Groupe circulaire

Julie Parreaux

2018-2019

Référence du développement : Audin [1, p.203].

Leçons où on présente le développement : 108 (parties génératrices) ; 182 (complexes en géométrie) ; 183 (groupes en géométrie).

Définition (Groupe circulaire)**.** On appelle groupe circulaire, G, le groupe des transformations de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui préserve l'ensemble des droites et des cercles de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

A noter : la préservation seule des droites ou des cercles suffit. En effet, en fonction de la représentation de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, on obtient sous des droites (sur la droite projective), soit une sphère (la sphère de Riemann). On peut alors passer "facilement" de l'un à l'autre par projection stéréographique. Nous utilisons cette définition car nous allons utiliser les deux représentations de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans la suite du développement.

Théorème. *Le groupe circulaire G est engendré par les homographies ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$) et la conjugaison complexe ($z \mapsto \bar{z}$).*

Schéma du développement

1. Montrer que $G' \subseteq G$.
2. Montrer que $G' \subset G$.
   (a) Montrer que ϕ préserve les divisions harmoniques.
   (b) Montrer que ϕ est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$.
      i. Montrer que $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$.
      ii. Montrer que $\phi\left(a^2\right) = \phi(a)^2$.
      iii. Montrer que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.
   (c) Conclure.

Démonstration. On note G' le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe. Montrons que $G' = G$. Pour cela, on raisonne par double inclusion.

Étape 1 : montrons que $G' \subseteq G$. On commence par montrer un lemme qui caractérise l'alignement et la co-cyclicité par le birapport.

Lemme. *[1, Proposition VI.7.5, p.202] Pour que quatre points de $\mathbb{C}$ soient alignés ou co-cycliques, il faut et il suffit que leur birapport soit réel.*

Démonstration. Soient a, b, c, d quatre points du plan. Comme on parle du birapport de ces quatre points, on a a, b, c deux à deux distincts.

— Si d coïncide avec a, b ou c, alors $[a, b, c, d] = \infty, 1$ ou 0. Donc $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.

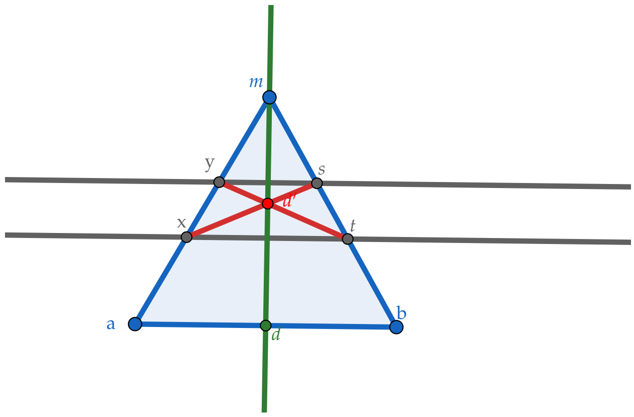

FIGURE 1 – Construction de d.

— Sinon, $[a,b,c,d] = \frac{c-a}{c-b} / \frac{d-a}{d-c}$ a pour argument une mesure de l'angle $(\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}) - (\overrightarrow{da}, \overrightarrow{db})$. Donc $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$ si et seulement si une mesure de l'angle $(\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}) - (\overrightarrow{da}, \overrightarrow{db})$ est nulle si et seulement si les quatre points sont cocycliques ou alignés.

$\square$

Comme les homographies (le birapport est un invariant du groupe projectif (des homographies)) et la conjugaison complexe il faut l'écrire préserve le birapport, on en déduit que les homographies et la conjugaison complexe préserve les droites et les cercles.

Étape 2 : montrons que $G' \subset G$**.** On procède en trois étapes. Soit $\phi : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ une bijection préservant les droites et les cercles. Montrons qu'elle est la composée de homographies et de la conjugaison complexe. Quitte à composée par une homographie, on peut supposer $\phi(\infty) = \infty$.

Étape a : montrons que ϕ préserve les divisions harmoniques. On rappelle alors que quatre points a,b,c,d sont en division harmonique si $[a,b,c,d] = -1$.

