Oraux Blancs en MP*

1 MP*

1.1 Mines

Exercice 1 : Soit $\mathbb{K}$ un corps, soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $N_1, ..., N_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices nilpotentes qui commutent deux à deux. Calculer $N_1 N_2 ... N_n$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 1-périodique et π-périodique. Montrer que f est constante. Comment généraliser ?

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer l'équivalence :

$$(\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset) \Longleftrightarrow (\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}, AM = MB)$$

Exercice 4 : Que dire de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement constante en tout point :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall y \in]x - \epsilon, x + \epsilon[, f(y) = f(x)$$

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $X = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \exists Y \in \ker(A), Y \notin \mathrm{im}(A)\}$. Monter que X est connexe par arcs puis déterminer son adhérence.

Exercice 7 : Soit $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $A : \mathbb{R} \to \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, M'(x) = A(x)M(x)$$

On suppose que $M(0) \in SO_n(\mathbb{R})$, montrer que M est à valeurs dans $SO_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non constante et multiplicative c'est à dire que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(A)f(B)$$

1. Montrer que f s'annule sur et seulement sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f = \Psi \circ \det$.

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que le polynôme minimal de A noté μ_A est de degré n si et seulement si l'application : $\Phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ définie par :

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, \Phi(X, Y) = (X^T Y, X^T A Y, ..., X^T A^{n-1} Y)$$

est surjective. On pourra commencer par le sens réciproque.

Exercice 10 : Soit n un entier naturel impair. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to O_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 12 : Calculer :

$$\dim \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{U}_5)$$

Exercice 13 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui forment un groupe pour le produit matriciel mais qui ne sont pas des sous-groupes de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi : \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \Phi(A) = \mathrm{tr}(A + A^{-1})$$

1. Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \Phi(A) \geq 2n$$

Cas d'égalité ? Déterminer explicitement l'image de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par Φ.
2. Même question avec $O_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

1.2 Centrale

Exercice 1 : 1. Rappeler la définition d'un groupe, celle de la différentielle d'une application en un point. Faire le lien avec les dérivées partielles dans le cas $\mathcal{C}^1$.
2. Soit $*$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$, d'élément neutre e. On suppose qu'elle induit une application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_2 f(x*y,e) = \partial_2 f(x,y) \times \partial_2 f(y,e)$$

En déduire que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \partial_2 f(y,e) > 0$$

3. Montrer qu'il existe $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est aussi un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, *)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 2 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier impair. On note $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} sont à coefficients entiers.
1. Rappeler la définition de la comatrice. Montrer que $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) | \det(M) \in \{-1;1\}\}$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $M^k = I_n$ et $\frac{1}{p}(M - I_n) \in M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M = I_n$.
3. Déterminer un majorant uniforme des cardinaux des sous-groupes finis de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 3 : 1. Montrer qu'une matrice symétrique réelle est symétrique définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont réelles strictement positives.
2. Montre que l'exponentielle matricielle réalise une bijection de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Cette bijection est-elle continue ? Que dire de sa réciproque ?

Exercice 4 : 1. Rappeler le théorème de Rolle.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls et $\beta_1 < ... < \beta_n \in \mathbb{R}$ et :

$$f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{x\beta_k}$$

Montre que f s'annule en au plus $n-1$ points.
3. On suppose désormais que $\alpha_1 < ... < \alpha_n$, montrer que

$$\det(e^{\alpha_i \alpha_j})_{1 \leq i,j \leq n} > 0$$

Exercice 5 : 1. Donner la définition d'une partie compact d'un espace vectoriel normé.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $K \subset E$ un compact. On définit :

$$\mathcal{L}_K = \{u \in \mathcal{L}(E) | u(K) \subset K\}$$

Montrer que $\mathcal{L}_K$ est fermé.
3. Montrer que $\mathcal{L}_K$ est compact si et seulement si K est une partie génératrice de E. Que dire de cette équivalence en dimension infinie ?

Exercice 6 : Soit n un entier naturel non nul, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale si elle commute avec sa transposée. Soit A une telle matrice, on note λ_1,...λ_p ses valeurs propres complexes deux à deux distinctes et $P = \Pi_{j=1}^{p}(X - \lambda_j)$.
1. Énoncer un critère de diagonalisabilité pour une matrice à coefficients complexes.
2. Montrer que si A est de plus nilpotente elle est nulle.
3. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.
1. Montrer qu'il existe $S' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $S'^2 = S$.
2. Montrer que le spectre complexe de A est constitué d'imaginaires purs.
3. Montrer que $\det(S) \leq \det(S + A)$

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $U, V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
1. Rappeler la définition du matrice symétrique positive et le théorème spectral.
2. Montrer que $\mathrm{tr(UV)} \geq 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable et $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $t \mapsto \mathrm{tr}(P(f(t)))$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. On suppose de plus que $U - V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\mathrm{tr}(\exp(V)) \leq \mathrm{tr}(\exp(U))$$

Exercice 9 : Soit n un entier naturel non nul, et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = (\mathrm{tr}(M), \dots, \mathrm{tr}(M^n))$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle.|.\rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définit par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$$

et on note N la norme qui en découle.
1. Montrer que N est sous-multiplicative puis qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\mathrm{tr}(A)| \leq \alpha N(A)$$

2. Montrer que f est différentiable en tout point et expliciter sa différentielle en tout point.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, comparer le rang $\mathrm{d}f(M)$ et le degré du polynôme minimal μ_M de M.
4. Montrer que l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \chi_M = \mu_M\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10 : Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ munie d'une dérivation d c'est à dire d'un endomorphisme de $\mathcal{A}$ vérifiant :

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, d(fg) = d(f)g + fd(g)$$

1. Soit $f \in \mathcal{F}$ développable en série entière telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe une unique $g \in \mathcal{F}$ développable en série entière telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xg(x)$$

2. Montrer que $\mathcal{A}$ contient toutes les fonctions constantes et calculer la dérivée des fonctions constantes.
3. Si $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des fonctions continues, et que $f \in \mathcal{A}$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ un point d'annulation de f. Montrer que $d(f)(x_0) = 0$ et en déduire que d est l'endomorphisme nul.
4. Caractériser les dérivations de fonctions réelles infiniment dérivables.

1.3 X

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et K un fermé de $\mathbb{R}^n$ On dit que $x \in K$ est un point de condensation si pour tout voisinage V de x, $V \cap K$ est non-dénombrable. On note $\mathcal{C}_K$ l'ensemble des points de condensation de K. Donner des exemples où $\mathcal{C}_K = \emptyset$, $\mathcal{C}_K = K$ et où $\mathcal{C}_K \neq \emptyset$ et $\mathcal{C}_K \neq K$. Montrer que $\mathcal{C}_K$ est fermé, que $C_K \setminus K$ est au plus dénombrable et que $\mathcal{C}_K$ sans point isolé.

1.4 ENS

Exercice 1 : Soit n un entier naturel non nul et G un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $|||.|||$ une normé subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que :

$$\forall g \in G, |||g||| \leq \sqrt{3}$$

Montrer que $G = \{I_n\}$. Montrer que $\sqrt{3}$ est la borne optimale.

Exercice 2 : Le groupe $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$ contient-il un élément d'ordre 5 ?

Exercice 3 : Soit n un entier naturel non nul, soit $\varphi : SL_2(\mathbb{R}) \to \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes. Montrer que φ est à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$.