

# Solution des Oraux d'Algèbre

Killian Le Milbeau

28 février 2024

*Disclaimer* Tous les exercices du poly d'énoncés ne sont pas corrigés. Ainsi, si vous avez trouvé une solution, merci de me la communiquer. Je mettrai régulièrement le poly à jour et si c'est vous qui avez trouvé la solution, je la mettrai à votre nom.  
S'il y a des erreurs, merci de me contacter.

---

# TABLE DES MATIÈRES

1	Solution de 2013	3
2	Solution de 2015	5
3	Solution de 2016	9
4	Solution de 2017	10
5	Solution de 2018	15
6	Solutions de 2019	18
7	Solutions de 2020	24
8	Solutions de 2021	27
9	Solution de 2022	31
10	Solution des exercices	33

---

---

# CHAPITRE 1

---

## SOLUTION DE 2013

### *Solution 2013.1 :*

- Pour  $K = \mathbb{C}$ , la réponse est oui via la densité des matrices diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
- Pour  $K = \mathbb{R}$ , la réponse est aussi oui.

On considère,  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$ ,  $M_{i,j} = \begin{cases} D + E_{i,j} & , \text{ si } i \neq j \\ E_{i,i} & , \text{ si } i = j \end{cases}$ ,

où  $D = \text{diag}(1, \dots, n)$  et où les  $E_{i,j}$  sont les éléments de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrons que chaque  $M_{i,j}$  est diagonalisable.

(a) Si  $i = j$ ,  $M_{i,j} = E_{i,i}$  est déjà diagonale. C'est bon.

(b) Si  $i \neq j$ , on a  $M_{i,j} = D + E_{i,j}$ . Donc  $M_{i,j}$  est triangulaire avec tous ses éléments diagonaux distincts.

Ainsi,  $\chi_{M_{i,j}} = \prod_{i=1}^n (X - i)$  est scindé à racines simples. D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$M_{i,j}$  est annulé par  $\chi_{M_{i,j}}$  qui est scindé à racines simples, donc  $M_{i,j}$  est diagonalisable.

Dans tous les cas,  $M_{i,j}$  est diagonalisable.

Montrons alors que  $(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  forme une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Il suffit de montrer le caractère générateur car  $\text{Card}((M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$ .

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose  $B = A - \sum_{i \neq j} a_{i,j} M_{i,j}$ . On veut montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B$

est diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$
$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} - [(a_{2,1}M_{2,1} + \dots + a_{n,1}M_{n,1}) + (a_{1,2}M_{1,2} + a_{3,2}M_{3,2} + \dots + a_{n,2}M_{n,2}) + \dots + (a_{1,n}M_{1,n} + \dots + a_{(n-1),n}M_{(n-1),n})].$$

On voit que l'on soustrait des termes à la diagonale de  $A$ , sans l'annuler grâce à la matrice  $D$ . Cependant, la présence des  $E_{i,j}$  annule tous les termes non-diagonaux, car on multiplie cette matrice par un unique  $a_{i,j}$  associé.

Finalement,  $B$  est diagonale et chaque matrice diagonale peut se décomposer en combinaison linéaire de  $E_{i,i}$ .

Or,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E_{i,i} = M_{i,i}$ , donc, en notant  $\mu_i$  les éléments diagonaux de  $B$  :

$$B = \sum_{i=1}^n \mu_i E_{i,i} = \sum_{i=1}^n \mu_i M_{i,i} = A - \sum_{i \neq j} a_{i,j} M_{i,j}$$

D'où,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = \sum_{i=1}^n \mu_i M_{i,i} + \sum_{i \neq j} a_{i,j} M_{i,j}$$

Si bien que,  $(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  est génératrice. On a donc la base que l'on voulait. CQFD.

*On peut avoir en tête le résultat suivant avant d'attaquer l'exercice : Pour tout sous-ensemble  $G$  d'intérieur non-vide d'un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie  $E$ , il existe une base de  $E$  formée d'éléments de  $G$ . De plus, pendant l'oral, il peut être bon de savoir démontrer la densité des matrices diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . C'est du cours.*

---

---

# CHAPITRE 2

---

## SOLUTION DE 2015

### *Solution 2015.2 :*

Sous les hypothèses de l'énoncé, montrons que  $A$  et  $B$  est un vecteur propre en commun :

- Si  $B = 0$ , alors tout vecteur propre de  $A$  est aussi un vecteur propre de  $B$ .
- Si  $B \neq 0$ . Alors,  $\text{Im}(B)$  est stable par  $B$ . Ainsi, on a un vecteur propre de  $B$  dans  $\text{Im}(B)$ . De plus, comme  $AB = 0$ , on a  $\text{Im}(B) \subseteq \text{Ker}(A)$ . Ce vecteur propre de  $B$  est aussi un vecteur propre de  $A$ , associé à la valeur propre 0.

