

Oraux blancs en PSI*

Un recueil d'exercices d'oraux posés aux élèves de PSI* du lycée Janson de Sailly en 2026. Ces planches concernent l'oral de mathématiques USR du concours des écoles normales supérieures accessibles depuis la filière PSI (Ulm, Rennes et Paris-Saclay). Le déroulement de l'oral est le suivant, les candidats préparent 30 minutes durant leur exercice puis présentent devant l'examinateur leur travail pendant 30 minutes. Si le candidat finit sa présentation avant la fin du temps imparti, un deuxième exercice, souvent plus court, peut être posé par l'examinateur.

1 Algèbre

Exercice 1 : Soit n un entier naturel non nul, on dit que $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est unipotente si $U - I_n$ est nilpotente. On admet le théorème suivant :

Décomposition de Dunford : Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existe une unique matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et une unique matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente telles que :

$$M = D + N \text{ et } DN = ND$$

1. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unipotente, montrer que la seule valeur propre de U est 1.
2. Montrer que U est inversible et écrire U^{-1} comme un polynôme en U .
3. Montrer que la décomposition de Dunford d'une matrice réelle est composée de matrices réelles.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

4. Montrer que la matrice diagonalisable dans la décomposition de Dunford de M est aussi inversible.
5. Montrer qu'il existe une unique matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et une unique matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unipotente telles que :

$$M = UD \text{ et } DU = UD$$

6. Montrer que si M est réelle, les matrices dans la décomposition ci-dessus le sont aussi.

Exercice 2 : Soit n un entier naturel non nul. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

1. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 l'est et :

$$\ker(u) = \ker(u^2)$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que f^2 est diagonalisable. A quelle condition nécessaire et suffisante f est diagonalisable.

3. Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_1 \\ 0 & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A quelle condition A est-t-elle diagonalisable ? Et si les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont réels ?

Exercice 3 : Soit n un entier naturel non nul, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on définit le commutant de A comme l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant avec A , on le note $\mathcal{C}(A)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. a) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel contenant I_n et stable par produit.

b) Soit $M \in \mathcal{C}(A)$ supposée inversible. Montrer que l'inverse de M appartient aussi à $\mathcal{C}(A)$.

2. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ supposée diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts. Déterminer le commutant de D . Montrer que $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une base du commutant.

On suppose désormais que $n = 2$.

3. a) Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont le commutant est de dimension 4.

b) Montrer que $\dim \mathcal{C}(A) \geq 2$.

c) On suppose que $\dim \mathcal{C}(A) = 3$. Montrer que A est une homothétie à l'aide de $F = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})$ et $G = \text{Vect}(E_{2,1}, E_{2,2})$.

d) Donner une base de $\mathcal{C}(A)$ en toute généralité.

Exercice 4 : Soient n et p des entiers naturels non nuls. Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

1. Montrer que $M^T M$ et $M M^T$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.
2. Trouver un exemple de matrice de $N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $N^T N$ et $N N^T$ n'ont pas les mêmes valeurs propres.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -\text{Id}_E$.

3. Donner un exemple d'un tel endomorphisme.
4. Montrer que f ne possède pas de valeur propre réelle.
5. Montrer que la dimension de E est paire.

On note désormais $n = \frac{\dim E}{2}$.

6. Montrer qu'il existe $e_1, \dots, e_n \in E$ tels que $(e_1, f(e_1), \dots, e_n, f(e_n))$ soit une base de E .
7. Écrire la matrice de f dans cette base.

2 Analyse

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue de carré intégrable. Soit $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

1. Montrer que g est continue et se prolonge en une fonction continue en 0.
2. Montrer que g^2 est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} g^2(t) dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(t) dt$$

3. La constante 4 est-elle optimale dans l'égalité ci-dessus ?

Exercice 2 : Soit I un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point. On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I, (|x - y| \leq \delta) \implies (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

Soit $\alpha > 0$, on dit que f est α -hölderienne sur I s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$$

1. Montrer que si f est α -hölderienne sur I alors elle est uniformément continue sur I .
2. Montrer que si f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et que I est un segment alors elle est uniformément continue sur I .
- Soit $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable.
3. Donner un exemple d'une telle fonction n'admettant pas de limite en $+\infty$.
4. Montrer que si g est uniformément continue alors elle tend vers 0 en $+\infty$.
- Soient $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que f et $(f'')^2$ soient intégrables sur $[0, +\infty[$.
5. Montrer que f' est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ et que f' tend vers 0 en $+\infty$.
6. Montrer que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ et que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 3 : Soit n un entier naturel non nul, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère $f_{A,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle - \langle b, x \rangle$$

