Les résultats d’analyse ou de théorie des probabilités dont la preuve utilise crucialement un calcul spécifique d’intégrale, (à pur titre indicatif, celle du théorème d’inversion de Fourier basée sur la transformée de Fourier d’une gaussienne) peuvent constituer de bonnes sources de développements. Il est enfin possible de proposer une ou deux méthodes pertinentes de calcul approché d’intégrales.

Plan

I. Intégrales d’une variable réelle

I.1. Sommes de Riemann

Référence : Gourdon

- Sommes de Riemann
- Ex : p.183 Gourdon
- rem : il est toutefois assez rare de pouvoir ainsi calculer une intégrale

I.2. Théorème fondamental de l’analyse

Référence : Gourdon

- Théorème fondamentale de l’analyse
- Exemples...

I.3. Formule d’intégration par parties

Référence : Gourdon

- Proposition : intégration par parties
- Exemple : intégrales de Wallis
- application aux équivalents d’intégrales

II. Intégrale d'une variable complexe

II.1. Intégrale de chemin

Référence : Candelberger

- Définition de l'intégrale
- Théorème de résidus pour les fonctions méromorphes
- app : compte du nombre de zéros d'une équation holomorphe

II.2. Application au calcul d'intégrales d'une variable réelle

Référence : Queffelec analyse complexe

Un exemple : la formule des compléments

Tout est dit

Intégrales de fractions rationnelles

Technique générale intégrer sur un demi-disque

Transformée de Fourier de fractions rationnelles

Technique générale intégrer sur un demi-disque à bien choisir suivant la phase

III. Intégrales de plusieurs variables

III.1. Sommation par tranche

Référence : Candelberger

- Théorème de Fubini
- Exemple Gourdon, exemple volume de la sphère

III.2. Changement de variables

Référence : Candelberger

- Théorème du changement de variable
- rem en dimension 1
- exemple changement de variables en coordonnées polaire et calcul de l'intégrale de Gauss

III.3. Formule de Stokes et conséquences

Rem : Il existe une généralisation du théorème fondamental de l'analyse aux intégrales multiples, la formule de Stokes. On peut en déduire la formule d'intégration par parties et d'autres résultats de calcul utiles d'intégrales à plusieurs variables.

IV. Intégrale à paramètre

IV.1. Limite sous l'intégrale

Référence : Candelberger

- Théorème de convergence dominée
- application au calcul d'intégrale par approximation (ex : intégrale de Gauss)
- Développement autour de la fonction Gamma

IV.2. Opérations sur les intégrales à paramètres

Référence : Candelberger

- Continuité, dérivation, holomorphie
- Application au calcul d'intégrale par relaxation (ex : intégrale de Gauss et autres par Gourdon)

IV.3. Équivalents d'intégrales à paramètres

Pas de ref

- Lemme de Morse
- Méthode de Laplace
- exemples Gourdon
- Méthode de la phase stationnaire
- l'unique exemple Gourdon
- rem : méthode du col

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre

Le programme fournit aux candidates et candidats de multiples pistes pour élaborer leur plan à commencer par les théorèmes de régularité usuels (allant jusqu'à inclure pour les plus solides celui d'holomorphie sous le signe somme). Ces résultats doivent être présentés dans un ordre rationnel et illustrés par des exemples et contre-exemples significatifs. Convolutions et transformées de Fourier font naturellement partie de ces exemples, les candidates et candidats peuvent également s'intéresser aux fonctions caractéristiques en théorie des probabilités, à la transformée de Laplace ou à certaines fonctions "spéciales" définies par une intégrale. Les techniques d'études asymptotiques de fonctions définies par des intégrales font partie intégrante de cette leçon.

Plan

I. Opérations analytiques sur les intégrales à paramètres

I.1. Passage à la limite sous l'intégrale

Référence : Briane-Pagès
Théorème de convergence dominée
app : Formule fonction Gamma
cor : théorème de continuité sous l'intégrale
exemples.

I.2. Dérivabilité

Pro : Théorème de dérivation sous l'intégrale
exemples
Pro : Théorème d'holomorphie sous l'intégrale
exemples.

I.3. Comportement asymptotique

Méthode de Laplace
app : équivalent Stirling
Méthode de la phase stationnaire
exemples ?

II. Premier exemple : le procédé de convolution

II.1. Définition et propriétés

Définition 1. Soient $f, g : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ mesurables. On dit que f et g sont convoluables en x lorsque la quantité :

$$\int_{\mathbf{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y < +\infty.$$

Dans ce cas on définit la convoluée de f par g en x comme :

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

Propriétés élémentaires
app : Solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}$
Inégalité de Hausdorff-Young [HL99]

Application 2. Soit $u(t,x)$ la solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}^d$ pour la donnée initiale $u_0 \in L^p$. Pour tout $p \leqslant q \leqslant +\infty$ il existe une constante C tel que pour tout $t > 0$

$$\|u(t,x)\|_{L^q} \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \|u_0\|_{L^p}.$$

II.2. Régularisation par convolution

Référence : Briane-Pagès
Définition : approximation de l'unité
Lem : continuité des translations

Théorème 6. (Briane-Pagès) Soit ρ_n une approximation de l'unité et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$.

1. Pour $1 \leqslant p < \infty$ on a $f * \rho_n$ converge vers f dans $L^p(\mathbf{R}^d)$;
2. Pour $p = \infty$ si f est uniformément continue sur K alors $f * \rho_n$ converge uniformément vers f sur K.

cor : résultats de densité
app : Riemann-Lebesgue cor : théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

Application 12. Toute partie bornée de $W^{1,1}(\mathbf{R})$ est de restriction relativement compacte sur $L^p(I)$ où I est un intervalle bornée pour tout $1 \leqslant p < \infty$.

II.3. Convolution des fonctions périodiques

définition : convolution périodique
Pro : Comportement avec Fourier
cor : Noyau de Dirichlet
Th : théorème de Féjèr
cor : critère de convergence des séries de Fourier
Pro : Vitesse de convergence Féjèr
Th : théorème de Jackson et réciproque.

III. Deuxième exemple : la transformée de Fourier

III.1. Définition et propriétés

Définition
exemples
Propriétés : dérivation, lien avec la convolution, etc...
Th : formule d'inversion de Fourier
app : exemples de résolutions d'EDP par Fourier El-Amrani

III.2. Aspects fonctionnelles

def : classe de Schwartz
Pro : stabilité de la classe de Schwartz par Fourier. Pro : Plancherel et prolongement
app : inégalité de Heisenberg
Th : inégalités de Hausdorff-Young
app : analyse de Fourier de l'équation de la chaleur.