Maintenant, procédons à la démonstration du résultat principal.

Pour ce faire, on va raisonner par récurrence sur la taille  $n$  des matrices  $A$  et  $B$ . C'est un type de raisonnement très classique en réduction des endomorphismes.

Initialisation : Immédiat pour  $n = 1$

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang  $n - 1 \geq 1$ . Soit  $A, B$  telles que  $AB = 0$ .

Soit  $X_1$  un vecteur propre commun à  $A$  et à  $B$ , associé aux valeurs propres respectives  $\lambda$  et  $\mu$ .

Prenons  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  dont la première colonne est  $X_1$  (c'est comme ça qu'on construit les changements de bases).

$$\text{Alors : } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & \\ \vdots & B' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

On a,  $P^{-1}APP^{-1}BP = P^{-1}ABP = 0$  car  $AB = 0$ .

D'où, en reprenant les écritures matricielles :

$$\begin{cases} \lambda\mu = 0 \\ A'B' = 0 \end{cases}, (A', B') \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$$

Ainsi, d'après l'HR :  $\exists Q \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{C}) \mid Q^{-1}A'Q$  et  $Q^{-1}B'Q$  soient triangulaires supérieures.

Ainsi, en posant  $R = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , on a le résultat.

**Solution 2015.3 :**

Bon, dans l'énoncé on nous dit que  $f \in \mathcal{L}(E)$ , mais c'est bien de le montrer aussi.

Comme la fonction  $u$  est continue sur  $[0, 1]$ , le théorème fondamental de l'analyse nous dit que  $f(u)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc en particulier continue sur  $[0, 1]$ .

Donc l'application est bien définie de  $E$  dans  $E$ . De plus, elle est évidemment linéaire par linéarité de l'intégrale.

Donc, on a bien  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Maintenant, on considère  $\lambda$  une valeur propre de  $f$  et  $v \neq 0$  un vecteur propre associé à cette valeur propre.

- Si  $\lambda = 0$ ,  $f(v) = \lambda.v = 0$  et comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $f'(v) = 0$ .

Si bien que  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\int_x^1 v(t)dt = 0$ .

En dérivant une deuxième fois, on obtient  $v = 0$ , ce qui est impossible car c'est un vecteur propre. Donc,  $0 \notin \text{Sp}(f)$ .

- Si  $\lambda \neq 0$ , on a toujours  $f(v) = \lambda.v$  et donc  $v$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

D'où,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\lambda v'(x) = xv(x) + \int_x^1 v(t)dt - xv(x) = \int_x^1 v(t)dt$  (\*)

car,  $f(v)(x) = \int_0^1 \min(x, t)v(t)dt = \int_0^x tv(t)dt + x \int_x^1 v(t)dt$  Ainsi, d'après (\*), la fonction  $v$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Si bien que,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\lambda.v''(x) = -v(x)$ , ie,  $v'' + \frac{1}{\lambda}v = 0$ , car on a montré que  $\lambda \neq 0$ .

On pose  $a = \frac{1}{\lambda}$ . Alors, en résolvant l'équation différentielle :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in [0, 1], v(x) = \begin{cases} \alpha \cos(\sqrt{ax}) + \beta \sin(\sqrt{ax}) & , \text{ si } a > 0 \\ \alpha \cosh(\sqrt{-ax}) + \beta \sinh(\sqrt{-ax}) & , \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{On a, } v(0) = 0 \text{ donc } \alpha = 0. \text{ D'où, } \forall x \in [0, 1], v(x) = \begin{cases} \beta \sin(\sqrt{ax}) & , \text{ si } a > 0 \\ \beta \sinh(\sqrt{-ax}) & , \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Ok, maintenant on va voir ce qu'on a sur les dérivées.

Avec (\*), on a que,  $\lambda v'(1) = \int_1^1 v(t)dt = 0$ .

$$\text{De plus, } \forall x \in [0, 1], v'(x) = \begin{cases} \beta\sqrt{a} \cos(\sqrt{ax}) & , \text{ si } a > 0 \\ \beta\sqrt{-a} \cosh(\sqrt{-ax}) & , \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Si bien que, } \forall x \in [0, 1], \lambda v'(1) = \begin{cases} \lambda\beta\sqrt{a} \cos(\sqrt{a}) & , \text{ si } a > 0 \\ \lambda\beta\sqrt{-a} \cosh(\sqrt{-a}) & , \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Maintenant, comme  $\lambda \neq 0$ , on a  $a \neq 0$  et donc  $\sqrt{a}, \sqrt{-a} \neq 0$ , et  $\beta \neq 0$ .

$$\text{Donc, } \begin{cases} \cos(\sqrt{a}) = 0 & , \text{ si } a > 0 \\ \cosh(\sqrt{-a}) = 0 & , \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Or, la fonction cosinus hyperbolique ne prend pas la valeur 0. Donc, on est forcément dans le cas  $a > 0$ , c'est-à-dire que  $\lambda > 0$ .