1. Montrer que f est minorée si et seulement si A est à valeurs propres positives et $b \in \text{im}A$.
2. Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques et $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si f_{A_1, b_1} et f_{A_2, b_2} sont minorées et $\nabla f_{A_1, b_1} = \nabla f_{A_2, b_2}$ alors $f_{A_1, b_1} = f_{A_2, b_2}$.
3. On suppose que A_1 et A_2 sont à valeurs propres positives. Montrer que :

$$\ker(A_1 + A_2) = \ker A_1 \cap \ker A_2$$

et :

$$\text{im}(A_1 + A_2) = \text{im}A_1 + \text{im}A_2$$

Exercice 4 : Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$ et $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall f \in E, \|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur E .
Soit $f \in E$, on pose $g = f + 2f' + f''$.
2. Montrer que :

$$\forall t \in [0, 1], f(t) = e^{-t} \int_0^t (t-x)e^x g(x) dx$$

3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq a\|f\|$$

Optimiser l'inégalité ci-dessus.

4. Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 5 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $\phi, \varphi, \psi \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ avec ψ à valeurs positives telles que :

$$\forall t \in [a, b], \varphi(t) \leq \phi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)ds$$

1. Montrer que pour tout $t \in [a, b]$:

$$\int_a^t \varphi(s)\psi(s)ds \exp(-\int_a^t \psi(s)ds) \leq \int_a^t \phi(s)\psi(s) \exp(-\int_a^s \psi(\tau)d\tau)ds$$

2. En déduire que pour tout $t \in [a, b]$:

$$\varphi(t) \leq \phi(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s) \exp(\int_s^t \psi(\tau)d\tau)ds$$

3. Si ϕ est constante positive, montrer que :

$$\forall t \in [a, b], \varphi(t) \leq \phi(0) \exp(\int_a^t \psi(s)ds)$$

4. Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues.

a) On suppose que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) \leq \int_0^t f(s)g(s)ds$$

Montrer que f est nulle.

b) Soient $a \in [0, 1]$ et $m \in]0, 1[$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) \leq af(mt) + \int_0^t f(s)g(s)ds$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(t) \leq a^n f(m^n t) + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \int_0^t f(s)g(s)ds$$

En déduire que f est nulle.

Exercice 6 : Soit n un entier naturel non nul. Soit X une partie bornée de \mathbb{R}^n munie de sa structure euclidienne canonique. On note $d(A)$ le diamètre d'une partie A de \mathbb{R}^n défini par :

$$d(A) = \sup\{\|x - y\|, (x, y) \in A^2\}.$$

Pour ρ un réel strictement positif, on définit un ρ -recouvrement de X par des parties $(A_k)_{1 \leq k \leq m}$ (où m est un entier naturel non nul quelconque) vérifiant :

$$X \subset \bigcup_{1 \leq k \leq m} A_k \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}, d(A_k) \leq \rho.$$

Si s est un réel positif, on pose :

$$H_s^\rho(X) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^m d(A_k)^s, (A_k)_{k \in \llbracket 1, m \rrbracket} \text{ un } \rho\text{-recouvrement de } X \right\}.$$

- (a) Montrer que $H_s^\rho(X)$ est fini et décroissant par rapport à ρ .
- (b) On pose $H_s(X) = \lim_{\rho \rightarrow 0} H_s^\rho(X)$. Montrer que H_s est décroissant par rapport à s .
- (c) Calculer $H_0(X)$ et $H_s(X)$ pour $s > n$.
- (d) Comparer $H_s(X)$ et $H_s(X + v)$ où v est un vecteur fixé de \mathbb{R}^n .
- (e) Comparer $H_s(X)$ et $H_s(\lambda X)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
- (f) Soit X et Y deux parties bornées de \mathbb{R}^n tel que $\inf\{\|x - y\|, (x, y) \in X \times Y\} \neq 0$. Comparer $H_s(X \cup Y)$ et $H_s(X) + H_s(Y)$.
- (g) On note $\delta = \inf\{s \in \mathbb{N}^*, H_s(X) = 0\}$. Calculer δ pour un segment, pour un carré.