Lemme. *Si a,b,c,d sont en division harmonique, alors $\phi(a), \phi(b), \phi(c)$ et $\phi(d)$ sont en division harmonique.*

Démonstration. On considère trois points distincts $a,b,c \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et on souhaite construire l'unique point $d \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ tel que $[a,b,c,d] = -1$ uniquement à l'aide de droite et de cercle (comme ϕ conserve les droites et le cercles, elle va conservé les propriétés l'alignement et de co-cyclicité de ces points). On suppose que $c = \infty$ (en effet, si a,b,c sont alignés, on doit envoyer d à l'infini donc en permutant c et d, on obtient ce qu'on veut. Et sinon, on envoi c à l'infini. D'où l'hypothèse). On pose $m \in \mathbb{C}$ tel que abm soit un triangle équilatéral et on construit d tel que le dessin sur la Figure 1 (on considère deux droites parallèles à ab qui coupent am et bm en x,z et en y,t. On note d' le point d'intersection de xt et yz. On construit d comme étant le point d'intersection entre ab et la droite passant pas m et d'.)). A partir de maintenant, on raisonne sutr $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Comme $[a,b,\infty,d] = -1$ si et seulement si d est le milieu du segment $[ab]$, on montre que (md) est la médiane issue de m du triangle abm (cela montre que d est bien le milieu de $[ab]$). Notons $\mathcal{D}$ cette médiane et montrons que $md = \mathcal{D}$. Comme abm est un triangle équilatéral, $\mathcal{D}$ est aussi une bissectrice de abm issue du point m. On en déduit que x et y (respectivement z et t) sont symétriques par rapport à $\mathcal{D}$. Donc, $d' \in \mathcal{D}$ et $(md) = \mathcal{D}$.

De plus, les droites (abc), (xyc) et (ztc) s'intersectent uniquement en c. Comme ϕ conserve les droites et est bijective les images de ces droites par ϕ on un unique point d'intersection $\phi(c) = \infty$. On montre que $\phi(d)$ est le milieu de $[\phi(a)\phi(b)]$ en se ramenant au cas précédent par une transformation affine (on a bien conservation du parallélisme et de la conservation des milieux).

D'où le résultat. $\square$

Étape b : montrons que ϕ est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$ Quitte à composer par une homographie ϕ, on peut supposer que $\phi(\infty) = \infty$, $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$. Montrons que ϕ est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$.

1. Montrons que $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$. Soit a, b, c trois points de $\mathbb{C}$ distincts. Comme $[a, b, c, \infty] = -1$ si et seulement si $c = \frac{a+b}{2}$, alors ϕ conserve les milieux (par ce qui précède) : $\phi(\frac{a+b}{2}) = \frac{\phi(a)+\phi(b)}{2}$. En particulier pour $a = 0$, on a $\phi(\frac{a}{2}) = \frac{\phi(a)}{2}$ soit $2\phi(\frac{a}{2}) = \phi(a)$. D'où $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$.
2. Montrons que $\phi(a^2) = \phi(a)^2$. $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$, on a $[a, -a, a^2, 1] = -1$ donc comme ϕ conserve les divisions harmoniques, $[\phi(a), -\phi(a), \phi(a^2), 1] = -1$ et $[\phi(a), -\phi(a), \phi(a)^2, 1] = -1$ (car vrai pour tout a), on obtient que $\phi(a^2) = \phi(a)^2$.
3. Montrons que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ pour a et b distincts. Par l'identité de polarisation $ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2)$ et par conservation des milieux et des carrés, on obtient que $\phi(ab) = \phi(\frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2)) = \frac{1}{4}((\phi(a)+\phi(b))^2 - (\phi(a)-\phi(b))^2) = \phi(a)\phi(b)$. D'où $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

Étape c : conclure Finalement, on sait que $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (par préservation de l'ensemble des droites-cercles), et que $\phi_{|\mathbb{Q}} = Id_{\mathbb{Q}}$. Or $\phi_{|\mathbb{R}}$ est croissante : en effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x > y$, $\phi(x) - \phi(y) = \phi(\sqrt{x-y})^2 \geq 0$. On en déduit que $\phi_{|\mathbb{R}} = Id_{\mathbb{R}}$. En conclusion, ϕ est soit l'identité, soit la conjugaison complexe, ce qui achève la démonstration.

$\square$

Références

[1] M. Audin. *Géométrie*. EDP Science, 2006.