III.3. Extension aux mesures

Def : transformée de Fourier d'une mesure de probabilité
Pro : récupération des moments
app : mesure définie par ses moments
Pro : Injectivité et formule d'inversion
cor : Théorème de Lévy faible
app : théorème central limite.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

L'étude des différentes modes de convergence et leur utilisation ne doit pas donner lieu à un catalogue formel de théorèmes, mais être illustrée par des exemples significatifs et diversifiés. Les fonctions "spéciales" définies par une série sont légion et fournissent aux candidats de multiples possibilités, sans éluder le champ complexe qui leur confère souvent leur pleine signification. Des exemples de sommes de séries continues nulle part dérivables, ou croissantes non constantes et à dérivée nulle presque partout pourront également être proposés. Les candidats peuvent bien sûr aborder les séries entières (qui ont des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques intéressantes), les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ou les séries de Fourier. Ils préféreront dans ce cas en présenter quelques applications significatives plutôt qu'un cours formel. Les candidats solides pourront aborder l'étude des séries de variables aléatoires indépendantes, la formule sommatoire de Poisson et ses applications aux fonctions spéciales (fonction θ de Jacobi, etc.), la théorie des séries de Dirichlet et ses utilisations en théorie des nombres.

Plan

I. Convergence des suites de fonctions

I.1. Convergence simple

- Convergence simple et convergence p.p
- ex : $x \mapsto x^n$ discontinue
- Pour les séries de fonctions la convergence absolue entraine la convergence simple, réciproque fausse
- rem sur la régularité de la limite : Baire et mesurable.

I.2. Convergence uniforme

- Convergence uniforme
- Exemple du gourdon avec calcul sup.
- Critère de Cauchy
- Convergence normale des séries
- ex : convergence uniforme pas normale (Carnet de Voyage en Analystan).
- Pro : continuité de la limite
- rem : ce n'est toutefois pas une hypothèse nécessaire

I.3. Passer de la convergence simple et convergence uniforme

Les théorèmes de Dini

- Pro : Les théorèmes de Dini
- ex : exemple Gourdon
- app : Glivenko-Cantelli

Utilisation du théorème de Heine dans les procédés d'approximations

- Rappels Heine
- Exemple Bernstein
- Exemple Féjèr

Equicontinuité

- Définition équicontinuité
- Convergence simple + équicontinuité entraine convergence uniforme sur un compact. En fait c'est une équivalence.

II. Opérations sur les suites de fonctions

II.1. Limite de la limite

- Théorème d'échange des limites
- Corollaire : dérivation de la limite

II.2. Intégration de la limite

- Convergence dominée
- ex sur la fonction Gamma
- rem : théorème de Vitalli

II.3. Extraction

Lem : extraction diagonale
ex : extraction de Helly
Pro : résultat d'extraction
Cor : Ascoliiii
exemples Ascoli

III. Exemples de fonctions définies comme limite

III.1. Séries entières

- Définition et convergence
- Exemples
- Application à des problèmes de dénombrement
- Théorème de Hardy-Littlewood et marche aléatoire [**DEV1**]

III.2. Séries de Fourier

- Définition
- Résultats de convergence
- app : Résolution de l'équation de la chaleur [**DEV2**]

III.3. Solutions d'équations différentielle

- Théorème de Cauchy-Lipschitz
- Théorème de Cauchy-Peano

III.4. Fonctions bizarres

1. Fonction de Takagi (Gourdon ou Zully-Queffelec)
2. rem : Rademacher

243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut se garder de présenter un interminable catalogue de définitions, règles et propriétés accompagnées de quelques rares exemples triviaux. Le problème du domaine de convergence devra bien sûr être abordé, ainsi que celui des différents modes de convergence. Les liens avec l'holomorphie doivent être connus et compris. En particulier, peu de candidats ont les idées claires sur les liens entre analycité et holomorphie. Or, l'existence de nombreux développements en série entière peut être établie de manière immédiate par cet argument, avec en prime une information sur le rayon de convergence, voire sur l'ordre de grandeur des coefficients. Le théorème radial (ou non tangentiel) d'Abel est souvent proposé comme développement, mais de nombreux candidats pensent qu'il s'agit d'un théorème de prolongement, alors qu'il s'agit en réalité d'un résultat de continuité. En proposer comme application le calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. n'est pas absolument pertinent, ce résultat pouvant être obtenu par un argument beaucoup plus direct. En réalité, ce théorème débouche naturellement sur la question plus générale des procédés de sommation des séries divergentes. Les séries entières ont également des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques très intéressantes. Les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ont également toute leur place dans cette leçon. Les candidats solides pourront s'intéresser aux théorèmes taubériens relatifs aux séries entières, au problème du prolongement analytique de la somme d'une série entière, aux séries entières aléatoires ou encore aux fonctions C^∞ nulle part analytiques.

I. Séries entières

Définition formel d'une série entière.

I.1. Définitions

Définition : rayon de convergence
Pro : Formule d'Hadamard
exemples de calculs de rayon de convergence
Pro : Convergence sur le disque de convergence
ex : $\frac{1}{1-z}$
Opérations sur la somme :

- somme ;
- produit ;
- composition ;
- inverse ;
- et même fonctions implicites !

I.2. Propriétés de la somme

Référence : [Gou21]
Dérivation au sens complexe : exemple $\frac{1}{(1-z)^k}$
cor : récupération des coefficients
Intégration : exemple log
Corollaire : estimations de Cauchy
Principe des zéros isolés
app : loi définie par ses moments **DEV1**

I.3. Fonctions analytiques

définition : fonctions analytiques
Théorème : Équivalence entre fonctions holomorphes et analytique.
cor : Information sur le rayon de convergence.
ex : fonction tangente Bolley.

II. Exemples de fonctions définies par une série entière

II.1. Développement d'une fonction en série entière

Proposition : caractérisation des fonctions développables en série entière par leur reste de Taylor
ex : développement de $(1+x)^\alpha$.
exemple d'une fonction C^∞ non analytique : e^{-1/x^2}.

II.2. Solutions d'équations différentielles

Exemple 22. 1. $\exp(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ de rayon de convergence $+\infty$ est l'unique solution de $f' = f$, $f(0) = 0$.

2. $\cos(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ de rayon de convergence $+\infty$ est l'unique solution de $f'' = f$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

3. $\sin(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ de rayon de convergence $+\infty$ est l'unique solution de $f'' = f$, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Ex : fonctions de Bessel (Analystan).

II.3. Fonction génératrice

Def : fonction génératrice.
ex : définition des nombres de Bernoulli par leur série génératrice.
ex : fonction génératrice des probabilités
app : Processus de Galton-Watson
Application à l'étude de problèmes de combinatoire.

- Nombres de Bell
- Nombres de Catalan
- Série entière dimension 1.

Utilisation des estimations de Cauchy.
Exemple : partition d'un entier Oraux X-ENS.

