Processus de Galton–Watson

Julie Parreaux

2018-2019

Références du développement : Probabilités pour les nuls [1, p.195] et Cottrel [4, p.72].

Leçons où on présente le développement : 226 (Suites récurrentes) ; 229 (Fonctions monotones, fonctions convexes) ; 260 (Espérance) ; 264 (Variables aléatoires discrètes) .

1 Introduction

On souhaite étudier la dynamique d'un modèle simple de population issue d'un seul individu. Biologiquement, cela semble étrange car on penses d'abord à la reproduction sexué. Lors de l'introduction du problème Francis Galton s'intéressait aux nom de famille d'une famille britannique (seul l'homme transmet son nom de famille). Cependant, ce problème semble beaucoup plus adapté à la descendance d'une bactérie, l'étude d'une épidémie ou encore le nombre de neutron dans un réacteur nucléaire (il permet de modéliser beaucoup de phénomènes naturels). Pour ce faire, on considère un temps discret représenté par une variable entière n et on note Z_n le nombre d'individu dans notre population. A l'instant $n = 0$, on a $Z_n = 1$. On suppose de plus qu'à chaque instant n, chacun des individu donne naissance à un certain nombre de descendants et meurt selon la même loi de probabilité qui est indépendante des autres individus.

L'objet de ce développement est de formaliser cette modélisation et d'étudier la probabilité que la population s'éteigne. On aurait pû considérer bien d'autres questions comme quel est le nombre moyen d'individus à la $n^{\text{ième}}$ générations.

2 Processus de Galton–Watson

Contexte Soit X une variable aléatoire intégrable à valeur dans N.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \Pr(X = n)$ et $m = \mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n < \infty$.

Soit $(X_{i,j})_{i,j \in N}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant la loi $\Pr_X$. Alors, la variable aléatoire $X_{i,n}$ représente le nombre de descendants de l'individu i à la $n^{\text{ième}}$ génération (on rappelle que les individus engendrent leurs enfants tout seul).

On défini la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représentant le nombre d'individu de la population à la génération n, de la façon suivante :

$$\begin{cases} Z_0 &= 1 \\ Z_n + 1 &= \sum_{i=0}^{Z_n} X_{i,n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On va étudier cette suite Z_n afin de répondre à la question : quelle est la probabilité que la population considérée s'éteigne ? On souhaite alors calculer $\Pr(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0)$.

Schéma du développement (leçons 226, 229)

1. Remarques et définitions préliminaires.
2. Étude des propriétés de la fonction génératrice, G, de X.
3. Définir la fonction caractéristique pour Z_n (on ne montre pas ses propriétés).
4. Calcul de la probabilité d'extinction x_∞.

Schéma du développement (leçons 260, 264)

1. Remarques et définitions préliminaires.
2. Définition et propriétés de la fonction génératrice, G, de X.
3. Étude de la fonction caractéristique pour Z_n.
4. Calcul de la probabilité d'extinction x_∞.

Étape 1 : remarques et définitions préliminaires

Remarque. On note que si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$.

Lemme 1. *On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, que Z_n et $X_{i,n}$ sont indépendantes.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n ne dépend que de Z_{n-1} et de la famille $(X_{i,n-1})_{i\in\mathbb{N}}$. Ainsi par une récurrence immédiate, il vient que Z_n ne dépend que de la famille $(X_{i,j})_{i\geq 0, j<n}$. On conclut alors par indépendance des variables $X_{i,j}$. □

On pose

$$G(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$$

la fonction génératrice des $X_{i,j}$. On note x_n la probabilité que la population soit éteinte à la génération n : $x_n = \Pr\{Z_n = 0\}$.

On remarque que l'événement M : "la population finira par s'éteindre" est la réunion de la suite des événements $(\{Z_n = 0\})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante (car $Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$). On a donc,

$$\Pr(M) = \Pr\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$$

Notons que si $p_0 = 1$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = 0$ presque partout et $\Pr(M) = 1$. De plus, si $p_0 = 0$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n \geq 1$ presque partout et $\Pr(M) = 0$. On suppose donc désormais $p_0 \in]0,1[$.

