Représentation induite et règle de branchement pour l'induction

Jules Besson, Éloan Rapion

28 juin 2022

École Normale Supérieure de Rennes

Intuition

Soit G un groupe fini, $H \leqslant G$.

Soit V un G-module, W un sev de V stable par H. Alors W a une structure de H-module.

D'autre part, soit W un H-module. On souhaiterait obtenir canoniquement un G-module à partir de W...

Définition

On prend $H \leqslant G$ un sous-groupe, et V un G-module avec un sev W stable par l'action de H. Pour $g \in G$, le sev $g \cdot W$ dépend uniquement de la classe de à gauche de g pour H, car pour $g \in G$, $h \in H$:

$$gh \cdot W = g\,(h \cdot W) = g \cdot W$$

$\Longrightarrow$ On peut définir une application de ${}^{G}\!/_{H}$ vers $\{g \cdot W,\, g \in G\}$

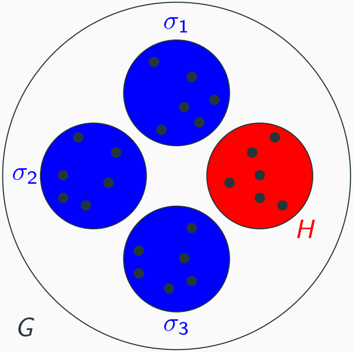
Définition (Induction):
Si V est un G-module et W un sev de V stable par l'action de H, on dit que le G-module V est *induit* par le H-module W si

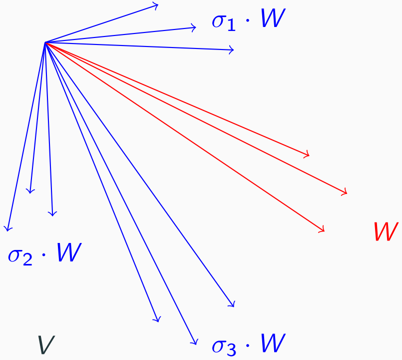
$$V = \bigoplus_{\sigma \in {}^{G}\!/_{H}} \sigma \cdot W$$

On notera $V = W\!\uparrow_H^G = W\!\uparrow$ lorsque cela est implicite.

Définition

$$\boxed{V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma \cdot W}$$





Exemples

$$\boxed{V = \bigoplus_{\sigma \in {}^{G}\!/\!_{H}} \sigma \cdot W}$$

Exemple:

- V : G-module régulier de base $\{e_g,\, g \in G\}$
- $W := \mathrm{Vect}(e_h,\, h \in H)$
- Pour $\sigma \in {}^{G}\!/\!_{H}$: $\sigma \cdot W = \mathrm{Vect}(e_g,\, g \in \sigma)$

Exemple (Module de permutation):

- V : G-module régulier de base $\{e_\sigma,\, \sigma \in {}^{G}\!/\!_{H}\}$
- $W := \mathrm{Vect}(e_H)$ (Représentation triviale)
- Pour $\sigma \in {}^{G}\!/\!_{H}$: $\sigma \cdot W = \mathrm{Vect}(e_\sigma,\, \sigma \in {}^{G}\!/\!_{H})$

Par exemple, on a $M^\lambda = 1\!\uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}$.

Construction

Théorème:
Pour W un H-module, il existe V un G-module tel que V soit induit par W.

Preuve: Soit W un H-module.

$V := W^{\oplus G/H} = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W^{\sigma}$

On pose $\imath_\sigma : W \to W^\sigma$ l'isomorphisme linéaire canonique. On choisit une transversale $(t_\sigma)_{\sigma \in G/H}$ telle que $t_H = 1$.

$\implies$ action de G sur V : $g \in G, x \in W^\sigma$:

$$g \cdot x := \imath_{\overline{gt_\sigma}} \left(\left(t^{-1}_{\overline{gt_\sigma}} g t_\sigma \right) \cdot \imath_\sigma^{-1}(x) \right)$$

Avec τ la classe à gauche $g \cdot \sigma$:

$$g \cdot x = \imath_\tau \left(\left(t_\tau^{-1} g t_\sigma \right) \cdot \imath_\sigma^{-1}(x) \right)$$

$\square$

Unicité

Théorème:
Étant donné un H-module W, des G-modules V induits par W sont isomorphes en tant que G-modules.

Preuve: Soit V un G-module induit par H $\left(V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma \cdot W \right)$. On note $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ son action.

On pose :

$$\begin{array}{rccc} \pi_\sigma : & W^\sigma & \to & \sigma \cdot W \\ & x & \mapsto & \rho(t_\sigma)(t_\sigma^{-1} \cdot x) \end{array}$$

On vérifie que $\oplus \pi_\sigma : \bigoplus_{\sigma \in G/H} W^\sigma \to V$ est un isomorphisme de G-modules. $\square$

On a donc défini $W \uparrow_H^G$ de manière unique (à isomorphisme près).