III. Étude sur le bord du disque de convergence

III.1. Le cercle d'incertitude

Définition des points sur le disque de convergence
Pro : Sur le disque de convergence il y a au moins un point singulier
ex : Nombres de Bernoulli

III.2. Continuité sur le bord du disque

Théorème d'Abel
Exemples : log et arctan.
Application de Zully-Queffelec calcul $\sum \frac{\sin n}{n}$.
Pro : sommations des équivalents
exemples Gourdon.

III.3. Séries entières à coefficients positifs

Pro : séries entières à coefficients positifs, 1 est un singulier
Théorème taubérien d'Hardy-Littlewood
App : Marche aléatoire sur $\mathbf{Z}^d$ **DEV2**
Cor : Théorème taubérien fort de Littlewood
Critère convergence séries de Fourier

245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C

IV. Étude local des fonctions holomorphes

IV.1. Fonctions holomorphes

- Définition des fonctions holomorphes
- Lien avec le calcul différentielle : une fonction est holomorphe ssi vu comme une fonction de deux variable elle est différentiable et sa différentielle est une similitude ssi différentiable et vérifie les équations de Cauchy-Riemann
- rem : interprétation géométrique les similitudes étant les transformations qui préservent les angles
- Opérations élémentaires : sommes, produits, composée, inverse lorsque ne s'annule pas
- Exemples de fonctions holomorphes : polynômes, séries entières $\sin, \cos, \exp$, intégrale à paramètre Γ (sans les bonnes hypothèses)

IV.2. Théorie de Cauchy locale

Référence : Rudin

- Rappel intégrale contre un chemin
- Lemme de Goursat : existence d'une primitive locale
- Proposition : Intégration des fonctions holomorphes sur un ouvert étoilé
- Cor : Formule de Cauchy locale
- Th : Développable en série entière avec information sur le rayon de convergence

IV.3. Conséquences de la formule de Cauchy

Référence : Rudin

1. La dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe : théorème de Morera en réciproque à Cauchy et app : théorème de Weierstrass
2. Estimations de Cauchy contrôle de la dérivée avec la fonction : revenir sur l'hypothèse dans le théorème d'intégration cor : fonction holomorphe borné = constante, app : d'Alembert-Gauss
3. Principe des zéros isolés, corollaire : principe du maximum sur lequel on reviendra, app : analycité fonction caractéristique

V. Extension des résultats précédents

V.1. Formule de Cauchy globale

Référence : Rudin

1. Rappels cycles et intégrales contre un cycle
2. Indice d'un point par rapport à un cycle
3. Théorème de Cauchy globale
4. rem : interprétation de l'indice

V.2. Fonctions méromorphes et théorème des résidus

Référence : Rudin

1. Définition fonctions méromorphes
2. Théorème des résidus
3. cor : compteur logarithmique
4. app : Deuxième théorème de Gershgorin (**DEV1**)

Définition 36. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Une fonction méromorphe sur U est une application f définie sur U sauf éventuellement en certains points qui forment un ensemble discret A tel que tout $a \in A$ il existe des coefficients $c_1, \cdots, c_n$ tels que :

$$f(z) - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(z-a)^i}$$

soit prolongeable par continuité en a.

Remarque 37. 1. Sur un ouvert connexe on peut montrer que les fonctions méromorphes sont exactement les quotients de fonctions holomorphes

2. Si la condition en a n'est pas vérifié on peut montrer que pour tout $r > 0$ l'image par f de $D(a,r)$ est dense dans $\mathbf{C}$, on dit qu'on a une singularité essentielle en a.

V.3. Application au calcul d'intégrales

VI. Extension des fonctions holomorphes

VI.1. Fonctions harmoniques

- Définition différentielle des fonctions harmoniques
- Proposition : caractérisation local des fonctions holomorphes. En particulier les fonctions holomorphes sont harmoniques
- Rem : on perd la stabilité par produit, mais on a si f ne s'annule pas alors $\log|f|$ harmonique

VI.2. Représentation local

Référence : Rudin ?

- Théorème de représentation de Poisson
- Corollaire : formule de la moyenne
- app : formule de Jensen
- Proposition : la formule de la moyenne caractérise les fonctions harmoniques

VI.3. Principe du maximum

- Si f a un maximum sur un ouvert alors constante...
- Proposition : le bon principe du maximum pour borné
- rem : réciproque du principe du maximum
- Extension à un ouvert non borné : principe pondérer la fonction pour la contrôler à l'infini et se ramener à un ouvert borné
- Exemple : trois droites d'Hadamard
- App : Riesz-Thorin

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la théorie L^2 est incontournable, et son interprétation en terme d'isométrie doit être mise en évidence. Les candidats doivent pouvoir écrire l'identité de Parseval pour exprimer le produit scalaire de deux fonctions de $L^2(T)$. En ce qui concerne la convergence simple, ou uniforme ou en norme L^p au sens de Cesàro, les propriétés cruciales des noyaux utilisés devront être clairement explicitées. Un autre thème important est le lien entre régularité de la fonction et vitesse de convergence vers 0 de ses coefficients de Fourier. Il est important d'illustrer cette leçon de quelques unes des innombrables applications des séries de Fourier : calculs de sommes de séries, équations aux dérivées partielles (équation de la chaleur, problème de Dirichlet sur le disque unité, etc.), inégalité de Bernstein, formule sommatoire de Poisson et ses applications, inégalité isopérimétrique, etc. Les candidats solides pourront s'intéresser à la divergence des séries de Fourier dans divers contextes, soit en exhibant des contre-exemples, soit en utilisant la théorie de Baire. Mais aussi aux procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, aux séries de Fourier lacunaires, à l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, la convergence de la série de Fourier d'une fonction α-höldérienne si $\alpha > 1/2$ etc.

VII. Définition des séries de Fourier

VII.1. Approximation trigonométrique

- Théorème de Weierstrass trigonométrique en norme $\|\cdot\|_\infty$ mais aussi L^p.
- app : critère de Weyl
- rem : exemple constructif pour Fejèr

VII.2. Séries de Fourier

- Lemme d'orthogonalité
- Définition des coefficients de Fourier et des séries de Fourier
- Proposition : meilleur approximation au sens L^2, convergence
- Corollaire : critère de convergence normale
- ex : théorème de Bernstein
- App : équation de la chaleur périodique

VII.3. Décroissance, régularité et vitesse de convergence

1. L'équivalence $u \in H^k$ et coefficients de Fourier
2. Corollaire : vitesse de convergence
3. rem : résultat sur la vitesse de convergence pas optimal

VIII. Étude analytique de la convergence des séries de Fourier

VIII.1. Convolution

1. Propriété de convolution
2. Noyau de Dirichlet

VIII.2. Critère de convergence

1. Lemme de Riemann-Lebesgue
2. Test de Dini
3. Jordan-Dirichlet en mode localement à variation bornée
4. Application au calcul de sommes

VIII.3. Théorème de Féjèr et conséquences

1. Théorème de Féjèr
2. Conséquence : s'il y a convergence c'est vers la fonction
3. Théorème taubérien de Hardy
4. app : convergence des séries de Fourier en $O(1/n)$.

