

Théorie de l'Homologie

Cours de Julien MARCHÉ
Notes de Jules BESSON

Novembre et décembre 2022

Introduction

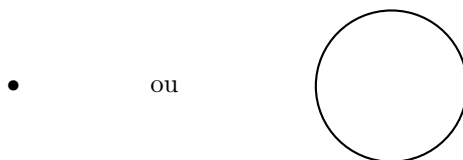
L'algèbre homologique nous dote de nombreux outils très sophistiqués et pointus, mais aussi très théoriques. Ce cours se concentrera sur l'étude de variétés bien souvent (mais pas toujours) de dimension inférieure à 3, de façon à avoir une bonne représentation mentale de ces objets.

Les variétés étudiées seront pour la grande majorité différentiables compactes, connexes et orientables, bien que ce dernier point soit plus optionnel.

Dimension 1

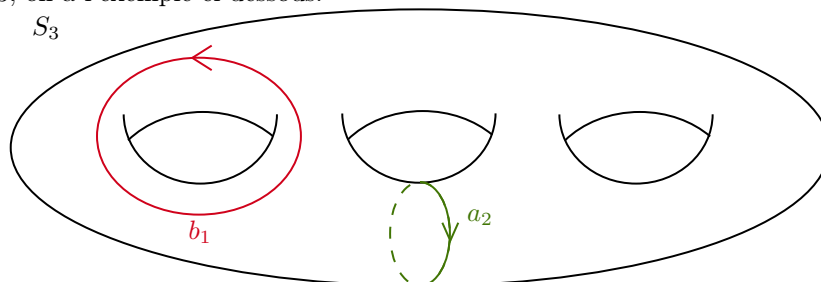
En dimension 1, il y a deux homologies singulières possibles :

- L'homologie du point $\{*\}$ donnée par $H_0(\{*\}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et pour $n > 0$, $H_n(\{*\}; \mathbb{Z}) = 0$. C'est l'homologie des espaces contractiles ou simplement connexes.
- L'homologie du cercle S^1 donnée par $H_0(S^1; \mathbb{Z}) = H_1(S^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et pour $n > 1$, $H_n(S^1; \mathbb{Z}) = 0$.



Dimension 2

Toute variété de dimension 2 compacte, orientable et connexe est diffeomorphe à S_g ou $g \geq 0$ est appelé "genre". Pour $g = 3$, on a l'exemple ci dessous.



On a alors

- $H_0(S_g; \mathbb{Z}) = H_2(S_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
- $H_1(S_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g} = \mathbb{Z}a_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}a_g \oplus \mathbb{Z}a_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}a_g$.
- Pour $n > 2$, $H_n(S_g; \mathbb{Z}) = 0$.

remarque: $H_1(S_g; \mathbb{Z})$ est muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée.

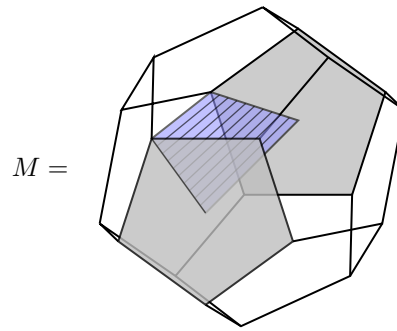
Géométriquement, elle traduit l'intersection :

$$\begin{cases} a_i \cdot b_j = \delta_j^i \\ a_i \cdot a_j = 0 \\ b_i \cdot b_j = 0 \end{cases}$$

Dimension 3

La classification est nettement plus compliquée, on a par exemple la variété de Seifert-Weber, construite à partir du dodécaèdre régulier (plein) ; on pose pour $x \in \partial D$, $x \sim x'$ où x' est le point en face de x après un dixième de tour.

On pose alors $M = D/\sim$.



On a alors

- $H_0(M; \mathbb{Z}) = H_3(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
- $H_1(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_1(M)} \oplus F$, avec
 - $b_1(M)$ le premier nombre de BETTI.
 - F la torsion de H_1 , groupe abélien fini.
- $H_2(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_2(M)}$.
- Pour $k > 3$, $H_k(M; \mathbb{Z}) = 0$.

La forme d'intersection est plus subtile, on l'appelle "forme d'enlacement". Les cycles peuvent à la fois être interprétés de la manière classique, mais dans ce cas ils sont triviaux. On remarque que les traits tracés dans la surface bleue sont des cycles également.

Dimension 4

Ce cas sera peu étudié, mais dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, on pose $M = \{[X_0, X_1, X_2, X_3] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0\}$, appelée surface $K3$. M est compacte orientée et connexe.

On a alors

- $H_0(M; \mathbb{Z}) = H_4(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
- $H_1(M; \mathbb{Z}) = H_3(M; \mathbb{Z}) = 0$.
- $H_2(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{22}$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée qui correspond intuitivement à l'intersection algébrique.

Table des matières

1	Rappels d'homologie singulière	1
I	Résultats d'homologie singulière	1
II	Homologie relative	2
III	Invariance par homotopie	4
IV	Excision et suites de Mayer-Vietoris	9
V	L'homologie du cercle	12
2	Complexes et homologie cellulaires	15
I	Définitions et exemples	15

Chapitre 1

Rappels d'homologie singulière

Pour les définitions relatives à l'homologie et l'homologie singulière en particulier, consulter [1].

On notera que pour $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ la décomposition en composante connexes par arcs de X , on a

$$C_\bullet(X; M) \simeq \bigoplus_{i \in I} C_\bullet(X_i; M)$$

Cela nous donne

$$H_\bullet(X; M) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_\bullet(X_i; M)$$

Il est donc naturel d'étudier des espaces connexes par arcs, c'est suffisant pour qualifier tous les espaces topologiques.

I Résultats d'homologie singulière

Le singleton

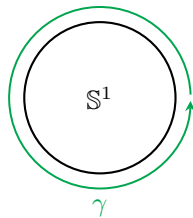
Pour $X = \{*\}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \partial_n = (n+1)[2] \cdot *$, donc

- $C_n(\{*\}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ si n est pair.
- $C_n(\{*\}; \mathbb{Z}) = 0$ si n est impair.

Ainsi, on a le résultat suivant :

- $H_0(\{*\}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
- Pour $n > 0, H_n(\{*\}; \mathbb{Z}) = 0$.

Le cercle



On pose ici $X = \mathbb{S}^1$. On a rapidement que $H_0(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, avec comme générateur [1] par exemple. $C_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$ est le groupe abélien libre engendré par les segments du cercle, $Z_1(X; \mathbb{Z})$ est le groupe abélien des lacets de \mathbb{S}^1 . On remarque cependant qu'on a un isomorphisme homotopique entre $\pi_1(\mathbb{S}^1, z)$ et $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ pour tout z dans le cercle, et que à un bord près, $\alpha * \beta = \alpha + \beta$ pour $\alpha, \beta \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. On conclut donc que $H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \simeq \text{Ab}(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)) = \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \langle \gamma \rangle \simeq \mathbb{Z}$. De manière générale, si X est connexe par arcs, le théorème de HUREWICZ nous donne un isomorphisme de groupes $\text{Ab}(\pi_1(X, *)) \simeq H_1(X; \mathbb{Z})$.

Par ailleurs, choisir un générateur de \mathbb{S}^1 c'est l'orienter, et de manière générale, choisir un générateur de $H_n(X; \mathbb{Z})$ pour X compacte connexe de dimension n , c'est l'orienter.

II Homologie relative

On a une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A; M) \longrightarrow C_\bullet(X; M) \longrightarrow C_\bullet(X, A; M) \longrightarrow 0$$

qui induit une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(A; M) & \longrightarrow & H_n(X; M) & \longrightarrow & H_n(X, A; M) & & \\ & & & & \downarrow \delta_n & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ H_{n-1}(A; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(X; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(X, A; M) & & \end{array}$$

Homologie du disque relative au cercle

En appliquant cela à la paire $(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)$, comme \mathbb{D}^2 est contractile, $H_0(\mathbb{D}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $H_n(\mathbb{D}^2; \mathbb{Z}) = 0$ pour $n > 0$. Cela nous donne donc pour $n > 1$ la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Soit $H_n(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \simeq H_{n-1}(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$. On a également la suite exacte

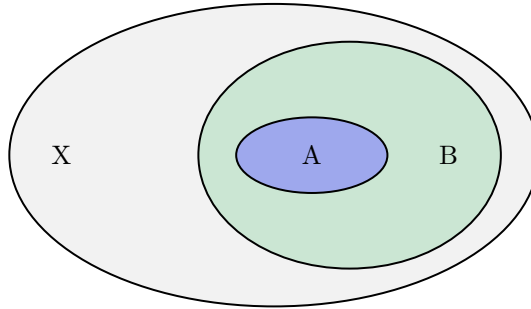
$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

On en déduit $H_0(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = 0$ et $H_1(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = 0$. Cela nous donne :

- $H_2(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$
- $H_n(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = 0$ si $n \neq 2$.