Étape 2 : propriétés de la fonction génératrice, G, de X (uniquement dans le cas d'une leçon de la convexité) [4, exercice 3.5, q.2].

Proposition 1 (Résultats sur la série génératrice de X)**.** *Soit G a série génératrice de X définie comme précédemment. On a alors les résultats suivants :*

1. *G est bien définie sur $[0,1]$ et est de classe $\mathcal{C}^1$.*
2. *(a) G est strictement croissante sur $]0,1[$.*
   (b) G est convexe sur $]0,1[$.
   (c) G est strictement convexe sur $]0,1[$ si et seulement si $p_0 + p1 < 1$

Démonstration. 1. $\forall k \in \mathbb{N}, s \mapsto p_k s^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, la série $\sum_{k\geq 0} p_k 1^k$ converge (vers 1 (car la $\sum_{k\geq 0} p_k 1^k = \sum_{k\geq 0} p_k = 1$ car les p_k sont des probabilité sur X)). On en déduit, comme $\sum_{k\geq 0} p_k s^k < \sum_{k\geq 0} p_k 1^k$, la convergence simple de la suite $\sum_{k\geq 0} p_k s^k$.

La série de fonctions $\sum_{k\geq 1} k p_k s^{k-1}$ converge normalement ($\sum_{k\geq 1} \sup_{s\in[0,1]} \left|k p_k s^{k-1}\right| = \sum_{k\geq 1} k p_k < \infty$ car X est intégrable, par hypothèse) donc la série dérivée uniformément sur $[0,1]$.

Par conséquent (par le théorème de dérivation terme à terme), la série $\sum_{k\geq 0} p_k s^k$ converge uniformément vers G, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

2. La série entière $\sum_{k\geq 0} p_k s^k$ ayant un rayon de convergence ≥ 1, on a $\forall s \in [0,1[$,

$$G'(s) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} \quad \text{et} \quad G''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2}$$

Comme $p_0 < 1$ (par hypothèse et comme les p_k sont des probabilités), on l'existence de $k_0 > 0$ tel que $p_{k_0} > 0$.

(a) Ainsi : $\forall s \in]0,1[$,

$$G'(s) \underbrace{=}_{\text{Définition}} \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} \underbrace{\geq}_{\text{somme de termes positifs}} k_0 p_{k_0} s^{k_0-1} \underbrace{>}_{k_0 \neq 0} 0$$

Donc, par la caractérisation par dérivée, G est strictement croissante sur $]0,1[$.

(b) Ainsi : $\forall s \in]0,1[$,

$$G''(s) \underbrace{=}_{\text{Définition}} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2} \underbrace{\geq}_{\text{somme de termes positifs}} k_0(k_0-1) p_{k_0} s^{k_0-2} \underbrace{\geq}_{(k_0-1)\geq 0} 0$$

Donc, par la caractérisation par dérivée seconde, G est convexe sur $]0,1[$.

(c) Si $p_0 + p_1 = 1$, alors (comme les p_k sont des probabilités) $G(s) = p_0 + p_1 s$ est affine donc n'est pas strictement convexe.
Sinon, $p_0 + p_1 < 1$, alors il existe $k_0 > 1$ tel que $p_{k_0} > 0$ (car les p_k sont des probabilités) et $G'' > 0$ (car $k_0 - 1 \neq 0$) sur $]0,1[$, d'où la stricte convexité et l'équivalence.

□

Étape 3 : définition d'une fonction caractéristique pour Z_n (uniquement dans le cas d'une leçon de probabilité) [1]. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la série génératrice de Z_n par $G_n : s \mapsto \mathbb{E}\left[s^{Z_n}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(Z_n = k) s^k$. Comme précédemment, on peut montrer que G_n est bien définie sur $[0,1]$.

Proposition 2. *On a* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \underbrace{G \circ \cdots \circ G}_{n \text{ fois}}$ *sur* $[0,1]$.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n.