IX. Analyse fonctionnelle de la convergence

IX.1. Théorème de Banach-Steinhaus et conséquence

$4/\pi^2$

IX.2. Lemme de Lebesgue, théorème de Jackson et conséquence

IX.3. Réciproque de Bernstein

250 : Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon est consacrée à l'analyse de Fourier sur la droite réelle. Au niveau de l'agrégation, elle peut être abordée dans trois cadres : L^1, classe de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide, ou L^2. Les deux derniers cadres sont les plus satisfaisants du point de vue de la symétrie obtenue, le dernier étant le plus délicat. La leçon nécessite de rappeler le lien avec le produit de convolution. Elle doit aussi être illustrée par quelques applications significatives : formule sommatoire de Poisson et ses applications, résolution d'équations aux dérivées partielles, etc. Par ailleurs, les fonctions caractéristiques et leurs applications en probabilités ont toute leur place dans cette leçon. Proposer comme développement le théorème d'échantillonage de Shannon est pertinent, à condition d'avoir bien compris qu'il traduit une isométrie entre deux espaces de Hilbert. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux vecteurs propres de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$ à la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass dans le cas le plus général, à l'algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, aux principes d'incertitude, etc.

Plan

I. Définition intégrale

I.1. Définition et exemples

- Définition

- Méthode de calcul par l'analyse complexe, exemple notamment gaussienne
- Propriétés de la fonction : continuité et bornitude, comportement à l'infini.

I.2. Opérations algébriques

- Règles de calcul : opérations algébriques, translation
- Exemples

I.3. Comportement avec la dérivation

- Dérivation, exemples
- Holomorphie (à revoir)
- app : analyse de Fourier équation de la chaleur (à revoir)

II. Formule d'inversion de Fourier

II.1. Classe de Schwartz

- Définition
- Propriété de stabilité
- Densité.
- Vers une théorie de Fourier des distributions...

II.2. Formule d'inversion de Fourier

- Formule de Poisson
- Exemple Jacobi
- Formule d'inversion de Fourier sur le classe Schwartz, corollaire général.
- Exemple
- app : expression solution équation de la chaleur

II.3. Propriétés fonctionnelles de la transformée de Fourier

- Prolongement Fourier-Plancherel
- app : inégalité de Heisenberg
- Théorème de Riesz-Thorin
- cor : Inégalité de Hausdorff-Young pour Fourier
- app : contrôle solution équation de la chaleur

III. Utilisation de l'analyse de Fourier en probabilités

III.1. Fonction caractéristique d'une mesure

- Définition
- Formule de Dualité
- Caractérise la loi.

III.2. Théorème de P.Lévy

1. Théorème
2. App : théorème central limite de Linderberg

III.3. Récupération des moments

1. Moments et fonction caractéristiques
2. App : Problème des moments

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

La convexité intervient dans plusieurs parties du programme, offrant ainsi plusieurs pistes très riches pour élaborer la leçon : convexité dans les espaces vectoriels réels, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables réelles), caractérisation parmi les fonctions C^1 ou C^2 sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, projection sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert, méthodes d'optimisation en dimension finie. Les applications de ces thèmes sont innombrables : inégalités classiques en analyse et en probabilité, optimisation, critère de densité d'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert, etc. Il est important de développer cette leçon dans son cadre géométrique naturel, en n'hésitant pas à l'illustrer par de nombreux dessins. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la continuité, voire à la différentiabilité d'une fonction convexe définie sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, aux points extrémaux d'une partie convexe d'un espace vectoriel réel de dimension finie, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercitives sur un espace de Hilbert, aux applications du théorème de Hahn-Banach, à la notion d'uniforme convexité et son application à l'existence d'un vecteur normant pour une forme linéaire continue.

IV. Ensembles convexes

IV.1. Définition, exemples

Définition 1. Une partie C d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E est dite convexe lorsque pour tout $(x,y)\in C$ le segment $[x,y]=\{tx+(1-t)y\ :\ t\in[0,1]\}$ est dans C.

Exemple 2. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel si $f_1,\cdots,f_n$ sont des formes linéaires sur E et $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ des réels alors $\{f_i\leqslant\alpha_i\}$ ou $\{f_i<\alpha_i\}$ définissent des parties convexes de E. En particulier, les sous-espaces affines de E sont convexes.

Exemple 3. Une intersection de convexes est convexe.

Exemple 4. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel puis N une norme sur E. Les boules ouvertes et fermés pour N sont des parties convexes de E.

Exemple 5. Si A est une partie de E l'ensemble $\left\{\sum_{i=1}^n t_ix_i \mid x_i\in A \text{ et } \sum_{i=1}^n t_i=1\right\}$ est une partie de E appelée enveloppe convexe de A et noté $\mathrm{Conv}(A)$.

IV.2. Séparation des convexes

Lemme 6 (Brézis)**.** Soit E un espace vectoriel puis F un s.e.v de E. On se donne $p:E\to\mathbf{R}$ une fonction vérifiant $p(\lambda x)=\lambda p(x)$ et $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$. Si f est une forme linéaire sur F tel que $f(x)\leqslant p(x)$, $\forall x\in F$ il existe un prolongement $\overline{f}$ de f à E tel que $\overline{f}(x)\leqslant p(x)$, $\forall x\in E$.

Théorème 7 (Brézis)**.** Soit E un espace vectoriel normé puis A et B deux parties disjointes de E avec A ouvert. Il existe une forme linéaire continue sur E et un réel α tel que :

$$A\subset\{f\leqslant\alpha\}\quad\text{et}\quad B\subset\{f\geqslant\alpha\}.$$

On dit que l'hyperplan affine $\{f=\alpha\}$ sépare les convexes A et B.

Corollaire 8 (Solo)**.** Soit C une partie convexe fermé, alors C est intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Corollaire 9 (Solo)**.** Soit C une partie convexe d'intérieur non vide puis x_0 un point de ∂C. Il existe un une forme linéaire continue f et un réel α tel que l'hyperplan affine $H=\{f=\alpha\}$ contient x_0 et $C\subset\{f\leqslant\alpha\}$. On dit que H est un hyperplan d'appui de C en x_0.