Embranchements d'homologies relatives

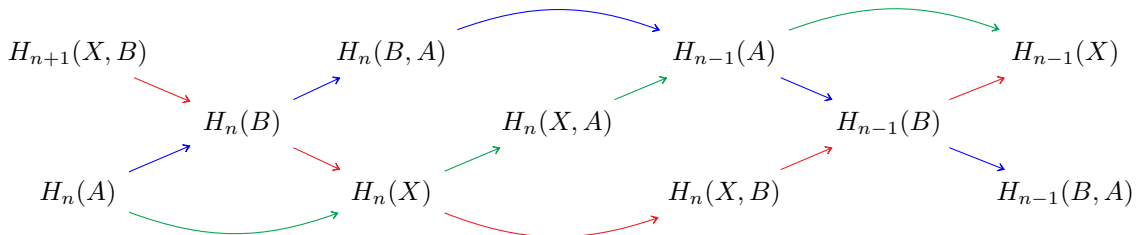
Soit $A \subset B \subset X$, on a 3 paires d'espaces (B, A) , (X, A) et (X, B) .



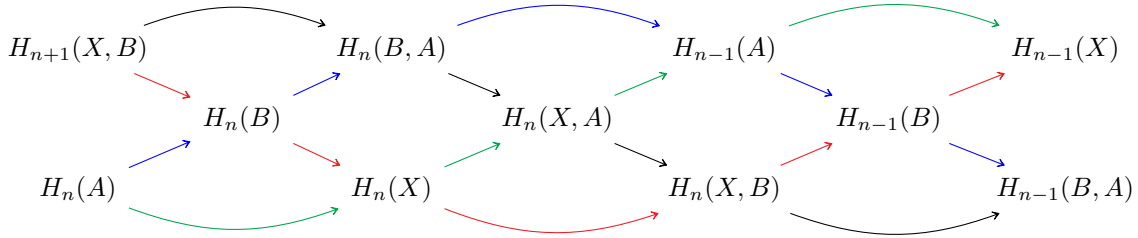
Cela nous donne 3 suites exactes courtes :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C_\bullet(A) &\longrightarrow C_\bullet(B) \longrightarrow C_\bullet(B, A) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow C_\bullet(A) &\longrightarrow C_\bullet(X) \longrightarrow C_\bullet(X, A) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow C_\bullet(B) &\longrightarrow C_\bullet(X) \longrightarrow C_\bullet(X, B) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

On a alors 3 suites exactes longues d'homologies s'imbriquant en un diagramme commutatif :



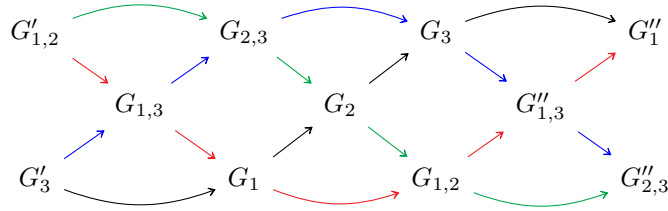
Or on a bien des injections naturelles $C_\bullet(B, A) \rightarrow C_\bullet(X, A)$ et $C_\bullet(X, A) \rightarrow C_\bullet(X, B)$, on peut donc compléter le diagramme ainsi



Or nous disposons d'un théorème purement algébrique pour conclure une éventuelle exactitude de la suite noire.

LEMME (Wall):

On considère le diagramme commutatif en tresses suivant :



alors l'exactitude des brins colorés implique celle du brin noir (avec un seul indice à chaque fois).

preuve: Cette preuve est purement algébrique et consiste uniquement en de la chasse aux diagrammes. On notera que les notations des indices ne sont pas laissées au hasards ; comme les couleurs (R,G,B), le brin dont les éléments ont toujours 1 en indices sont en rouge, 2 en vert et 3 bleu. Seul le brin dont tous les éléments n'ont qu'un seul indice est en noir, on le numérotera en tant que brin 0. Pour plus de simplicité, on notera en minuscule avec les mêmes indices et apostrophes les éléments des ensembles, afin de ne pas avoir à tout définir à chaque fois.

À cela on rajoute les notations :

- $\exists b_{1,3} \rightarrow a_1$ pour dire que $b_{1,3} \in G_{1,3}$ est un antécédent de $a_1 \in G_1$ via la bonne flèche.
- $a_1 \rightarrow b_{1,2}$ pour définir $b_{1,2} \in G_{1,2}$ comme l'image de $a_1 \in G_1$ par la bonne flèche.

On commence par l'exactitude en G_2 pour la suite $G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3$.

- ⊂ On suppose $a_2 \rightarrow 0_3$, alors si $a_2 \rightarrow a_{1,2}$, on a $a_{1,2} \rightarrow 0''_{1,3}$ par commutativité. L'exactitude nous donne $\exists a_1 \rightarrow a_{1,2}$.
On pose $a_1 \rightarrow b_2$, on a $a_2 - b_2 \rightarrow 0_{1,2}$, par exactitude, $\exists a_{2,3} \rightarrow a_2 - b_2$. Comme $a_1 \rightarrow b_2$, on a $b_2 \rightarrow 0_3$, donc $a_2 - b_2 \rightarrow 0_3$ et par commutativité $a_{2,3} \rightarrow 0_3$, par exactitude, $\exists a_{1,3} \rightarrow a_{2,3}$.
On pose $a_{1,3} \rightarrow b_1$, comme $a_{1,3} \rightarrow a_{2,3} \rightarrow a_2 - b_2$, on a $b_1 \rightarrow a_2 - b_2$, donc $a_1 + b_1 \rightarrow b_2 + a_2 - b_2 = a_2$ on a l'inclusion retour.
- ⊃ On suppose maintenant $\exists a_1 \rightarrow a_2$. On pose $a_2 \rightarrow a_3$ et $a_2 \rightarrow a_{1,2}$. Par commutativité $a_{1,2} \rightarrow 0''_{1,3}$, donc $a_3 \rightarrow 0''_{1,3}$. Par exactitude, $\exists a_{2,3} \rightarrow a_3$.
On a $a_{2,3} \rightarrow b_2$ par commutativité, $b_2 \rightarrow a_3$, donc $a_2 - b_2 \rightarrow 0_3$, par le résultat précédent, $\exists b_1 \rightarrow a_2 - b_2$.
On a donc $b_1 - a_1 \rightarrow b_2$, et comme $a_{2,3} \rightarrow b_2 \rightarrow 0_{1,2}$, par commutativité $b_1 - a_1 \rightarrow 0_{1,2}$, donc par exactitude, $\exists a_{1,3} \rightarrow b_1 - a_1$, or $a_{1,3} \rightarrow b_{2,3} \rightarrow 0_3$, et par commutativité, $b_{2,3} \rightarrow b_2$, donc $b_2 \rightarrow 0_3$, ainsi $a_2 \rightarrow 0_3$.

Ensuite l'exactitude en G_3 .

- ⊃ Si $\exists a_2 \rightarrow a_3$, alors $a_2 \rightarrow a_{1,2} \rightarrow a'_{1,3} \rightarrow 0''_1$, donc par commutativité $a_3 \rightarrow 0''_1$.
- ⊂ Si $a_3 \rightarrow 0''_1$, on pose $a_3 \rightarrow a'_{1,3}$, par commutativité, $a_{1,3} \rightarrow 0''_1$, donc par exactitude, $\exists a_{1,2} \rightarrow a'_{1,3}$.
Comme $a'_{1,3} \rightarrow 0''_{2,3}$, par exactitude, $\exists a_2 \rightarrow a_{1,2}$. On pose $a_2 \rightarrow b_3$, par commutativité, on a $a_3 - b_3 \rightarrow 0_1, 3''$, donc par exactitude, $\exists a_{1,3} \rightarrow a_3 - b_3$.
On a alors $a_{1,2} \rightarrow b_2$, et par commutativité, $a_2 + b_2 \rightarrow b_3 + (a_3 - b_3) = a_3$ ce qui conclut.

Enfin, l'exactitude en G_1 .

