

Colles en BCSPT2

Jules Nodé-Langlois

Un recueil d'exercices de colles, posés en classe de BCPST2A au lycée Chateaubriand à Rennes durant l'année scolaire 2025/2026. Le niveau des exercices est variable même si certains sont d'un niveau supérieur à celui attendu pour des élèves de cette filière.

Sommaire

1	Analyse	1
1.1	Fonctions réelles	1
1.2	Développements limités	3
1.3	Calcul intégral	3
1.4	Équations différentielles	3
1.5	Suites réelles	4
1.6	Séries	8
2	Algèbre	12
2.1	Injections, surjections et bijections	12
2.2	Nombres complexes	12
2.3	Polynômes	12
2.4	Espaces vectoriels	13

1 Analyse

1.1 Fonctions réelles

Exercice 1 : Soit $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f , celui de continuité puis celui de dérivabilité, et calculer sa dérivée sur celui ci.
2. Montrer que f réalise une bijection de D dans un intervalle à préciser.
3. Soit $t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, calculer $f(\sin(t))$, et préciser une expression plus simple de f .

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sqrt{|\ln x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
2. Étudier la dérivabilité de f .
3. Donner les variations de f .
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 3 : Soit la fonction f d'expression :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1-x}}.$$

1. Préciser le domaine de définition D de f .
2. Définir cette fonction en langage *Python*.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur D .
4. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x)$.

Exercice 4 : On définit la fonction f par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) & \text{si } x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Définir cette fonction en langage *Python*.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f .
4. En déduire l'équation de la tangente T_0 à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f en 0, et préciser les positions relatives de T_0 et \mathcal{C}_f .

Exercice 5 : Soit :

$$f : x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2 - 1)}.$$

1. Étudier l'ensemble de définition D de f ainsi que sa parité.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire que f se prolonge sur \mathbb{R} en une fonction continue, que l'on notera encore f .

3. Montrer que f est dérivable sur D , et donner l'expression de sa dérivée sur D .
4. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \frac{3\pi}{4}$.
5. En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R} et préciser l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x_0 = 1$.

1.2 Développements limités

Exercice 1 : Déterminer la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}$.

Exercice 2 : Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $f : x \mapsto \exp(\tan(x)) - \exp(\sin(x))$.

1.3 Calcul intégral

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $x \mapsto \ln^n(x)$.

Exercice 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la valeur de I_3 .

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Déterminer la limite de la suite ainsi définie.

Exercice 4 : Soit $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , montrer que :

$$\left| f(0) - \int_0^1 f(u) du \right| \leq \left| \int_0^1 f'(s) ds \right|$$

1.4 Équations différentielles

Exercice 1 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, f(s+t) = f(s)f(t)$$

Exercice 2 : L'accroissement de la population d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

1.5 Suites réelles

Exercice 1 : Soit la suite v définie par $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n^2 + 1)$:

1. Montrer que v est croissante.
2. Donner le comportement asymptotique de v en $+\infty$.

Exercice 2 : On introduit la suite u par :

$$u_0 = a > 0, \quad u_1 = b > 0, \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_n \times u_{n+1}}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite $\ln(u)$ est une suite linéaire récurrente d'ordre 2.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de a , b et n , puis la limite de u quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une expression de u_n à l'aide de factorielles et d'une puissance de 2.
2. Montrer que la suite u est convergente.
3. On définit alors la suite v par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = (n+1)u_n^2.$$

On admet que la suite v est décroissante et convergente. En déduire la valeur de la limite de la suite u .

Exercice 4 : Soit la suite u définie par :

$$u_0 = 0, \quad \text{et pour tout entier } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 3^n.$$

Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire v définie par :

$$v_n = \frac{u_n}{3^n}, \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 5 : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f_n(x) = x^n + 1 - nx.$$

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On note x_n cette unique solution.

2. Justifier que pour tout $n \geq 2$ on a

$$\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{2}{n}.$$

En déduire que (x_n) est convergente ainsi que sa limite.

3. Déterminer un équivalent de (x_n) .

4. Étudier le signe de $f_{n+1}(t) - f_n(t)$ pour $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.

Exercice 6 : On définit récursivement la suite u par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer en une même récurrence que la suite u est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n > 1$.

2. Étudier la monotonie de u .

3. Conjecturer puis démontrer une formule pour le terme général de la suite.

Exercice 7 : On définit u par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

1. Montrer que u est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, puis en déduire que u est décroissante.

3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que v est une suite arithmétique dont on indiquera la raison et le premier terme. En déduire le terme général de v , puis celui de u .

4. Déterminer le comportement à l'infini de u .

Exercice 8 : Soit u la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3u_n + 1}, \quad u_0 > 0.$$

1. Montrer que u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En déduire la monotonie de u .

2. Montrer que la suite u est convergente et calculer sa limite.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{3}$.

4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0$.

5. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 9 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geq 2^{n-1}$
2. Montrer que la suite u est convergente.

Exercice 10 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ et $I_n = \int_0^1 \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{e(n+1)!} + I_{n+1}$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $eI_0 = u_n + eI_n - 1$.
3. Déterminer la limite de u (on pensera à déterminer celle de I).

Exercice 11 : Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par :

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad \text{et pour tout } n \geq 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que la suite u est croissante et la suite v est décroissante.
3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
4. Dédire des questions précédentes que les deux suites convergent vers la même limite ℓ .
5. On cherche à déterminer l
 - a. Déterminer la limite de la suite uv .
 - b. Montrer que la suite uv est constante et expliciter la constante.
 - c. En déduire la limite commune de u et v .

Exercice 9 :

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

- (a) Montrer que (S_n) admet une limite, finie ou infinie.
- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}.$$

En déduire la limite de (S_n) .