Corollaire 10. Si C est convexe compact alors C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

IV.3. Convexe dans un espace de Hilbert

Proposition 11 (Brézis)**.** Soit C un convexe fermé d'un espace de Hilbert H. Pour tout $x \in H$ il existe un unique point $y = p_C(x)$ tel que $d(x,C) = \|x-y\|$. Le point y est caractérisé par la propriété suivante :

$$\langle x-y, x-z\rangle \leqslant 0, \quad \forall z \in C.$$

Ainsi $\{z : \langle x-y, x-z\rangle = 0\}$ est un hyperplan séparant x de C, hyperplan d'appui de C en y.

Corollaire 12 (Brézis)**.** Soit H un espace de Hilbert. Toute forme linéaire continue sur H s'écrit $x \mapsto \langle a, x\rangle$ avec $a \in H$.

Application 13. Soient $p \in \mathscr{C}^1([0,1])$ et $q \in \mathscr{C}([0,1])$ avec $\inf_{[0,1]} p > 0$ et $q \geqslant 0$. Pour tout $f \in \mathscr{C}(]0,1[)$ il existe une unique fonction $u \in C^2(]0,1[) \cap C^0([0,1])$ tel que $-(pu')' + qu = f$ et $u(0) = u(1) = 0$.

V. Fonctions convexes

V.1. Définition

réf : le springer de convexité.

Définition 14. Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E. Une fonction $f : C \to \mathbf{R}$ est dite convexe lorsque son *épigraphe* : $\{(x,y) \mid f(x) \leqslant y\}$ est convexe ce qui revient à dire que :

$$\forall (x_1, x_2) \in C,\ \forall t \in [0,1],\ \ f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Lorsque cette inégalité est stricte pour $t \in (0,1)$ on dit que f est strictement convexe.

rem : penser qu'on peut affaiblir la définition dans bien des cas.

Proposition 15. Soit C une partie convexe ouverte d'un espace vectoriel normé E puis $f : C \subset E \to \mathbf{R}$ une fonction convexe continue. Pour tout $x \in C$ on a l'égalité suivante où le sup est atteint :

$$f(x) = \sup_{\substack{g \text{ aff.} \\ g \leqslant f}} g(x).$$

Corollaire 16. Soit (X, μ) un espace mesuré de poids 1. On se donne des fonctions intégrables $u_k : X \to I_k$ avec I_k intervalle ouverts de $\mathbf{R}$ puis $f : I_1 \times \cdots \times I_d \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Si $f(u_1, \cdots, u_d)$ est intégrable alors,

$$f\left(\int_X u_1 \mathrm{d}\mu, \cdots, \int_X u_d \mathrm{d}\mu\right) \leqslant \int_X f(u_1, \cdots, u_d) \mathrm{d}\mu.$$

L'hypothèse de poids est facultative si l'on suppose de plus que $I_k = [0, +\infty[$ et f positivement homogène *i.e.* $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^n$.

Proposition 17. Une fonction convexe sur C admettant un maximum local en un point de l'intérieur de C est constante. Si C est compact alors $\sup_C f = \sup_{\partial C} f = \sup_{\mathrm{Ext}(C)} f$.

Corollaire 18. Si E est de dimension finie, une fonction convexe $f : C \to \mathbf{R}$ est localement bornée.

Proposition 19. Soit $f : C \subset E \to \mathbf{R}$ une fonction convexe avec C ouvert. Si f est localement borné au voisinage de a alors f est localement lipschitzienne en a.

V.2. Variations des fonctions convexes

Lemme 20. Soit $f : C \subset E \to \mathbf{R}$ où C est une partie convexe ouverte de E. La fonction f est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in C$ la fonction $t \in [0,1] \mapsto f(tx + (1-t)y)$ est convexe.

Proposition 21 (Gourdon)**.** Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est convexe (resp. strictement croissante) si et ssi pour tout point $x \in I$ l'application

$$I \setminus \{x_0\} \to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante.

Corollaire 22 (Gourdon)**.** Si $f : I \to \mathbf{R}$ est convexe alors f admet en tout point x de $\mathring{I}$ des dérivées à gauche et à droite notés $f'_g(x)$ et $f'_d(x)$. De plus pour tout $x < y$,

$$f'_g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant f'_g(y) \leqslant f'_d(y).$$

En particulier si f est dérivable alors f' est croissante.

Proposition 23 (Gourdon)**.** Si $f : I \to \mathbf{R}$ est de classe C^1 alors les assertions suivantes sont équivalentes :
- f est convexe ;
- f' est croissante ;
- f est au dessus de ses tangentes *i.e.* pour tout $x, y \in I$, $f(y) \geqslant f(x) + (y - x)f'(x)$.

Corollaire 24 (Gourdon)**.** Si $f : I \to \mathbf{R}$ est deux fois dérivable alors f est convexe si et ssi $f'' \geqslant 0$.

Application 25. Fonctions convexes usuelles.

Théorème 26. Soit $f : C \subset E \to \mathbf{R}$ où C est une partie convexe ouverte de E.
- Si f est différentiable alors f est convexe si et ssi f est au dessus de ses hyperplans tangents *i.e.* $f(y) \geqslant f(x) + \mathrm{d}f(x) \cdot (y - x)$ pour tout $x, y \in C$;
- Si f est deux fois différentiable alors f est convexe si et ssi $H^2 f$ est positive en tout point *i.e.* $v^\top H^2 f(x) v \geqslant 0$.

V.3. Inégalités de convexité

Exemple 27. Si $x_1, \cdots, x_n$ sont des réels positifs alors $(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots x_n}{n}$.

Exemple 28. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant \frac{\pi}{2} x$.

Exemple 29. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes centrés tel que $|X_i| \leqslant c_i$ p.s. Si l'on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $C_n = \sum_{i=1}^n c_i$ on a :

$$\mathbf{P}(S_n > t) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2C_n}}, \quad \mathbf{P}(|S_n > t|) \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2C_n}}.$$

Application 30. Dans le modèle statistique $\mathrm{Ber}(\theta)^{\otimes n}$, $[\overline{X}_n \pm \sqrt{\frac{\log(2/\alpha)}{2n}}]$ est un intervalle de confiance de niveau au moins $1 - \alpha$ de θ.

Exemple 31. Soit f, g deux fonctions mesurables positive sur un espace mesuré (X, μ). Pour $p \in [1, \infty]$ en notant q l'unique réel vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a :

$$\int_X f g \mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_X f^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int_X f^q \mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.$$

Application 32. Pour $p \in [1, \infty]$, l'ensemble des fonctions mesurable $f : X \to \mathbf{R}$ tel que $\|f\|_p := \left(\int_X f^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} < \infty$ est un espace vectoriel sur lequel $\|\cdot\|_p$ est une norme. De plus pour $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$ on a pour tout $p \in [p_0, p_1]$ on a $L^{p_0} \cap L^{p_1} \subset L^p$ avec $\|f\|_p \leqslant \|f\|_{p_0}^{\theta} \|f\|_{p_1}^{1-\theta}$ où $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$.