- ⊃ Si $\exists a'_3 \rightarrow a_1$, alors comme $a'_3 \rightarrow a_{1,3} \rightarrow 0_{2,3} \rightarrow 0_2$, par commutativité, on a $a'_3 \rightarrow a_1 \rightarrow 0_2$.
- ⊂ Soit $a_1 \rightarrow 0_2$, par commutativité, $a_1 \rightarrow 0_{1,2}$, donc par exactitude, $\exists a_{1,3} \rightarrow a_1$. On a $a_{1,3} \rightarrow a_{2,3}$ et par commutativité, $a_{2,3} \rightarrow 0_2$. Ainsi, par exactitude, $\exists a'_{1,2} \rightarrow a_{2,3}$. $a'_{1,2} \rightarrow b_{1,3}$, on a donc $b_{1,3} \rightarrow 0_1$, et $a_{1,3} - b_{1,3} \rightarrow 0_{2,3}$, donc par exactitude $\exists a'_3 \rightarrow a_{1,3} - b_{1,3}$, on a donc par commutativité $a'_3 \rightarrow a_1 - 0_1 = a_1$, ce qui conclut. \square

Grâce à ce lemme, on conclut qu'on a une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(B, A) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, B) & & \\ & & & & \searrow & \delta_n & \\ & & & & & & \\ \curvearrowright & & & & & & \\ & & H_{n-1}(B, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X, B) \end{array}$$

Homologie réduite

Le complexe réduit $\tilde{H}_\bullet(X; M)$ obtenue à partir de complexe $C_\bullet(X; M)$ augmenté en -1 via

$$\begin{array}{ccc} \epsilon : C_0(X; M) & \longrightarrow & M \\ & & x \longmapsto 1 \end{array}$$

est quasiment isomorphe au complexe réduit $C_\bullet(X, \{*\}; M)$.

En effet, pour $n > 0$, on a $\tilde{H}_n(X; M) = H_n(X; M)$, et la suite exacte longue pour l'homologie réduite nous donne pour $n > 1$

$$0 \longrightarrow H_n(X; M) \longrightarrow H_n(X, \{*\}; M) \longrightarrow 0$$

Le résultat est donc valable dans ce cas.

Un peu plus bas, on a

$$0 \longrightarrow H_1(X; M) \longrightarrow H_1(X, \{*\}; M) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\bar{i}_*} H_0(X; M) \longrightarrow H_0(X, \{*\}; M) \longrightarrow 0$$

et \bar{i}_* est injective, donc $H_1(X, \{*\}; M) \simeq H_1(X; M) \simeq \tilde{H}_1(X; M)$.

Pour l'isomorphisme en 0, on a une application surjective

$$\begin{array}{ccc} C_0(X; M) & \longrightarrow & \ker \epsilon \\ & & x \longmapsto x - * \end{array}$$

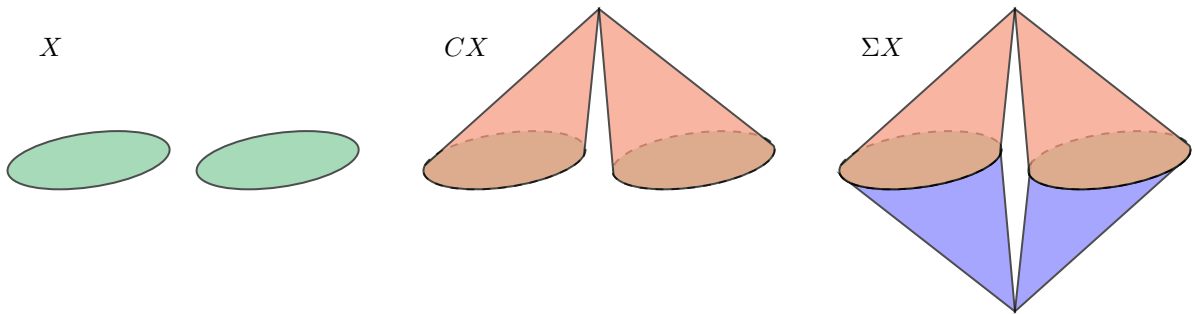
dont le noyau est $C_0(*; M)$, donc elle induit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} C_0(X, \{*\}; M) & \longrightarrow & \ker \epsilon \\ & & [x] \longmapsto x - * \end{array}$$

En quotientant des deux côtés par $B_0(X; M)$, on obtient $H_0(X, \{*\}; M) \simeq \tilde{H}_0(X; M)$

Cône et suspension

Soit X un espace topologique, on note CX son cône défini par $CX := X \times I / X \times \{1\}$ et ΣX sa suspension définie par $\Sigma X := CX / X \times \{0\}$. Voici une proposition de représentation de ces ensembles.



III Invariance par homotopie

On va reprouver le théorème d'équivalence des définitions d'homotopie, en ayant une vision plus globale de la technique utilisée. Cette méthode nous donne également une explication à la convention de KOSZUL.

Première méthode

Tâchons de trouver une façon de passer de $\Delta_m \times \Delta_n$ à Δ_{m+n} en découpant le polyèdre $\Delta_m \times \Delta_n$ en sommes formelles de $m + n$ -simplexes.

Pour choisir les sommets à sélectionner, revenons sur le découpage opéré pour montrer l'équivalence entre les deux définitions d'homotopie.

Cette fois nous avons un découpage qui nous ammenait de $\Delta_m \times [0, 1] \simeq \Delta_m \times \Delta_1$ à Δ_{m+1} .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & (e_n, 1) \\
 & & & & & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \\
 & & & & & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & (e_i, 1) \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 (e_0, 0) & \longrightarrow & (e_1, 0) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & (e_i, 0)
 \end{array}$$

DÉFINITION (Chemin bicroissant):

Un *chemin bicroissant* de $[l]$ vers $[m] \times [n]$ est la donnée d'une application $\gamma : [m+n] \rightarrow [m] \times [n]$ telle que $\forall k \leq l$,

$$\pi_1 \circ \gamma(k+1) \geq \pi_1 \circ \gamma(k) \quad \text{et} \quad \pi_2 \circ \gamma(k+1) \geq \pi_2 \circ \gamma(k)$$

On dit qu'il est *strictement bicroissant* s'il est bicroissant et injectif.

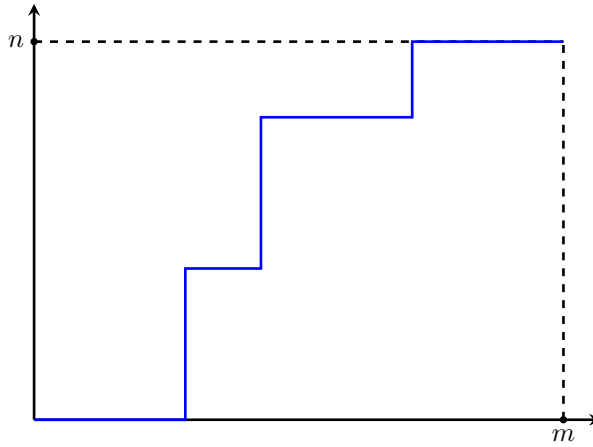
DÉFINITION-PROPOSITION (Chemin complet):

Soit $\gamma : [m+n] \rightarrow [m] \times [n]$ un chemin bicroissant, alors γ est strictement bicroissant ssi $\gamma(k)$ et $\gamma(k+1)$ sont de distance au plus 1 pour la norme 1 et

- $\gamma(0) = (0, 0)$
- $\gamma(m+n) = (m, n)$

Dans ce cas, on dira que c'est un *chemin complet* de paramètres (m, n) , on note $\Gamma(m, n)$ l'ensemble de ces chemins.

Voici un exemple de chemin complet de paramètres (5, 7).



DÉFINITION (Longueur d'un chemin complet):

Soit γ un chemin complet de paramètres (m, n) , On appelle *virage à droite* de γ , tout point $k \in [m+n]$ tel que $\gamma(k+1) - \gamma(k) = (1, 0)$ et $\gamma(k) - \gamma(k-1) = (0, 1)$ avec pour convention $\gamma(-1) = (0, -1)$ et $\gamma(m+n+1) = (m+1, n)$. On note $V^d(\gamma) = (v_0^d < \cdots < v_r^d)$ l'ensemble ordonné de ses virages à droite.