Adjonction

On rappelle la notation de restriction : $V\downarrow_H^G$ ou même $V\downarrow$

$$\begin{tikzcd} G\text{-}\mathrm{Mod} \arrow[d, "\cdot\downarrow_H^G"] \\ H\text{-}\mathrm{Mod} \end{tikzcd} \quad\Longrightarrow\quad \begin{tikzcd} G\text{-}\mathrm{Mod} \\ H\text{-}\mathrm{Mod} \arrow[u, "\cdot\uparrow_H^G"'] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Hom}_G(W\uparrow_H^G, V) \simeq \mathrm{Hom}_H(W, V\downarrow_H^G)$$

Propriété (Commutativité avec la somme directe):
Soit $H \leqslant G$ des groupes et $(W_i)_{i \in I}$ des H-modules, alors

$$\left(\bigoplus_{i \in I} W_i \right) \uparrow = \bigoplus_{i \in I} W_i \uparrow$$

Propriété (Commutativité avec le produit tensoriel):
Soit $H \leqslant G$ des groupes, U un G-module et W un H-module, alors

$$U \otimes (W \uparrow) = (U \downarrow \otimes W) \uparrow$$

Matrices

$(e_1, \ldots, e_d)$: base de W

$(1, t_2, \ldots, t_l)$: transversale de G/H

$(e_1, \ldots, e_d, t_2 \cdot e_1, \ldots, t_2 \cdot e_d, t_3 \cdot e_1, \ldots, t_l \cdot e_d)$ est une base de V

Si $gt_i \in \sigma_j$:

$g \cdot (t_i \cdot e_k) = gt_i \cdot e_k = t_j t_j^{-1} gt_i \cdot e_k = t_j \cdot (t_j^{-1} gt_i \cdot e_k)$.

$\mathrm{Mat}_W(g)$: matrice de l'action de g sur W si $g \in H$, 0 sinon.

$$\mathrm{Mat}_V(g) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_W(t_1^{-1}gt_1) & \mathrm{Mat}_W(t_1^{-1}gt_2) & \cdots & \mathrm{Mat}_W(t_1^{-1}gt_l) \\ \mathrm{Mat}_W(t_2^{-1}gt_1) & \mathrm{Mat}_W(t_2^{-1}gt_2) & \cdots & \mathrm{Mat}_W(t_2^{-1}gt_l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Mat}_W(t_l^{-1}gt_1) & \mathrm{Mat}_W(t_l^{-1}gt_2) & \cdots & \mathrm{Mat}_W(t_l^{-1}gt_l) \end{pmatrix}$$

Caractères

$$\mathrm{Mat}_V(g) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_W(t_1^{-1}gt_1) & \mathrm{Mat}_W(t_1^{-1}gt_2) & \cdots & \mathrm{Mat}_W(t_1^{-1}gt_l) \\ \mathrm{Mat}_W(t_2^{-1}gt_1) & \mathrm{Mat}_W(t_2^{-1}gt_2) & \cdots & \mathrm{Mat}_W(t_2^{-1}gt_l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Mat}_W(t_l^{-1}gt_1) & \mathrm{Mat}_W(t_l^{-1}gt_2) & \cdots & \mathrm{Mat}_W(t_l^{-1}gt_l) \end{pmatrix}$$

χ_W : caractère de l'action de H sur W prolongé par 0 en dehors

$$\begin{aligned} \chi_V(g) &= \sum_{i=1}^{l} \chi_W(t_i^{-1}gt_i) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{|H|} \sum_{t\in\sigma_i} \chi_W(t^{-1}gt) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{t\in G} \chi_W(t^{-1}gt) \end{aligned}$$

Loi de réciprocité de Frobenius

Théorème:
Soit H un sous-groupe de G et ψ, χ des caractères respectifs de H et G, alors

$$\langle \psi\!\uparrow \mid \chi \rangle_G = \langle \psi \mid \chi\!\downarrow \rangle_H$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
\langle \psi\!\uparrow \mid \chi \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi\!\uparrow(g)\chi(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{g \in G} \psi(x^{-1}gx)\chi(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \psi(y)\chi(xy^{-1}x^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \psi(y)\chi(y^{-1}) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \psi(y)\chi(y^{-1}) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \psi(y)\chi(y^{-1}) = \langle \psi \mid \chi\!\downarrow \rangle_H
\end{aligned}$$

$\square$

Interlude : les diagrammes de Ferrers

Pour λ un diagramme de Ferrers, on note λ^+ (resp. λ^-) un diagramme de Ferrers obtenu en ajoutant (resp. retirant) un point.

$$\lambda = \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & {\Large\bullet} & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \\ \bullet & \bullet & \bullet & {\Large\bullet} & & \\ \bullet & {\Large\bullet} & \circ & & & \\ \circ & & & & & \end{array}$$

$$\lambda^+ = \begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & & \end{array} \qquad \lambda^- = \begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & \end{array}$$

On notera Λ^+ l'ensemble des diagrammes de Ferrers de la forme λ^+ et de façon analogue Λ^-.
On a $\lambda \in M^+ \iff \mu \in \Lambda^-$.

Règle de branchement pour l'induction

Théorème (Règle de branchement):
Soit $\lambda \vdash n$. Alors

$$S^\lambda \downarrow_{\mathfrak{S}_{n-1}} \cong \bigoplus_{\lambda^-} S^{\lambda^-} \qquad \text{et} \qquad S^\lambda \uparrow^{\mathfrak{S}_{n+1}} \cong \bigoplus_{\lambda^+} S^{\lambda^+}$$

Preuve: $S^\lambda \uparrow^{\mathfrak{S}_{n+1}} \cong \bigoplus_{\mu} (S^\mu)^{\oplus m_\mu}$ avec m_μ des coefficients à déterminer :

$$\begin{aligned} m_\mu &= \left\langle \chi^\lambda \uparrow^{\mathfrak{S}_{n+1}} \middle| \chi^\mu \right\rangle \\ &= \left\langle \chi^\lambda \middle| \chi^\mu \downarrow_{\mathfrak{S}_n} \right\rangle \\ &= \left\langle \chi^\lambda \middle| \sum_{\mu^-} \chi^{\mu^-} \right\rangle \\ &= \mathbb{1}_{M^-}(\lambda) \\ &= \mathbb{1}_{\Lambda^+}(\mu). \end{aligned}$$

$\square$

Bilbiographie

W.Fulton et J.Harris.
***Representation Theory, A First Course*.**
Springer Verlag, 1991.

B.E.Sagan.
***The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*.**
Springer, 2001.