Cas $n = 1$ On a $Z_1 = X_{0,0}$ suivant une loi de X. Donc

$$G_1 \underbrace{=}_{\text{def}} \mathbb{E}\left[s^{Z_1}\right] \underbrace{=}_{Z_1 = X_{0,0}} \mathbb{E}\left[s^{X_{0,0}}\right] \underbrace{=}_{X_{0,0} \text{ suit une loi de } X} \mathbb{E}\left[s^{X}\right] \underbrace{=}_{\text{def}} G$$

.

Cas $n+1$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $G_n = \underbrace{G \circ \cdots \circ G}_{n \text{ fois}}$ sur $[0,1]$. Montons que $G_{n+1} = \underbrace{G \circ \cdots \circ G}_{n+1 \text{ fois}}$ sur $[0,1]$.

Soit $s \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \mathbb{E}\left[s^{Z_{n+1}}\right] && \text{(définition de } G_n) \\
&= \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}}\right] && \text{(définition de } Z_{n+1}) \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_{i,n}}\right] && \text{(propriété de la puissance)} \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Z_n = j\}} \prod_{i=1}^{j} s^{X_{i,n}}\right] && \text{(découper l'espérance)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_n = j\}} \prod_{i=1}^{j} s^{X_{i,n}}\right] && \text{(Fubini–Tonelli, car les termes sont tous positifs)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_n = j\}}\right] \prod_{i=1}^{j} \mathbb{E}\left[s^{X_{i,n}}\right] && \text{(indépendance de toutes les viables et lemme 1)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(Z_n = j) \prod_{i=1}^{j} \mathbb{E}\left[s^{X}\right] && \text{(espérance d'une indicatrice et } X_{i,n} \text{ suit une loi de } X) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(Z_n = j)\, \mathbb{E}\left[s^{X}\right]^j && \text{(produit)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(Z_n = j)\, G(s)^j && \text{(définition de } G) \\
&= G_n(G(s)) && \text{(hypothèse de récurrence et formule de transfert)}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

x	0	x_∞	α		1
$G'(x)-1$	p_1-1	$-$	0	$+$	$m-1$
$G(x)-x$	p_0 ↘	0 ↘		↗	0

x	0		1
$G'(x)-1$	$p1-1$	$-$	0
$G(x)-x$	p_0	↘	0

FIGURE 1 – Tableau de signe et de variation de $x \mapsto G(x) - x$ dans le cas où $m > 1$.

FIGURE 2 – Tableau de signe et de variation de $x \mapsto G(x) - x$ dans le cas où $m \leq 1$.

Étape 4 : calcul de la probabilité d'extinction x_∞ [1]

Proposition 3. *La probabilité d'extinction x_∞ est le plus petit point fixe de G sur l'intervalle $[0,1]$.*

Démonstration. La proposition 2 nous assure que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in [0,1], G_{n+1} = G\left(G_n(s)\right)$. En évaluant en 0, (comme $G_n = x_n \forall n \in \mathbb{N}^*$ par définition) on obtient $x_{n+1} = G\left(x_n\right)$. Par continuité de G sur $[0,1]$, on obtient que x_n est un point fixe de G (proposition 1 et passage à la limite). Reste à monter que c'est le plus petit.

Soit $u \in [0,1]$ un point fixe de G. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $x_n \leq u$.

Cas $n = 1$ On a

$$x_1 \underbrace{=}_{x_{n+1}=G(x_n)} G\left(x_0\right) \underbrace{=}_{\text{Définition de } x_0} G\left(\Pr\left(Z_0 = 0\right)\right) \underbrace{=}_{p_0>0} G(0) \underbrace{\leq}_{\text{Croissance de } G} G(u) \underbrace{=}_{\text{Point fixe}} u$$

Cas $n+1$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n \leq u$. Montrons que $x_{n+1} \leq u$. Par la croissance de G (proposition 1), on a $x_{n+1} = G\left(x_n\right) \leq G(u) = u$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ que $x_n \leq u$, puis par passage à la limite $x_\infty \leq u$. □

Théorème. *Si $m \leq 1$, alors $x_\infty = 1$.*
Si $m > 1$, alors x_∞ est l'unique point fixe de G sur $]0,1[$.