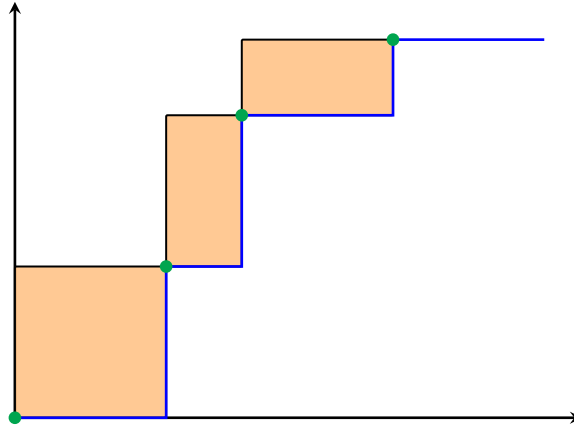
Pour $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, on pose $a(x, y) := xy$. On définit alors la *longueur* du chemin γ par

$$|\gamma| := \sum_{i=1}^r a(v_i^d - v_{i-1}^d)$$

remarque: Nous aurions pu choisir de façon analogue les virages à gauche, cela revient d'ailleurs à considérer les virages à droite en inversant les rôles de m et n . Attention les deux conventions ne donnent pas les mêmes longueurs

On remarquera également que les virages à droite (ou à gauche) qualifient de façon minimaliste un chemin complet, la longueur traduit donc bien les mic-macs que peut faire le chemin; plus le chemin est court plus le chemin part en diagonale, à l'inverse plus il est long, plus il va être carré (à exception près du chemin qui commencent par monter). On peut se convaincre que c'est une caractérisation utile et pas trop triviale des chemins, sans être d'une complexité monstrueuse.

Enfin, ci-dessous gît une explication géométrique de la longueur d'un chemin comme la somme des aires des rectangles au dessus de la courbe.



On a bien une généralisation de la méthode utilisée pour l'équivalence des définitions d'homotopie, car les chemins complets de paramètres $(n, 1)$ sont exactement les $\gamma_i = [(0, 0), \dots, (i, 0), (i, 1), \dots, (n, 1)]$. Ils étaient alors sommés avec le signe $(-1)^i$, or $i = |\gamma_i|$.

On peut alors généraliser ce résultat. Soit M un A -module à droite et N un A -module à gauche, on considère les complexes de chaînes $C_n(X, M)$ et $C_m(Y, N)$ (qui sont de toute évidence, par leur nature de module libre, des A -modules).

On peut alors poser

$$\begin{aligned} C_m(X; M) \times C_n(Y; N) &\longrightarrow C_{m+n}(X \times Y; M \otimes_A N) \\ (\sigma, \tau) &\longmapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} (-1)^{|\gamma|} (\sigma, \tau) \circ \Delta[\gamma] \end{aligned}$$

Cette application est bilinéaire et induit ainsi

$$\phi_{m,n} : C_m(X; M) \otimes_A C_n(Y; N) \longrightarrow C_{m+n}(X \times Y; M \otimes_A N)$$

LEMME:

Soit A un anneau, X et Y deux espaces topologiques et n et m deux entiers, on a alors

$$\partial \circ \phi_{m,n}(\sigma \otimes \tau) = \phi_{m-1,n}(\partial\sigma \otimes \tau) + (-1)^m \phi_{n,m-1}(\sigma \otimes \partial\tau)$$

On comprend alors pourquoi la convention de KOSZUL est celle-ci. Cela nous donne un morphisme bien utile de complexes.

$$\Phi : C_\bullet(X; M) \otimes_A C_\bullet(Y; N) \longrightarrow C_\bullet(X \times Y; M \otimes_A N)$$

On peut montrer que c'est un quasi-isomorphisme. La formule de KÜNNETH nous donne alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{m+n=k} H_m(X; M) \otimes_A H_n(Y; N) \longrightarrow H_k(X \times Y; M \otimes_A N) \longrightarrow \bigoplus_{m+n=k-1} \text{Tor}^A(H_m(X; M), H_n(Y; N)) \longrightarrow 0$$

Cependant c'est une façon très compliquée de construire l'équivalence, une vision plus simple est donnée ci-dessous.

Construction du produit simplicial

Le travail reste de toute évidence sur un lien entre $\Delta_m \times \Delta_n$ et Δ_{m+n} . On remarque de façon assez évidente que Δ_k est contractile au sens topologique (et donc $\Delta_m \times \Delta_n$ aussi), il suffit de considérer une rétraction sur e_0 . On a en réserve le théorème suivant (assez important).

THÉOREME:

Si X est un espace topologique contractile, alors son complexe réduit est contractile.

COROLLAIRE:

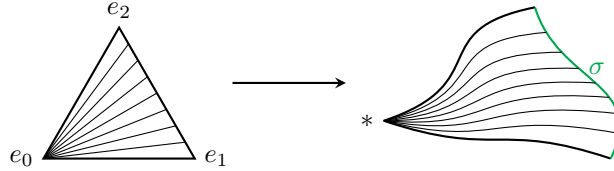
Si X est un espace topologique contractile, $\forall n > 0, H_n(X; M) = 0$ et $H_0(X; M) = M$

preuve: Soit $F : X \times I \rightarrow X$ continue qui vérifie $F(\star, 0) = \text{id}_X$ et $F(\star, 1) = \star$. On va maintenant construire à partir de $\sigma : \Delta_{n-1} \rightarrow X$ une application $D\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ qui va se dériver "correctement", l'objectif est d'avoir $\text{id} = \partial D + D\partial$

On pose alors en 0, $D(1) = \star$ et pour $n \geq 0, D\sigma = F(\sigma d_0, p_0)$, soit

$$D\sigma \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \right) = F \left(\sigma \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} e_i \right), \lambda_0 \right)$$

avec $\lambda_0 + \lambda = 1$. On l'appelle la *construction en cône*.



D s'étend de manière unique en un morphisme $D : \tilde{C}_{n-1}(X; M) \rightarrow \tilde{C}_n(X; M)$. Il est rapide de calculer que

- $\epsilon D = \text{id}_M$.
- $d_0 D\sigma = \sigma$.
- Pour $i > 0, d_i D\sigma = Dd_{i-1}\sigma$.

Cela nous donne alors pour $n > 0, x \in C_{n-1}(X; M)$,

$$\partial(Dx) = d_0(Dx) + \sum_{i=1}^n (-1)^i d_i(Dx) = D(d_0x) - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j D(d_jx) = x - D(\partial x)$$

ainsi, $\text{id} = \partial D + D\partial$, ce qui conclut la preuve. □

On va maintenant pouvoir se construire une application bilinéaire

$$\otimes : C_m(X; M) \times C_n(Y; N) \rightarrow C_{m+n}(X \times Y; M \otimes N)$$

ce *produit simplicial* sera en réalité le même que l'application $\phi_{m,n}$ définie plus tôt, mais afin de prouver le lemme sur la différentielle, il convient de le définir autrement.

DÉFINITION-PROPOSITION (Produit simplicial):

Il existe une application bilinéaire

$$\otimes : C_m(X; M) \times C_n(Y; N) \rightarrow C_{m+n}(X \times Y; M \otimes N)$$

telle que :

- (i) Pour $x \in X, y \in Y, \sigma : \Delta_m \rightarrow X, \tau : \Delta_n \rightarrow Y$,
 - $\sigma \otimes y(v) = (\sigma(v), y)$.
 - $x \otimes \tau(w) = (x, \tau(w))$.
- (ii) (naturalité) Pour $f : X \rightarrow X'$ et $g : Y \rightarrow Y'$ continues, on a

$$(f \times g)_*(a \otimes b) = f_*(a) \otimes g_*(b)$$

- (iii) (formule au bords) $\partial(a \otimes b) = \partial a \otimes b + (-1)^{\text{deg } a} a \otimes \partial b$.

Et deux telles applications seront égales à un bord près.

preuve: Pour commencer, voici une affirmation : toute forme bilinéaire satisfaisant (ii) est définie par son action sur les application identité $\text{id}_k : \Delta_k \rightarrow \Delta_k$.

En effet, il faut et suffit, pour σ et τ des applications continues de degrés m et n , de remarquer que $\sigma = \sigma_*(\text{id}_m)$ et $\tau = \tau_*(\text{id}_n)$. On a alors

$$\sigma \otimes \tau = \sigma_*(\text{id}_m) \otimes \tau_*(\text{id}_n) = (\sigma \times \tau)_*(\text{id}_m \otimes \text{id}_n)$$

La preuve est donc simplifiée à vérifier l'existence et l'unicité à un bord près d'une application vérifiant les points (i) et (iii) pour l'identité.

Pour ce faire, on va la construire par récurrence en utilisant la propriété (iii), cela nous assurera qu'une telle construction existe et est unique à un bord près.