Commentaires

1. régularité des fonctions convexes.
2. Stricte convexité, énoncé équivalent, exemple du x^4
3. On peut aussi utiliser Hölder pour montrer la log-convexité de la fonction Γ.

VI. Optimisation convexe

VI.1. Propriétés spécifiques

Proposition 33. Soit E un espace vectoriel normé puis $f : C \to E$ une fonction convexe.
1. Si f possède un minimum local en x_0 ce minimum est global, si de plus f est strictement convexe ce minimum est unique ;
2. Si f est dérivable sur C alors f admet un minimum en x si et seulement si pour tout $y \in C$, $\mathrm{d}f(x) = 0$.

Remarque 34. Revenir sur la projection sur un convexe fermé.

Exemple 35. Soit K un compact de $\mathbf{R}^d$ d'intérieur non vide contenant 0. Il existe une unique ellipsoïde contenant K de volume minimal.

Exemple 36. Dans un modèle exponentielle l'estimateur la log-vraisemblance est concave donc admet un unique minimum.

Proposition 37. Soit $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une fonction C^1 strictement convexe dont le gradient est L-lipschitzien. On suppose que f admet un minimum en un point x^*. On définit à partir de $x_0 \in \mathbf{R}$ la suite $x_{n+1} = x_n - \rho \nabla f(x_n)$ converge pour $\rho \leqslant \frac{1}{L}$ vers x^*. De plus on a la majoration :

$$f(x_n) - f(x^*) \leqslant \frac{1}{2\rho n} \|x_0 - x^*\|.$$

Maintenant si l'on suppose de plus que f est elliptique *i.e.* $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x - y) \geqslant \alpha^2 \|x - y\|^2$ avec $\alpha > 0$ alors pour $0 < \rho \leqslant \frac{2\alpha}{L}$ on a converge géométrique de x_n vers x^*.

à mettre en complément ce que propose jimmy.

VI.2. Topologie faible

Définition 38. Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'un suite de vecteurs x_n converge faiblement vers x lorsque $f(x_n) \to f(x)$ pour toute forme linéaire continue f.

Proposition 39. Soit E un espace de Banach. On suppose que E est réflexif *i.e.* que l'application canonique $J : E \to E''$ est surjective. Alors de toute suite borné de E on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement.

Proposition 40. Si $f : E \to \mathbf{R}$ est convexe continue et que x_n converge faiblement vers x alors $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.

Application 41. Soit $p > 0$. Pour $f \in C^0(]0,1[)$ Le problème aux limites :

$$\begin{cases} -u'' + |u|^{p-1}u = f \\ \quad u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

possède une unique solution $u \in C^2(]0,1[) \cap C^0([0,1])$.

VI.3. Uniforme convexité

Définition 42. Un espace de Banach E est dit uniformément convexe lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|x\|, \|y\| \leqslant 1 \text{ et } \|x - y\| \geqslant \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leqslant 1 - \delta.$$

Exemple 43. Pour $1 < p < \infty$ les espaces L^p sont uniformément convexes [inégalité de clarkson].

Lemme 44. Soit E un espace vectoriel normé. Tout élément de E'' est limite simple d'une suite d'éléments de $J(B_E)$.

Théorème 45. (Milman-Pettis) Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Application 46. L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.

261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Cette leçon concerne les diverses lois du programme, leurs interactions et leurs propriétés de stabilité, et appelle donc quelques illustrations concrètes et bien choisies de calculs de lois, dans un contexte de modélisation. Le théorème de transfert, qui calcule $\mathbf{E}(f(X))$ à l'aide de la loi de X, les vecteurs aléatoires à coordonnées indépendantes, ainsi que la caractérisation de la loi par la fonction de répartition, fonction génératrice ou caractéristique, sont au coeur de cette leçon. Les principales propriétés des fonctions de répartition et des fonctions caractéristiques des variables aléatoires réelles doivent être connues. Les candidates et candidats peuvent également aborder la convergence en loi en l'illustrant d'exemples et d'applications variés en probabilités et/ou en statistique (estimation par intervalle de confiance). Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation de la loi par les moments, à des inégalités de concentration, aux vecteurs gaussiens, au théorème central limite dans $\mathbf{R}^d$ aux chaînes de Markov, aux processus de Poisson.

Plan

I. Loi d'une variable aléatoire

I.1. Définition

Définition 1. Une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$ à valeurs dans l'espace mesuré $(E,\mathscr{T})$ est une fonction mesurable $X:(\Omega,\mathscr{F})\to(E,\mathscr{T})$. La loi de X est la loi image de $\mathbf{P}$ par X c'est à dire

$$\mathbf{P}_X(A)=\mathbf{P}(X\in A)=\mathbf{P}(X^{-1}(A)).$$

Proposition 2. *Transfert*
Avec les notations précédentes pour $f:(E,\mathscr{T})\to\mathbf{R}$ borélienne, $h\circ X$ est $\mathbf{P}$-intégrable si et seulement si f est $\mathbf{P}_X$-intégrable et dans ce cas,

$$\int_\Omega f(X(\omega))\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)=\int_{X(\Omega)} f(x)\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x).$$

Exemple 3. Une variable aléatoire X est dite discrète si elle est à valeurs dans un espace dénombrable E. Dans ce cas la loi de X est entièrement déterminée par les germes $p_x:=\mathbf{P}(X=x)$, on peut écrire

$$\mathbf{P}_X=\sum_{x\in E}\mathbf{P}_x\delta_x.$$

Les lois discrètes usuelles sont les suivantes :

1. la loi de Bernoulli de paramètre p avec $\mathbf{P}(X=1)=1-\mathbf{P}(X=0)=p$;
2. la loi géométrique de paramètre p avec $\mathbf{P}(X=k)=(1-p)^{k-1}p^k$ pour $k \geqslant 1$;
3. la loi binomiale de paramètre (n,p) avec $\mathbf{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$;
4. la loi de Poisson de paramètre λ avec $\mathbf{P}(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$.

Exemple 4. Une variable aléatoire X est dite à densité s'il existe une fonction positive ρ tel que $\mathbf{P}_X(A)=\int_A \rho(x)\mathrm{d}x$ qui se généralise en l'identité

$$\mathbf{E}(f(X))=\int_{X(\Omega)} f(x)\rho(x)\mathrm{d}x.$$

Dans ce cas la fonction f est unique et est appelée *densité de X* et noté f_X. Les lois à densités usuelles sont les suivantes :

1. la loi uniforme sur $[a,b]$ avec $f_X : t \mapsto \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$;
2. la loi exponentielle de paramètre λ avec $f_X : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{1}_{t \geqslant 0}$;
3. la loi normale de paramètre (μ,σ^2) avec $f_X : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$.