Démonstration. On rappelle qu'on a deux cas :

— Si $p_0 + p_1 = 1$, alors G est une fonction affine. Comme $p_0 > 0$, la droite représentative de G coupe en un unique point la droite d'équation $y = x$. Nécessairement, ce point d'intersection a pour coordonnée $(1,1)$.

— Sinon, G est strictement convexe sur $]0,1[$; il en va de même pour $x \mapsto G(x) - x$ qui s'annule donc au plus deux fois. (En effet, si la fonction s'annule trois fois, par le théorème de Rolle, sa dérivée s'annulera en deux points distincts, $a < b$. Mais $x \mapsto G(x) - x$ est connexe, donc sa dérivée est croissante, donc nulle sur $[a,b]$. Ceci implique que $G' - 1$ n'est pas strictement croissante, et donc $x \mapsto G(x) - x$ n'est pas strictement convexe.)

  Attention à l'idée reçue "strictement convexe" équivaut à "dérivée seconde strictement positive" (pour des fonctions deux fois dérivables).

Dans tous les cas, on a : $G(x) - x$ qui s'annule en au plus deux points sur $[0,1]$. De plus, $G'(0) = p_1$ et $G'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = m$.

Supposons $m > 1$ Alors $G' - 1$ est une fonction croissante de $p_1 - 1 < 0$ (car $p_0 > 0$) à $m - 1 > 0$, donc elle s'annule en un point $\alpha \in]0,1[$. La fonction $G - Id$ est alors décroissante sur $[0,\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha, 1]$. Comme $G(0) = 0 = p_0 > 0$ et $G(1) - 1 = 0$, il existe un point dans l'intervalle $]0,\alpha]$ où $G - Id$ s'annule. (Voir tableau de variation, figure 1)

x_∞ est donc l'unique point fixe de G sur l'intervalle $]0,1[$ (car G en a au plus 2).

Supposons $m \leq 1$ Alors $G' - 1$ est une fonction croissante sur $[0,1]$, négative ou nulle en 1. La fonction $G - Id$ est alors décroissante sur $[0,1]$, et s'annule en 1 (voir figure 2). Comme cette fonction admet au plus deux annulations, elle ne s'annule qu'en 1 (sinon elle s'annulerait sur un intervalle non réduit à un singleton). Par conséquent $x_\infty = 1$.

□

3 Compléments : suites et séries de fonctions

On s'intéresse ici à la convergence des suites et des séries de fonctions. On se place dans le cadre réel, mais si les définitions et les résultats sont encore valide sur un autre corps de base. On commence par rappeler quelques résultats sur les suites de fonctions [3, p.438].

Définition (Convergence simple d'une suite de fonctions)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f, si, pour tout t de A, la suite de nombre $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers $f(t)$.

Définition (Convergence uniforme d'une suite de fonctions)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f, si,

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall x \in A \text{ si } n \geq N, \text{ alors } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

La fonction f est dite limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. **Attention**, la réciproque est fausse (voir exemple suivant [2, p.221])

Interprétation géométrique de la convergence uniforme (dans le cas réel) [2, p.220] : Il arrive un moment (un rang pour lequel) où le graphe de f_n est coincé entre le graphe de $f - \epsilon$ et le graphe de $f + \epsilon$.

Exemple. La suite de fonctions $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie telle que $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers 0 sur $[0,1[$, mais pas uniformément car pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in [0,1]$ tel que $|f_n(x) - 0| \geq \frac{1}{2}$. Par contre, elle est uniformément convergente vers 0 sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ car pour tout n et pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|f_n(x) - 0| \leq 2^{-n}$. Plus généralement, elle converge uniformément vers 0 sur $[0,a]$ pour tout $a < 1$.

On donne un critère pour montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions : le critère de Cauchy uniforme [2, p.221].