- Au rang 0 c'est le produit cartésien (il suffit de calculer le bord (i) avec un chemin constant à gauche).
- Pour $m + n = 1$, la définition est donnée par (i).
- Si la construction a déjà été faite pour $m + n - 1$, on va reconstruire $\text{id}_m \otimes \text{id}_n$ grâce à son bord.
 $c := \partial \text{id}_m \otimes \text{id}_n + (-1)^m \text{id}_m \otimes \partial \text{id}_n \in C_{m+n-1}(\Delta_m \times \Delta_n; \mathbb{Z})$ est bien définie, on calcule alors son bord.

$$\partial c = \partial^2 \text{id}_m \otimes \text{id}_n + (-1)^{m-1} \partial \text{id}_m \otimes \partial \text{id}_n + (-1)^m \partial \text{id}_m \otimes \partial \text{id}_n + (-1)^m \text{id}_m \otimes \partial^2 \text{id}_n = 0$$

La chaîne c est donc un cycle, or $\Delta_m \times \Delta_n$ est contractile, donc son homologie est nulle pour $i > 0$, ce qui est notre cas.

Il existe donc $t \in C_{m+n}(\Delta_m \times \Delta_n; \mathbb{Z})$ tel que $\partial t = c$. On n'a qu'à poser alors $\text{id}_m \otimes \text{id}_n := t$ (unique à un bord près car les cycles sont les bords). \square

Les résultats de la sections sont toujours valables bien entendu.

Équivalence des définitions d'homotopie

On a maintenant assez d'outils pour prouver sans trop de peine l'équivalence, on rappelle le théorème.

THÉOREME (*Équivalence topologique et homologique de l'homotopie*):

Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques, munie de deux applications continue f_0 et f_1 entre eux et M et N deux groupes abéliens. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) f_{0*} et f_{1*} homotopes en tant que morphismes du complexe $C_\bullet(X, A; M)$ au complexe $C_\bullet(Y, B; N)$.
- (ii) f_0 et f_1 sont relativement homotopes, i.e. il existe $H : I \times X \rightarrow Y$ continue avec
 - $H(0, \star) = f_0$.
 - $H(1, \star) = f_1$.
 - $H(\star, A) \subset B$.

notation: Pour (X, A) et (Y, B) deux paires topologiques, on pose

$$(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B))$$

LEMME:

Le produit simplicial $\otimes : C_m(X; M) \otimes C_n(Y; N) \rightarrow C_{n+m}(X \times Y; M \otimes N)$ induit un autre produit simplicial $\otimes : C_m(X, A; M) \otimes C_n(Y, B; N) \rightarrow C_{n+m}((X, A) \times (Y, B); M \otimes N)$ de manière naturelle.

preuve: Déjà, pour $a \in C_m(X; M)$ et $b \in C_n(Y; N)$ tels que $\partial a \in C_{m-1}(A; M)$ et $\partial b \in C_{n-1}(B; N)$, on a

$$\partial(a \otimes b) = \partial a \otimes b + (-1)^m a \otimes \partial b \in C_{n+m}((X, A) \times (Y, B); M \otimes N)$$

donc le produit des cycles de (X, A) et de (Y, B) s'envoie bien sur les cycles de $(X, A) \times (Y, B)$. Il s'agit maintenant de vérifier que la classe d'équivalence de l'image ne change pas à un bord près de chaque côté.

$$(a + \partial a') \otimes (b + \partial b') = a \otimes b + \partial a' \otimes b + a \otimes \partial b' + \partial a' \otimes \partial b' = a \otimes b + \partial(a' \otimes b) \pm \partial(a \otimes b') + \partial(a' \otimes b') + c$$

où $c \in C_{n+m}((X, A) \times (Y, B); M \otimes N)$. Cela suffit à achever la preuve. \square

Le cas qui nous intéresse évidemment pour la preuve d'équivalence est le cas $X = I$. En notant γ l'application affine qui envoie e_0 sur 0 et e_1 sur 1. On a alors $\partial \gamma = \gamma_1 - \gamma_0$ où γ_t envoie e_0 sur t .

Faisons alors la fameuse preuve.

preuve: Le sens aller est une conséquence directe de l'homotopie homologique en degré 0. Concentrons nous plutôt sur le gros morceau : le sens retour.

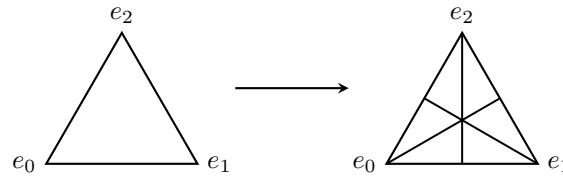
Soit F l'homotopie relative entre f_0 et f_1 . On a alors $F_* : C_\bullet(I \times X, I \times A) \rightarrow C_\bullet(Y, B)$. On note $s_i, i \in \{0, 1\}$ la section qui envoie X sur $\{i\} \times X = \{i\} \otimes X$. On a alors $F \circ s_i = f_i$.

On pose alors pour c une chaîne, $Dc = c \otimes \gamma$, on a $\partial(Dc) = \gamma_{e_1} \otimes c - \gamma_{e_0} \otimes c + D(\partial c) = s_1 - s_0 + D(\partial c)$.

On pose alors pour l'homotopie $S = F_* \circ D$. On a $\partial(F_* \circ D) + (F \circ D)\partial = F_*(\partial D + D\partial) = F_* \circ s_1 - F_* \circ s_0 = f_{1*} - f_{0*}$. \square

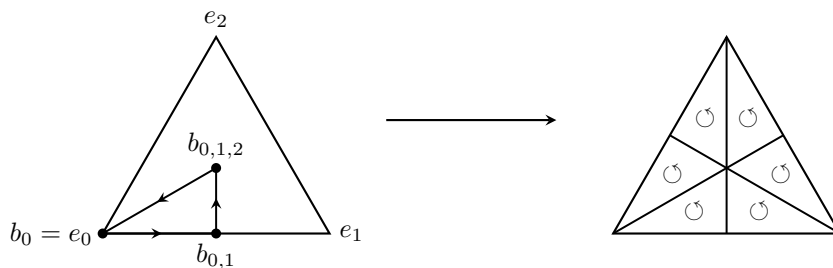
IV Excision et suites de Mayer-Vietoris

idée: Pour $x \in \mathbb{Z}_n(X; \mathbb{Z})$, on a x de la forme $X = \sum_{i=1}^m \pm \sigma_i$, avec $\sigma_i : \Delta_n \rightarrow X$ car x est un cycle. Si on choisit un des σ_i , le simplexe Δ_n peut se diviser en sous simplexes, par exemple pour $n = 2$.



Il faudrait alors s'assurer que l'on peut caractériser Δ_n par ces recollements de sous-simplexes... Cela exige de renuméroter ces sous-simplexes. Une technique est de "retenir" les virages opérés par le sous-simplexe : on veut conserver l'orientation dans certains cas et l'inverser dans d'autres, et à chaque fois partir des sommets de notre premier simplexe. Par exemple pour le sous-triangle en bas à gauche, on part du sommet 0, on se dirige vers le 1 puis à mi-chemin, on tourne à gauche vers le sommet 2 et on revient vers le sommet 0 au tiers du chemin.

En posant $b_{i_1, \dots, i_r} = \text{Bar}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$, on observe :



On pose donc pour $n \in \mathbb{N}$, la décomposition

$$\Delta_n \mapsto \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}([n])} \epsilon(\alpha) [b_{\alpha(1)}, b_{\alpha(1), \alpha(2)}, \dots, b_{\alpha(0), \dots, \alpha(n)}] = \Delta_n \mapsto \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}([n])} \epsilon(\alpha) B(\alpha)$$

Cette idée prend forme dans le lemme suivant, mais avec plus de subtilité, car au lieu de subdiviser Δ_n , on va subdiviser X et s'assurer qu'on peut se replacer dans des sous-simplexes.

Lemme des petites chaînes

LEMME (Petites chaînes):

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X dont les intérieurs recouvrent X . Notons $C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(X; M)$ le sous-complexe de $C_{\bullet}(X; M)$ engendré par les simplexes $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ tq $\exists i \in I, \sigma(\Delta_n) \in U_i$.

Le morphisme

$$C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(X; M) \longrightarrow C_{\bullet}(X; M)$$

induit par les inclusions est alors un quasi-isomorphisme.

Avant de le prouver, on va démontrer plusieurs lemmes bien utiles.

Le premier va traiter de la subdivision d'un simplexes en sous-simplexes de manière fonctorielle. Au lieu de s'embêter à faire cette subdivision comme présentée juste avant, nous allons faire la même opération que pour le produit simplicial : la construire par récurrence en conservant les propriétés de recollement recherchées.

Pour ce faire, prenons un nouveau regard sur la subdivision que l'on opère ; si l'on subdivise le bord du 2-simplexe standard selon notre méthode, on obtient une somme (au signe près) de simplexes du type $[e, b]$ où e est un sommet et b un barycentre entre deux de ces sommets. Si on "relie" ces simplexes au barycentre des 3 sommets, on obtient (au signe près) la subdivision recherchée. Mettons en pratique cette construction en cône pour construire la subdivision par récurrence.