I.2. Marginales

Référence : Ouvrard
Définition des lois marginales
Pro : calcul des lois marginales à partir de la loi global
exemples.
Pro : caractérisation de l'indépendance
ex : vecteur gaussien

I.3. Opérations sur les variables aléatoires

Référence : Ouvrard.
Pro : opérations algébriques (sommes et produits)
ex : Poisson, binomiale.
Pro : action d'un difféomorphisme
ex : log uniforme donne exponentielle.

II. Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire

II.1. Fonction de répartition

Définition
Proposition : caractérisation des fonctions de répartitions

Application 5. Méthode de la transformée inverse
A partir de la donnée d'une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0,1]$ on peut construire une variable aléatoire de loi prescrite en appliquant une fonction bien choisie à U. La fonction à appliquer correspond à la fonction quantile qui est l'inverse généralisée de la fonction de répartition. Précisément si F est une fonction quelconque, on définit son inverse généralisé comme

$$F^{-1}(u)=\inf\{t : F(t) \geqslant u\} \qquad (0<u<1).$$

Cette quantité est bien définit lorsque F vérifie les propriétés de la proposition précédente. Dès lors F^{-1} est une fonction mesurable et, $F^{-1}(U)$ à pour fonction de répartition F. Cela montre que les propriétés de la proposition précédente sont caractéristiques des fonctions de répartition.
Cette méthode trouve son utilité dans la simulation numérique de variables aléatoires. En fait il indique qu'il suffit de savoir simuler une loi uniforme pour généraliser toutes les autres lois. Cela reste théorique, car en pratique calculer l'inverse généralisé est très couteux. Cela à son utilité pour quelques lois usuelles mais en pratique on utilise des méthodes simulations adaptées au cas par cas.

II.2. Fonctions caractéristique

Définition
exemples
Pro : caractérise la loi
cor : critère d'indépendance
rem : autres fonctions génératrices liés.

II.3. Moments

Définition
Pro : Caractérise la loi dans le cas des supports compacts
ex : loi uniforme
Pro : récupération par la fonction caractéristique
cor : problème des moments [**DEV1**]
ex : loi normale.
ex : loi log-normale.

III. Convergence en loi

III.1. Définitions

Définition
Propriété Portementeau
cor : critère par les fonctions de répartitions.
ex : problème du collectionneur
cor : critère de convergence pour les lois discrètes
ex : approximation poisson-binomiale
rem : Comment déterminer empiriquement la loi d'une variable aléatoire ?

III.2. Opérations sur la limite

Pro : Théorème de Skorohod
cor : continuous-mapping theorem
cor : intégration de la limite en loi.
Pro : Propriété de Slutsky
app : En statistiques.

III.3. Critère de Prokhorof

Lem : Helly
Pro : Prokhorof
cor : théorème de Lévy-Fort
app : TCL version Linderberg
cor : méthode des moments
app : [admis] erdos-kac

262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Les liens entre les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires doivent être illustrés par des exemples et contre-exemples variés. Ainsi, les implications entre les divers modes de convergence, et les réciproques partielles doivent être connues. Les théorèmes de convergence du programme (lois des grands nombres, théorème central limite) sont bien sûr au coeur de cette leçon, et la preuve de la loi forte des grands nombres, éventuellement sous des hypothèses de confort, peut être présentée. Les liens de ces théorèmes limite avec les questions d'estimation ponctuelle, d'estimation par intervalle de confiance en statistique, ont leur place dans cette leçon. Les candidates et candidats solides peuvent aborder la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les marches aléatoires, la loi du logarithme itéré, la méthode de Monte Carlo, le théorème central limite dans $\mathbf{R}^d$, les chaînes de Markov, les lois stables ou infiniment divisibles.

I. Convergences des variables aléatoires

Référence : Billingsley

I.1. Différents modes de convergences

Définition dans $\mathbf{R}^d$:

1. convergence p.s ;
2. convergence en moyenne ;
3. convergence en probabilité ;
4. convergence en loi (par Portementeau).

Proposition 2. Caractérisation convergence p.s. de Borel-Cantelli

Proposition 3. Convergence en loi et fonctions de répartitions pour des variables aléatoires réelles.

Exemples
Remarque : Topologie relatif aux différents modes de convergences.

I.2. Lien entre les modes de convergences

[mettre un tableau en annexe]

Proposition 7. La convergence p.s. implique la convergence p.s. La convergence en probabilité implique convergence presque sûr à une sous-suite près. En fait la convergence en probabilité est exactement la convergence p.s. à sous-suite près.

app : preuve de la loi des grands nombres (sur l'idée de la réciproque)

Proposition 9. Si X_n dans L^p vers X alors X_n converge en probabilité vers X. Inversement, si X_n converge en probabilité vers X alors X_n converge dans L^p vers X si et seulement si X_n est équi-intégrable.

App : converge des martingales dans L^p.

Proposition 11. Si X_n converge en probabilité vers X alors X_n converge en loi vers X. Si X_n converge en loi vers une constante alors X_n converge en probabilité. Aussi si X_n *réelle* [1] converge en loi vers X alors il

1. Le résultat est plus généralement vraie sur $\mathbf{R}^d$ mais la démonstration se complique et nous n'en aurons pas besoin.

existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathscr{F}', \mathbf{P}')$ sur lequel vivent des variables aléatoires X'_n et X' tels que X'_n à la loi de X_n, X' la loi de X et X_n converge p.s. vers X.

Corollaire 12. Si X_n converge en loi vers X et X_n est équi-intégrable alors $\mathbf{E}(X_n)$ converge vers $\mathbf{E}(X)$.

app : si X_n converge en loi vers X et est uniformément borné dans L^p alors pour tout k entier $< p$ on a $\mathbf{E}(X_n^k) \to \mathbf{E}(X^k)$.

I.3. Opérations sur les convergences

Théorème : continous mapping theorem
exemples
Pro : convergence d'un couple
cor : combinaison des deux résultats précédentes
cor : Lemme de Slutsky
app : en statistiques

II. Critères de convergence en loi

II.1. Fonctions tests

Proposition : caractérisation convergence en loi par les fonctions tests
Pro : résultats de densités.

II.2. Caractérisations de la convergence en loi

Lemme : sélection de Helly
Th : Critère de Prokhorof
cor : Théorème de Lévy fort
app : TCL
cor : méthode des moments
app : Erdos-Kac
cor : Fonction génératrice
app : Galton-Watson.

II.3. Convergence en loi des variables aléatoires discrètes

Définition : convergence en variation totale
Pro : Équivalence dans le cas de variable aléatoires discrètes et différentes expressions de la distance en variation totale
Ex : Loi des évènements rares de Poisson avec inégalité de Le Cam
Ex : Loi des cycles
Ex : Perron-Frobenius, exemple de la marche aléatoire sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

III. Variables aléatoires indépendantes

III.1. Convergence

Loi du 0-1
app : exemple de la pièce
Loi des grands nombres complète
app : monte carlo
Loi du logarithme itérée [admis].