Proposition 4. *Une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur A converge uniformément vers f si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, \forall x \in A, \quad \left|f_p(x) - f_q(x)\right| < \epsilon$$

Démonstration. Condition nécessaire : application d'une inégalité triangulaire. Soir $\epsilon > 0$. Par convergence uniforme de la suite de fonctions $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in A$ si $n \geq N$, alors $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Soient $p \geq N, q \geq N$ et $x \in A$, on a

$$\begin{array}{rcll} \left|f_p(x) - f_q(x)\right| & = & \left|f_p(x) - f(x) + f(x) - f_q(x)\right| & \text{introduction de } f \\ & \leq & \left|f_p(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - f_q(x)\right| & \text{inégalité triangulaire} \\ & \leq & \epsilon & \text{application de l'hypothèse} \end{array}$$

Condition suffisante : pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc converge car $\mathbb{R}$ est un espace complet. On note sa limite $f(x)$ et on définit ainsi la fonction f. Montrons que f est bien limite uniforme de la suite de fonctions. Soit $\epsilon > 0$. Par le critère de Cauchy uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N, \forall q \geq N, \forall x \in A$ on a $\left|f_p(x) - f_q(x)\right| < \epsilon$. Soient $p \geq N$ et $x \in A$. En faisant tendre q vers l'infini, on obtient $\left|f_p(x) - f(x)\right| < \epsilon$. Ce qui nous donne la convergence uniforme. □

Comment prouver la convergence uniforme si le critère de Cauchy ne fonctionne pas (ou si on ne souhaite pas l'appliquer) ? La preuve de la convergence uniforme se fait en deux temps. D'abord on cherche la limite simple de la suite et ensuite on prouve que la suite réelle $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Maintenant, on va traiter le cas des séries de fonctions [3, p.457]. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction définie sur une partie A non vide de $\mathbb{R}$. La série associée est la suite des sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} f_k$$

Définition (Convergence simple et uniforme d'une série de fonctions)**.** On dit que la série est simplement (respectivement uniformément) convergente si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement (respectivement uniformément) convergente.

Définition (Convergence normale d'une série de fonctions)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction définie sur A. La série $\sum_{k\geq 0} f_k$ est dite normalement convergente sur A si la série numérique de termes $\sup_{x\in A}|f_n(x)|$ est convergente.

Remarque. Il est équivalent de dire que la série de fonction $\sum g_n$ converge normalement s'il existe une série à termes positifs $\sum a_n$ convergente telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \quad \|g_n(x)\| \leq a_n$$

Comme $\|g_n(x)\| \leq 2\|g_n(x)\|$ (on a des termes positifs) et que la série de terme général $2\|g_n(x)\|$ converge si et seulement si la série de terme général $\|g_n(x)\|$ converge (on peut faire sortir le scalaire 2 de la somme). On obtient l'équivalence.

Exemple. La série de fonction $\sum g_n$ définie par $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $[0,1]$ car $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ et la somme $\sum \|g_n\|$ converge.

Théorème. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction définie sur A. Si la série $\sum_{k\geq 0} f_k$ est normalement convergente sur A, alors elle y est uniformément convergente.*

Démonstration. On applique le critère de Cauchy uniforme : pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in A$,

$$\|g_n(x) + \dots + g_{n+p}(x)\| \underbrace{\leq}_{\text{norme}} \|g_n(x)\| + \dots + \|g_{n+p}(x)\| \underbrace{\leq}_{\text{cv normale}} \|g_n\|_\infty + \dots + \|g_{n+p}(x)\|_\infty$$

□

Contre-exemple (**Attention**, la réciproque est fausse [2, p.226]). La série de fonction $\sum(-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ (par majoration des restes) mais ne converge pas normalement.

On s'intéresse à la régularité des limites des suites et des séries de fonctions [3]. On commence par étudier les limites de suites de fonctions.

Propriétés d'une limite de suite de fonctions La convergence uniforme permet (contrairement à la convergence simple) de conservé à la limite un bon nombre de propriétés comme la continuité ou la dérivabilité.