DÉFINITION:

Soit $\sigma = [v_0, \dots, v_p] : \Delta_p \rightarrow \Delta_q$ un p -simplexe affine et v un point de Δ_q , on appelle le *cône* de σ depuis le sommet v l'application $v\sigma := [v, v_0, \dots, v_p] : \Delta_{p+1} \rightarrow \Delta_q$.

Cette définition s'étend par additivité aux chaînes de simplexes affines.

On définit alors la *subdivision barycentrique* $\Upsilon : L_p(\Delta_q; \mathbb{Z}) \rightarrow L_p(\Delta_q; \mathbb{Z})$ par

$$\Upsilon(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{pour } p = 0 \\ \underline{\sigma} \Upsilon(\partial \sigma) & \text{pour } p > 0 \end{cases}$$

Où $\underline{\sigma}$ est le barycentre des images des sommets du p -simplexe standard par σ et L_p le sous-complexe de C_p engendré par les applications affines.

remarque: Nous n'avons alors plus à nous préoccuper sur redécoupage laborieux des sommes ou même des signes, le tout se fera simplement grâce à cette définition par récurrence.

LEMME:

Υ est un morphisme de complexes homotope à l'identité.

preuve: Le fait que ce soit un morphisme de complexes est assez direct.

- Pour $p = 0$, on a $\partial\Upsilon(\sigma) = \partial\sigma = \Upsilon(\partial\sigma)$.
- Si on a vérifié la commutativité aux rangs inférieurs, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\partial\Upsilon(\sigma) = \partial(\underline{\sigma}\Upsilon(\partial\sigma)) = \Upsilon(\partial\sigma) - \underline{\sigma}(\partial\Upsilon(\partial\sigma)) = \Upsilon(\partial\sigma) - \underline{\sigma}\Upsilon(\partial^2\sigma) = \Upsilon(\partial\sigma)$.

Passons maintenant à l'homotopie. On nommera T l'application qui fera l'homotopie entre Υ et id_* . Encore une fois, on le définit par récurrence :

$$\mathcal{T}\sigma = \begin{cases} 0 & \text{pour } p = -1 \\ \underline{\sigma}(\Upsilon\sigma - \sigma - T(\partial\sigma)) & \text{pour } p \geq 0 \end{cases}$$

- Au degré 0, on a bien $\Upsilon = \text{id}$, donc le problème est réglé.
- Au degré $p > 0$, on a $\partial T\sigma = \Upsilon\sigma - \sigma - T(\partial\sigma) - \underline{\sigma}\partial(\Upsilon\sigma - \sigma - T(\partial\sigma)) = (\Upsilon - \text{id})\sigma - T\partial\sigma - \underline{\sigma}(\Upsilon\partial\sigma - \partial\sigma - (\Upsilon\partial\sigma - \partial\sigma - T\partial^2\sigma)) = (\Upsilon - \text{id})\sigma - T\partial\sigma$

Ce qui conclut quant à l'homotopie. \square

On se doute qu'on va devoir subdiviser assez de fois pour être "assez petit", on est alors content d'avoir défini Υ pour tous les simplexes affines, cela nous dit qu'on va pouvoir l'itérer d'une bonne manière.

COROLLAIRE:

Pour $k \in \mathbb{N}$, le morphisme de complexes Υ^k est homotope à l'identité.

Nous avons alors besoin d'un résultat qui nous garantit que la taille des sous-simplexes de la subdivision est suffisamment petite.

LEMME:

Pour σ un simplexe de degré p , tout simplexe de la chaîne $\Upsilon\sigma$ est de diamètre au plus $\frac{p}{p+1}\text{diam}(\sigma)$.

Pour une preuve de ce lemme (qui n'aura pas d'utilité supérieure dans le cours), voir [3, p 226].

COROLLAIRE:

Pour σ un simplexe de degré p , et k un entier, tout simplexe de la chaîne $\Upsilon^k\sigma$ est de diamètre au plus $(\frac{p}{p+1})^k\text{diam}(\sigma)$, ce qui tend uniformément vers 0.

Attaquons enfin la preuve du lemme des petites chaînes.

preuve: Nous devons prouver que l'application $H_\bullet^{\mathcal{U}}(X; M) \xrightarrow{f} H_\bullet(X; M)$ induite par l'inclusion est un isomorphisme. Bien évidemment, pour c une chaîne, on considèrera pour α un morphisme défini uniquement sur les simplexes affines, qu'il s'étend aux chaînes en général via α^* .

- Pour l'injectivité, ce n'est pas aussi évident qu'on pourrait le penser, à cause du quotient. Soit $c \in C_p^{\mathcal{U}}(X; M)$ un cycle. On suppose qu'il existe une chaîne $t \in C_{p+1}^{\mathcal{U}}(X; M)$ telle que $c = \partial t$, il faut montrer qu'on peut aussi bien choisir t' dans $C_{p+1}^{\mathcal{U}}$ comme bord.

Le lemme de LEBESGUE nous assure qu'il existe $\delta > 0$ tel que tout ensemble de diamètre strictement inférieur à δ soit inclus dans un des ouverts du recouvrement $t^{-1}\mathcal{U}$ donné par les préimages de tous les simplexes sommés dans la chaîne t . On a alors $k \in \mathbb{N}$ tq $\Upsilon^k(t)$ soit une somme de simplexes dont la source est de diamètre strictement inférieur à δ . On peut donc placer chacun de ces sous simplexes dans un ouvert de $t^{-1}\mathcal{U}$, ce qui nous assure que $\Upsilon^k(t) \in C_{p+1}^{\mathcal{U}}(X; M)$. On a alors

$$\Upsilon^k(t) - t = T_k(\partial t) + \partial T_k(t) = T_k(c) + \partial T_k(t)$$

ainsi, on a

$$\partial\Upsilon^k(t) - \partial t = \partial T_k(c)$$

ce qui donne enfin

$$c = \partial(\Upsilon^k(t) - T_k(c)) \in B_p^{\mathcal{U}}(X; M)$$

Ce qui nous assure que $[c] = [0]$.

- Pour la surjectivité c'est la même rengaine; on se choisit $c \in \mathbb{Z}_p(X; M)$, et on veut se trouver $c' \in Z_p^{\mathcal{U}}(X; M)$ tel que $[c'] = [c]$. Nous allons bien évidemment choisir $\Upsilon^k(c)$ pour un k convenable. Rebelote pour le lemme de LEBESGUE, cette fois ci sur $c^{-1}\mathcal{U}$, on a donc bien k tel que $\Upsilon^k(c) \in C_p^{\mathcal{U}}(X; M) \cap Z_p(X; M) = Z_p^{\mathcal{U}}(X; M)$, et $\Upsilon^k(c) - c = T_k(\partial c) + \partial T_k(c) = \partial T_k(c)$. Ainsi $[\Upsilon^k(c)] = [c]$, ce qui résoud notre recherche d'antécédent. \square

Il est facile de généraliser ce lemme à l'homologie relative :

LEMME (Petites chaînes relatives):

Soit (X, A) une paire topologique et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X dont les intérieurs recouvrent X . Le morphisme

$$C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(X, A; M) \longrightarrow C_{\bullet}(X, A; M)$$

induit par les inclusions est alors un quasi-isomorphisme.

Avant de prouver ce lemme, montrons le suivant, très utile lorsque l'on travaille avec des suites exactes.

LEMME (des 5):

On considère le diagramme suivante dans une catégorie abélienne :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & G_3 & & & \\ & & & \downarrow h & & & \\ G_1 & \longrightarrow & G_2 & & G_4 & \longrightarrow & G_5 \\ & & & \uparrow & & & \\ & & & G'_3 & & & \end{array}$$

alors, si les lignes sont exactes, h est un isomorphisme.

preuve: Montrons l'injectivité et la surjectivité en deux temps.