2. Pour tout entier $n > 0$, posons :

$$T_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k}.$$

- (a) Peut-on procéder de la même manière pour étudier le comportement à l'infini de la suite (T_n) ?
- (b) Montrer que les suites (T_{2n}) et (T_{2n+1}) sont adjacentes.
- (c) En déduire le comportement à l'infini de (T_n) .

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

- (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

- (b) En déduire que (U_n) converge.

Exercice 10 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{4 + u_n}{1 + u_n}.$$

- 1. Montrer que cette suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$.
- 2. Montrer que si (u_n) converge, alors sa limite est 2.
- 3. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - 2|.$$

- 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|.$$

En déduire que (u_n) converge bien vers 2.

Exercice 11: On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}.$$

3. Montrer que : $\forall n \geq 0$,

$$I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

En déduire la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Exercice 12 : On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$. On pose $v = \frac{1}{u}$.

1. Montrer que v est bien définie.
2. Déterminer la nature de v puis une expression du terme général de u .

Exercice 13 : On considère la suite u définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$. Montrer que la suite est bien définie puis déterminer une expression du terme général.

1.6 Séries

Exercice 1 : Soit deux séries à termes positifs convergentes : $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$.

1. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n^2 \leq u_n$.
2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge.
3. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, puis en déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ converge.
4. Montrer enfin que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + v_n)^2$ converge.

Exercice 2 : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{x^n}{n!}$.

1. Déterminer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n.$$

2. Montrer alors que pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq u_n \leq u_{n_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge.

4. Montrer alors que la série exponentielle converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < v_n \leq \frac{1}{n^2}$.

(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ , que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Exercice 4 : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0, 1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.

(b) Montrer que la suite (u_n) converge puis déterminer sa limite.

2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme en fonction de u_0 .

3. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geq 0} (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})) ?$$

4. Déterminer un équivalent de $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$; en déduire la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 5 :

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

2. En déduire que pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2).$$

3. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}.$$

Exercice 6 : Soit les suites $(H_n)_{n \geq 1}$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad u_n = H_n - \ln(n).$$

1. (a) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

(c) Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$u_n > \frac{1}{n}.$$

(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel positif ou nul γ .

(e) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

2. À l'aide du développement asymptotique précédent, montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

converge et calculer sa somme.

Exercice 7 :

1. Vérifier que

$$\frac{1}{\sqrt{n} n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

2. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n} n!} \leq \frac{1}{n^2}.$$

3. En déduire la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} n!}.$$

Exercice 8 :

1. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^n}$$

converge.

2. On note S_n la somme partielle de rang n de cette série, et S sa somme.

Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S_n - S| \leq \frac{1}{2^n}.$$

3. En déduire une fonction écrite en langage *Python* renvoyant une approximation à ε -près de la valeur S (où ε est passé en argument).

Exercice 9 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que, pour $k \in \{0, \dots, n-2\}$,

$$\frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}.$$

2. En déduire la nature de la série $\sum_{k \geq 0} k!$.

Exercice 10 : Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

1. Étudier le signe puis le sens de variation de la suite (u_n) .
2. En déduire la convergence éventuelle et la limite, si elle existe.
3. Justifier que le passage au \ln dans l'équation (1) est possible. En déduire ensuite la nature de la série de terme général u_n .

2 Algèbre

2.1 Injections, surjections et bijections

Exercice 1 : Soit E un ensemble, $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f = Id_E$, montrer que f est bijective.

Exercice 2 : Soit E un ensemble, A et B deux parties non vides de E , et l'application :

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)^2 \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$$

Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.

2.2 Nombres complexes

Exercice 1 : On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que, pour tout nombres complexes a et b non nuls, on a :

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \iff a = jb \quad \text{ou} \quad a = j^2b$$

Exercice 2 : Soient $n \in \mathbb{N}^*, \theta \in \mathbb{R}$:

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$
2. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$
3. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$

Exercice 3 :

1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a| = |b| = 1$ et $ab \neq -1$, montrer que $\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.
2. On suppose de plus que $a - b \neq 0$, montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, \frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b} \in \mathbb{R}i$.

Exercice 3 : Soit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Montrer que $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est une bijection de \mathbb{H} sur \mathbb{D} .

2.3 Polynômes

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P_n : x \mapsto (x+1)^n$. En calculant P_n' de deux manières différentes, calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$. Calculer ensuite la somme d'un autre façon.

Exercice 2 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. Montrer que P est un polynôme constant. Que dire si on remplace P par une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?

Exercice 3 : Montrer que $1+X+\frac{X^2}{2!}+\dots+\frac{X^n}{n!}$ n'admet pas de racines multiples.

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P = (1 + X)^{2n}$, montrer à l'aide de P que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

2.4 Espaces vectoriels

Exercice 1 :

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Démontrer que l'ensemble F des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble G des matrices symétriques de $M_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
3. L'ensemble H des matrices inversibles est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2 : Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 3\}$.

- 1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?
- 2. Citer un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ qui contient F .
- 3. Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ qui contient F .
 - a) Montrer que $1, X, X^2 \in G$.
 - b) En déduire que $\mathbb{R}_2[X] \subset G$.
 - c) Quel est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ contenant F ?

Exercice 3 : On pose

$$F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax\}$$

1. Donner 3 exemples d'éléments de F et 3 exemples d'éléments de G .
2. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3. Démontrer que $\forall h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists!(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$.
On dit alors que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 4 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5 : Soit $A = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$. Montrer que A est un \mathbb{R} -espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 6 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, montrer que la famille $(x \mapsto e^{\lambda_1 x}, \dots, x \mapsto e^{\lambda_n x})$ est libre.