Théorème (Continuité d'une limite de suite de fonctions)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A qui converge uniformément vers une fonction f et soit t_0 un point de A. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en t_0, alors f est continue en t_0.*

Démonstration. Par la convergence uniforme on a, pour $\epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in A$, $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Par la continuité des f_n on a que, pour $\epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que pour tout $t \in A$ vérifiant $|t - t_0| < \eta$, alors $|f_n(t) - f_n(t_0)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Une inégalité triangulaire nous permet de montrer que $|f(t) - f(t_0)| \leq \epsilon$. □

Corollaire. *La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue.*

Remarque. La contraposé de ce corollaire (ou du théorème) peut permettre de montrer qu'une suite de fonction ne converge pas uniformément.

Exemple (Montrer la non convergence uniforme d'une suite de fonction avec la continuité [3, p.442]). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$, on pose $f_n(t) = \frac{t^n}{1+t^{2n}}$. La limite simple de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = 0$ si $0 \leq t \leq 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(t) = 0$ si $t > 1$. La discontinuité en 1 prouve qu'il n'y a pas de limite uniforme de la suite sur $[0, +\infty[$.

Pour l'intégrale d'une limite de suite, aller voir le théorème de continuité sous le signe intégral (leçon 239). Nous allons maintenant nous intéresser à la dérivabilité de ces fonctions.

Théorème (Dérivabilité d'une limite de suite de fonctions). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ telle que*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f ;*
2. *la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur $[a,b]$.*

Nous avons alors les propriétés suivantes :

— *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f ;*
— *la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée g.*

Démonstration. Application du théorème de continuité sous le signe intégral avec la primitive de la dérivée. □

Propriétés de la somme d'une série de fonctions Nous continuons avec l'étude des propriétés de la somme d'une série de fonctions : continuité, intégrabilité et dérivabilité [3, p.459].

Théorème (Continuité de la somme). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A dont la série est uniformément convergente. Soit a un point de A ? Si chaque fonction f_n est continue en a, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.*

Démonstration. On applique le résultat de la continuité de la limite d'une suite de fonctions à la suite des sommes partielles de la série. □

Théorème (Interversion somme-intégrale [2, p.223]). *Si $\sum g_n$ est une série de fonctions continue qui converge normalement sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b g_n(t)\right)$$

Démonstration. Comme la convergence normale implique la convergence uniforme, on applique le théorème de convergence sous le signe intégrale pour les suites de fonctions à la suite des sommes partielles. □

Remarque. On peut alléger les hypothèses de ce théorème et se contenter de la convergence uniforme. Mais dans ce cas, il nous faut aussi l'intégrabilité des fonctions f_n.

Remarque. Un tel théorème permet de calculer des intégrales.

Exemple (Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la suite de fonctions définie telle que $f_n(0) = 0$ et $f_n(t) = \frac{t^n \ln t}{n}$ pour tout $t \in]0,1]$. Comme la série $\sum f_n$ est normalement convergente (par étude de fonctions), on applique le théorème :

$$\begin{array}{rcll}
\int_0^1 \ln t \ln(1-t)dt & = & -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln t}{n} & \text{application du théorème} \\
& = & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} & \text{par IPP} \\
& = & 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \\
& = & 2 - \frac{\pi^2}{6} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}
\end{array}$$

Théorème (Dérivation terme à terme). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ telle que*

1. *la série $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge simplement sur $[a,b]$;*
2. *la série des dérivées $\sum_{k\geq 0} f_k'$ converge uniformément sur $[a,b]$.*

Alors la série $\sum_{k\geq 0} f_k$ est uniformément convergente sur $[a,b]$ et sa somme est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $\sum_{k\geq 0} f_k'$.

Démonstration. On applique le théorème de la dérivation d'une limite de suite de fonctions à la suite des sommes partielles de la série. □

Exemple. La fonction exponentielle complexe est de classe $\mathcal{C}^1$ (définie via les séries entières).

Références

[1] W. Appel. *Probabilités pour les non-proabilitstes*. H&K édition.
[2] X. Gourdon. *Analyse*. Les maths en tête. Ellipses, 2008.
[3] J.-P. Marco ; P. Thieullen ; J.-A.Weil. *Mathématiques pour la L2*. Pearson education, 2007.
[4] M. Cottrel ; V.Genon-Catalot ; C. Duhamel ; T. Meyre. *Exercices de probabilité*. Cassini, 2005.