- On suppose $a_3 \in G_3$ tq $h(a_3) = 0'_3$, alors $a_3 \rightarrow 0_4$ donc, par exactitude, $\exists a_2 \rightarrow a_3$. Par commutativité, on a $a_2 \rightarrow 0'_3$ donc, par exactitude, $\exists a_1 \rightarrow a_2$. On a ainsi $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow 0_3 = a_3$, donc h est injectif.
- Soit $a'_3 \in G'_3$, $a'_3 \rightarrow a_4 \rightarrow 0_5$ donc, par exactitude, $\exists a_3 \rightarrow a_4$. On a alors par commutativité $a'_3 - h(a_3) \rightarrow a_4 - a_4 = 0_4$ donc, par exactitude, $\exists a_2 \rightarrow a'_3 - h(a_3)$. On a $a_2 \rightarrow b_3$ et $h(a_3 + b_3) = h(a_3) + a'_3 - h(a_3) = a'_3$, donc h est surjectif. \square

COROLLAIRE:

On considère le diagramme suivante dans une catégorie abélienne :

$$\begin{array}{ccccccccc} G_1 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & G_4 & \longrightarrow & G_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ G'_1 & \longrightarrow & G'_2 & \longrightarrow & G'_3 & \longrightarrow & G'_4 & \longrightarrow & G'_5 \end{array}$$

Si les lignes sont exactes et $\forall i \neq 3, f_i$ est un isomorphisme, alors f_3 est un isomorphisme.

On peut maintenant prouver le lemme.

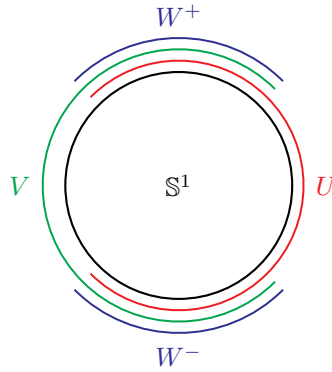
preuve: On pose $\mathcal{U} \cap A := (U \cap A)_{U \in \mathcal{U}}$. On a alors un morphisme de suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{\bullet}^{\mathcal{U} \cap A}(A; M) & \longrightarrow & C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(X; M) & \longrightarrow & C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(X, A; M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{\bullet}(A; M) & \longrightarrow & C_{\bullet}(X; M) & \longrightarrow & C_{\bullet}(X, A; M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

qui induit un morphisme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^{\mathcal{U}}(X, A; M) & \longrightarrow & H_n^{\mathcal{U} \cap A}(A; M) & \longrightarrow & H_n^{\mathcal{U}}(X; M) & \longrightarrow & H_n^{\mathcal{U}}(X, A; M) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\mathcal{U} \cap A}(A; M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X, A; M) & \longrightarrow & H_n(A; M) & \longrightarrow & H_n(X; M) & \longrightarrow & H_n(X, A; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(A; M) \end{array}$$

Un choix possible est $U := \left\{ z \in \mathbb{S}^1 \mid \operatorname{Re}(z) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ et $V := \left\{ z \in \mathbb{S}^1 \mid \operatorname{Re}(z) < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$. On note $W = W^+ \sqcup W^-$ leur intersection et sa décomposition en composantes connexes.



On a alors U, V, W^+ et W^- contractiles au sens topologique, leur homologie est donc concentrée en degré 0 et vaut \mathbb{Z} en ce point. On a donc $H_n(W; \mathbb{Z}) = \delta_0^n(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$.

Le théorème de MAYER-VIETORIS nous donne alors la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(W; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n(U; \mathbb{Z}) \oplus H_n(V; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \delta_n & & \\ \downarrow & & & & & & \\ H_{n-1}(W; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{n-1}(U; \mathbb{Z}) \oplus H_{n-1}(V; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Cela nous donne pour $n > 1$, $H_n(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = 0$ et la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{k=i'_1(\pi_1+\pi_2) \oplus i'_2(\pi_1+\pi_2)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{l=\pi'_1-\pi'_2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

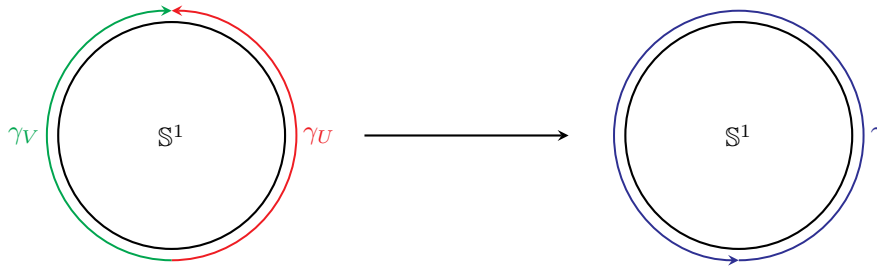
Cela nous donne alors directement $H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et $i = \operatorname{id} \oplus (-\operatorname{id})$

Intéressons nous alors aux générateurs des différentes homotopies pour trouver celui de l'homotopie du cercle.

- $H_0(W^+; \mathbb{Z}) = \langle [i]_W \rangle$ et $H_0(W^-; \mathbb{Z}) = \langle [-i]_W \rangle$.
- $H_0(U; \mathbb{Z}) = \langle [1]_U \rangle$ et $H_0(V; \mathbb{Z}) = \langle [-1]_V \rangle$.

Pour construire un générateur $[\gamma]$ de $H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$, on part de $[i]_W - [-i]_W$ qui engendre $\ker j$. Si on se replace dans $H_0(U; \mathbb{Z})$, $[i]_U - [-i]_U$ est le bord de γ_U et dans $H_0(V; \mathbb{Z})$, $[i]_V - [-i]_V$ est le bord de γ_V .

On pose alors tout simplement $[\gamma] = [\gamma_U - \gamma_V]$ comme générateur : le cycle positif.



Chapitre 2

Complexes et homologie cellulaires

Le but de cette section est de mettre en place une technique de calcul d'homologie pour des variétés bien spécifiques, appelées CW-complexes.

I Définitions et exemples

Commençons par définir de deux manières les CW-complexes.

DÉFINITION (CW-complexe #1):

Un CW-complexe est la donnée d'un espace topologique X séparé muni d'une application dimension $d : X \rightarrow \mathbb{N}$ (non continue) donnant une partition en cellules.

Une cellule C de dimension n est une composante connexe de $d^{-1}(\{n\})$.

À ces éléments, on ajoute les axiomes suivants :

- (i) Pour toute cellule C de dimension n , on a une application continue $\phi_C : \mathbb{D}^n \rightarrow X$ induisant un homéomorphisme de $\mathring{\mathbb{D}}^n$ vers C .
- (ii) Pour toute cellule C de dimension n , $\phi_C(\partial\mathbb{D}^n)$ est contenu dans un nombre fini de cellules de dimension $n-1$.
- (iii) Un sous-ensemble $A \subset X$ est fermé ssi $A \cap \overline{C}$ est fermé pour toute cellule C .

On notera $X^n := d^{-1}(\llbracket 0, n \rrbracket) = \bigcup_{d(C) \leq n} C$, que l'on appelle n -squelette.

On s'en doute déjà, mais la construction d'un CW-complexe amène à une réflexion basée sur la récurrence. En voici donc une autre définition qui construit X à partir de son n -squelette.

DÉFINITION (CW-complexe #2):

Un CW-complexe est la réunion X d'une suite d'espaces topologiques X^n définis par récurrence ainsi :

- X^0 est une réunion disjointe de singletons
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe I un ensemble, une famille d'applications $\phi_i : \partial\mathbb{D}^n \rightarrow X^{n-1}$. On pose alors

$$X^n = \left(X^{n-1} \sqcup \bigsqcup_{i \in I} \mathbb{D}_i^n \right) / \sim$$

où $x \in \partial\mathbb{D}_i^n \sim \phi_i(x) \in X^{n-1}$

On munit alors X de la topologie faiblement fermée, i.e. $A \subset X$ est fermé ssi $A \cap X^n$ est fermé dans X^n pour tout entier n .

Cette définition nous donne une manière plus récursive de construire un CW-complexe : nous n'avons pas besoin de nous situer dans un espace topologique fixé au départ.

PROPOSITION:

Les deux définitions de CW-complexes sont équivalentes à homéomorphisme près.

preuve: La preuve n'est pas très compliquée, il suffit de vérifier que la deuxième définition nous donne bien un CW-complexe selon la première (assez facile), et de se trouver un homéomorphisme depuis un CW-complexe selon la première définition jusqu'à une construction suivant la deuxième. La subtilité est de montrer la continuité, cependant cela n'est pas trop ardu grâce à la propriété de topologie faiblement fermée. \square

DÉFINITION-PROPOSITION (*Sous-complexe*):

Soit X un CW-complexe. $A \subset X$ est un *sous-complexe* de X si A est une union de cellules de X de sorte que pour toute cellule C de A , $\overline{C} \subset A$.

Un sous-complexe est en particulier un CW-complexe avec la topologie induite.

PROPOSITION:

Soit X un CW-complexe et $K \subset X$ un compact, alors K est inclus dans un sous-complexe fini, i.e. un sous-complexe composé d'un nombre fini de cellules et par conséquent fermé.