III.2. Fluctuations

Lem : Fonction caractéristique d'une somme de v.a. indépendantes TCL
app : Intervalles de confiances asymptotiques
Généralisation sous les conditions de Linderberg
Applications à la loi du nombre de cycles.

III.3. Répartition

Théorème de ? (LGN sur les mesures)
Théorème de Glivenko-Cantelli
app : estimateur et test de Kolmogorov-Smirnov.

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidates et candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles du programme soient présentées, ainsi que leurs liens éventuels. Il est important de proposer quelques exemples de modélisation faisant intervenir ces lois. Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières (caractérisation de la convergence en loi, notion de fonction génératrice) doivent être mises en évidence et illustrées par des exemples variés. La marche aléatoire symétrique sur $\mathbf{Z}$ ou le processus de Galton-Watson fournissent des exemples riches. Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi du logarithme itéré (par exemple dans le cas de la marche aléatoire symétrique), les chaînes de Markov, les processus de Poisson.

Plan

I. Variables aléatoires discrètes

I.1. Présentation

- Définition des v.a. discrètes, loi et germe.
- Fonction de répartition : méthode de la transformée inverse.
- Lois discrètes usuelles : bernoulli, binomiale, géométrique avec interprétation en terme de pile ou face.

I.2. Fonctions génératrices

- Définitions des fonctions génératrices
- Caractérisation de la loi, récupération des moments avec les dérivées
- Somme : indécomposabilité de la loi de Poisson
- Formule de Wald : application à Galton-Watson (**DEV1**)

II. Convergence des variables aléatoires discrètes

II.1. Vers des variables aléatoires discrètes

- Définition de la convergence en loi
- Exemple : loi de Poisson, propriété de semi-groupe.
- Métrique de la variation totale avec différentes expressions
- Exemple : convergence binomiale Poisson avec inégalité de Le Cam
- Exemple : loi des cycles d'une permutation aléatoire avec information de convergence (**DEV2**)

II.2. Vers des lois continus après renormalisation

- Définition de la convergence en loi par les fonctions de répartitions
- Exemple : convergence géométrique-exponentielle, convergence binomiale-normale cas $p = 1/2$.
- Lemme de Helly, critère de Prokhorof
- Corollaire : caractérisations de la convergence en loi par réduction des fonctions tests
- Application : convergence Galton-Watson sous-critique conditionnée à l'extension (Chafai-Malrieu)
- Application : convergence nombre de cycles vers normale
- Application : problème du collectionneur (Chafai-Malrieu)

II.3. Théorème limite central et raffinement

- Proposition : théorème central limite
- Exemple : approximation binomiale-normale cas général
- Théorème local limite (Gourdon)
- Application : Marche de Luckaciezski pour Galton-Watson

III. Chaînes de Markov

III.1. Définitions

- Définition, exemples
- Relation de Chapman-Kolmogorov.

III.2. Classification des états

- Dynamique en chaque état
- Comportement qualitatif de la chaîne
- ex : théorème de Polya pour la marche simple sur $\mathbf{Z}^d$.

III.3. Comportement asymptotique

- Théorème ergodique
- Convergence des marginales avec vitesse de convergence dans le cas fini
- Exemple : marche aléatoire sur $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ (Développement).
- Application : méthode de Métropolis.

266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités

Il s'agit d'une leçon de synthèse autour de l'indépendance, concept incontournable qui démarque la théorie des probabilités de celle de l'intégration. Les notions importantes de probabilité conditionnelle, d'indépendance de deux événements, d'indépendance mutuelle d'une suite d'événements et d'indépendance de familles de variables aléatoires, doivent être connues. Le programme fournit plusieurs utilisations élémentaires de l'indépendance : lien avec l'espérance, la variance, la covariance et le coefficient de corrélation, loi faible des grands nombres, lemmes de Borel-Cantelli, stabilité de certaines lois, en lien avec les fonctions génératrices et caractéristiques. Des thèmes pouvant également être abordés sont le théorème central limite, ou l'étude de la marche aléatoire symétrique sur Z. Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi forte des grands nombres, l'indépendance d'une suite de tribus, la loi du 0-1 de Kolmogorov, la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les vecteurs gaussiens ou le théorème de Cochran.

I. Notion d'indépendance

I.1. Évènements indépendants

Référence : Billingsley
Évènements indépendants et mutuellement indépendants, exemples
Ensembles d'évènements indépendants
Théorème : caractérisation indépendance π-systèmes
cor : théorème de regroupement.

I.2. Variables aléatoires indépendantes

Définition : variables aléatoires indépendantes par leur tribu, bien dire que cela ne dépend que d'un nombre fini
Proposition : critère sur la loi
cor : des caractérisations des lois on en déduit des caractérisations de l'indépendance (fonctions tests, fonction de répartition, densité, fonction caractéristique).

I.3. Vecteurs gaussiens

définition
Pro : Densité
cor : caractérisation indépendance
théorème de Cochran
app : Tests du chi2 ?

II. Suites de v.a indépendantes

II.1. Construction d'une suite de variables aléatoires indépendantes

II.2. Exemples de processus discret à base d'indépendance

Marche aléatoire
Galton-Watson.

II.3. Lemme de Borel-Cantelli et loi du 0-1

Proposition : Lemme des Borel-Cantelli
exemples ?

Loi du 0-1
exemples.

III. Moyenne empirique

III.1. Loi des grands nombres

Proposition 1. Bienyamé-Tchebychev

Corollaire 2. Loi faible des grands nombres

app : Bernstein

Lemme 3. Inégalité maximal

Proposition 4. Théorème de Kolmogorov

Corollaire 5. Loi forte des grands nombres

Remarque 6. Justification introduction estimateurs des moments en statistique.

III.2. Théorème central limite

Proposition 7. Description avec convolution.

Exemple 8. Loi binomiale, loi de Poisson

Exemple 9. Développement dyadique binomiale

Définition 10. Transformée de Fourier.

Proposition 11. T de P.Levy avec caractérisation.

Corollaire 12. Théorème central limite [Développement]

Application 13. Construction d'intervalles de confiance.

III.3. Mesure empirique

Bibliographie

[Amr08] M.E. Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels : niveau M1*. Mathématiques à l'université. Ellipses, 2008.

[Ber17] F. Berthelin. *Equations différentielles*. Cassini, 2017.

[Bre10] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.

[Dem16] J-P Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDPsciences, 2016.

[Gou21] X. Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités - 3e édition*. Ellipses, 2021.

[HL99] F. Hirsch and G. Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle : cours et exercices avec réponses*. Enseignement des mathématiques. Dunod, 1999.

[Rud20] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 2020.