Ceci implique que l'homologie d'un CW-complexe se calcule à partir de celle de ses sous-complexes finis.

preuve: supposons que l'on ait un nombre infini de cellules de X dont l'intersection serait non-nulle avec K . On se donne $S = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble d'éléments de K tel que pour $i \neq j$, x_i et x_j ne se situent pas dans la même cellule.

Montrons que S est fermé dans X . Pour cela, il suffit de montrer que $S \cap X^n$ est fermé pour tout n ; on fait donc une récurrence.

(I) X^0 est discret, c'est donc direct car X est séparé.

(H) Si $s \cap X^{n-1}$ est fermé dans X^{n-1} , on regarde $S \cap X^n$. Pour C une cellule de dimension n , $\phi_C^{-1}(C)$ a au plus un élément donc est fermé et $\phi_C^{-1}(\partial S \cap X^{n-1})$ est également fermé, ainsi $\phi_C^{-1}(S \cap X^n)$ est fermé. Ainsi $S \cap X^n$ est fermé.

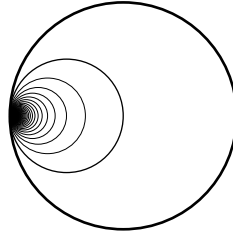
Ainsi nous avons un ensemble dénombrable fermé, cela nous donne que S est discret

À compléter □

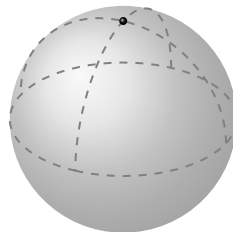
exemple: Voici une liste de CW-complexes (ou pas) plus ou moins classiques.

- Un CW-complexe de dimension 0 est un ensemble discret.
- Un CW-complexe de dimension 1 est un graphe non orienté.
- Les boucles d'oreilles hawaïennes données par l'union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{S}^1(1/n, 1/n)$ n'est pas un CW-complexe car son intersection avec le compact $\mathbb{B}^1(1/2, 1/2)$ présente un nombre infini de cellules.

Le souci ici est qu'on peut construire un lacet qui parcourt tout l'ensemble grâce au découpage de $[0, 1]$ et segments de taille $\frac{1}{2^n}$.



- L'union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{S}^1(1/n, 1/n)$, ainsi que le bouquet de n cercles sont des CW-complexes qui ont la même homotopie.
- Les sphères sont des CW-complexes, en effet, $\mathbb{S}^n = \mathbb{D}^n / \sim$ avec $x \sim y$ si $x, y \in \partial \mathbb{D}^n$. \mathbb{S}^n est donc un CW-complexe avec une 0-cellule (son pôle nord) et une n -cellule.



- Les inclusions $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \dots$ induisent les inclusions $\mathbb{P}^0(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \subset \dots \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \subset \dots$. Cela nous donne une suite croissante évidente de n -squelettes. En effet,

$$\mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{R}) = \{[x_0, \dots, x_k] | x_k \neq 0\} \simeq \mathbb{R}^k \times \{1\} \simeq \mathring{\mathbb{D}}^k$$

Cela nous donne alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un CW-complexe de dimension n , et $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ également.

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ a une cellule pour chaque dimension $\leq n$ et $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ a une cellule pour chaque dimension.

On a le même résultat pour les espaces projectifs complexes, seulement les cellules se trouvent seulement en dimension paire.

PROPOSITION:

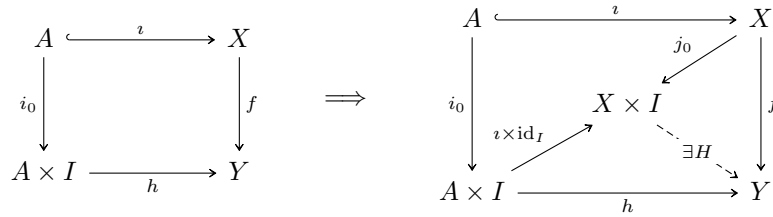
Les CW-complexes dont stables par quotient par un sous-complexe.

preuve: Si X est un CW-complexe et A un sous-complexe de X alors X/A bénéficie d'une structure de CW-complexes dans laquelle les cellules de A sont identifiées à une 0-cellule de X/A . Le reste sont des cellules de X non incluses dans A . \square

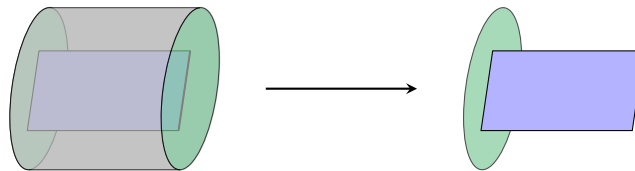
exemple: Pour tout CW-complexe X , X^n/X^{n-1} est homéomorphe à un bouquet de sphères $\bigwedge_{i \in I} S_i^n$ où i indexe les n -cellules de X .

PROPOSITION:

Les paires topologiques (X, A) où X est un CW-complexe et A un sous complexe vérifient la propriété d'extension d'homotopies, i.e. la commutativité du premier diagramme entraîne son relèvement décrit dans le deuxième.



preuve: Il suffit de montrer qu'il existe une rétraction $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$



On aura alors qu'à poser $H = h \circ r$ et cela constituera un relèvement satisfaisant.

On construit d'abord r^n qui rétracte $X^n \times I$ sur $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A \cap X^n) \times I$. Par convention, $X^{-1} = \emptyset$.

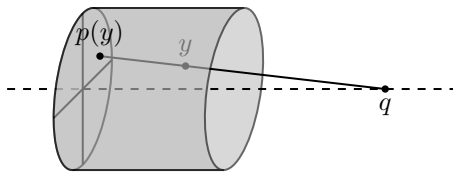
On suppose que r^{n-1} est bien défini sur $X^{n-1} \times I$. Pour $x \in X^n$, si $x \in A$, on a $r(x, t) = (x, t)$.

Soit C une n -cellule de X , on a alors

- $\phi_C \times \text{id} : \mathbb{D}^n \times I \rightarrow X \times I$
- un homéomorphisme $\phi_C \times \text{id} : \mathring{\mathbb{D}}^n \times I \rightarrow C \times I$

On observe que $\phi_C \times I(\partial \mathbb{D}^n \times I) \subset X^{n-1}$, on se ramène donc à une rétraction bien connue : celle de K^n (étudié en homotopie). Usuellement, on pose $K^n = I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$, mais ici on posera la même chose à homéomorphisme près : $K^n = \mathbb{D}^n \times \{0\} \cup \partial \mathbb{D}^n \times I$. On va montrer (rapidement) que c'est un rétract de $\mathbb{D}^n \times I$ via une rétraction s .

On pose $q = (0_n, 2)$ et pour $y \in K^n$, $p(y)$ est l'unique intersection de la droite (q, x) et de K^n . Voici un dessin pour $n = 2$.



On pose alors $s(y, \bullet) = [y, p(y)]$ et on a notre rétraction.

Cette rétraction induit une rétraction r^n de $X^n \times I$ sur $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup (A \cap X^n)) \times I$. Définie sur chaque $C \times I$ pour C cellule de dimension n ne se trouvant pas dans A comme $\tilde{r}_{(C \times I) \times I}^n(\bullet, t) = (\phi_C \times \text{id}) \circ s((\phi_C \times \text{id})^{-1}(\bullet), t)$.

On pose alors r de la manière suivante : durant le temps $[1/2^{n+1}, 1/2^n]$, on opère la rétraction r^n . La continuité est assurée : il suffit de vérifier qu'elle l'est sur tous les X^n , or dans X^n on a une concaténation finie de retractions continues. \square

Voici maintenant un lemme que nous avons envie d'énoncer dans un cadre général mais qui n'est pas toujours vrai : le lien entre l'homologie relative de (X, A) et l'homologie de X/A .

LEMME:

Pour toute paire de CW-complexes (X, A) , on a une équivalence d'homotopie entre les complexes $\tilde{C}_\bullet(X/A; M)$ et $C_\bullet(X, A; M)$, qui induit un isomorphisme :

$$\tilde{H}_\bullet(X/A; M) \sim H_\bullet(X, A; M)$$

preuve: On a déjà l'équivalence des complexes $C_\bullet(X, \{*\}; M)$ et $\tilde{C}_\bullet(X; M)$, mais nous allons passer par une construction plus générale. On note le cône de A , $CA := A \times I/A \times \{0\}$ \square

Bibliographie

- [1] Jules BESSON. Théorie de l'homologie. Lien pdf, 2022.
- [2] Raoul BOTT and Loring W. TU. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1982.
- [3] Glen E. BREDON. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag, 1993.
- [4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.