Ainsi,  $\lambda > 0$  et  $\cos(\sqrt{a}) = 0$  donc  $\exists k \in \mathbb{N} \mid a = (\frac{\pi}{2} + k\pi)^2$ .

Finalement,  $\lambda = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + k\pi)^2}$  et  $v(x) = \beta \sin((\frac{\pi}{2} + k\pi)x)$ .

Réciproquement, ça marche.

En résumé, les valeurs propres de  $f$  sont les  $\lambda_k = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + k\pi)^2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et les vecteurs propres correspondant sont de dimension 1 sont les espaces engendrés par  $v_k : x \mapsto \sin((\frac{\pi}{2} + k\pi)x)$ .

Concernant le théorème à redémontrer, c'est dans votre cours.

**Solution 2015.4** : Déterminant de Gram

1) On pose  $F = \text{Vect}\{x_1, \dots, x_n\}$  et soit  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base orthonormée de  $F$ .

On a,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i = \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ \vdots \\ x_{i,n} \end{pmatrix}$  avec les  $x_{i,k}$  coordonnées des  $x_i$  dans  $\mathcal{B}$ .

On a  $G((x_1, \dots, x_n)) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{i,j}$  et,  $\langle x_i | x_j \rangle = \sum_{k=1}^n x_{i,k} x_{j,k} = [X^T X]_{i,j}$ .

Si bien que,  $G((x_1, \dots, x_n)) = X^T X$ . Or,  $\text{rg}(X^T X) = \text{rg}(X)$ .

Ainsi,  $\text{rg}(G((x_1, \dots, x_n))) = \text{rg}(X^T X) = \text{rg}(X) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ .

2) On prend les mêmes notations ducoup.

On a  $G(x_1, \dots, x_n, x) = \begin{pmatrix} \langle x_1 | x_1 \rangle & \langle x_1 | x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1 | x_n \rangle & \langle x_1 | x \rangle \\ \langle x_2 | x_1 \rangle & \langle x_2 | x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2 | x_n \rangle & \langle x_2 | x \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n | x_1 \rangle & \langle x_n | x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n | x_n \rangle & \langle x_n | x \rangle \\ \langle x | x_1 \rangle & \langle x | x_2 \rangle & \cdots & \langle x | x_n \rangle & \langle x | x \rangle \end{pmatrix}$

On peut déjà remarquer que c'est une matrice symétrique car le produit scalaire est commutatif. Cela peut servir dans pas mal d'exercices sur les matrices de Gram donc je le pose ici.

Bon,  $F$  est de dimension finie, donc  $d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$  par le théorème de Pythagore, en posant  $p_F$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$ .

Maintenant, ce qu'on veut c'est faire apparaître ce projeté orthogonale dans la matrice de Gram, et plus précisément dans son déterminant.

Pour cela, on remarque que  $x = x + p_F(x) - p_F(x)$  et donc que,

$$\langle x_i | x \rangle = \langle x_i | x + p_F(x) - p_F(x) \rangle = \langle x_i | x - p_F(x) \rangle + \langle x_i | p_F(x) \rangle$$

Et, pour tout  $i$ ,  $\langle x_i | x - p_F(x) \rangle = 0$

Maintenant, sur la dernière ligne, on a  $\langle x | x + p_F(x) - p_F(x) \rangle = \langle x | x - p_F(x) \rangle + \langle x | p_F(x) \rangle = \|x - p_F(x)\|^2 + \langle x | p_F(x) \rangle$ .

$$|G(x_1, \dots, x_n, x)| = \det \begin{pmatrix} \langle x_1 | x_1 \rangle & \langle x_1 | x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1 | x_n \rangle & \langle x_1 | x + p_F(x) - p_F(x) \rangle \\ \langle x_2 | x_1 \rangle & \langle x_2 | x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2 | x_n \rangle & \langle x_2 | x + p_F(x) - p_F(x) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n | x_1 \rangle & \langle x_n | x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n | x_n \rangle & \langle x_n | x + p_F(x) - p_F(x) \rangle \\ \langle x | x_1 \rangle & \langle x | x_2 \rangle & \cdots & \langle x | x_n \rangle & \langle x | x + p_F(x) - p_F(x) \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \langle x_1 | x_1 \rangle & \langle x_1 | x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1 | x_n \rangle & \langle x_1 | x - p_F(x) \rangle \\ \langle x_2 | x_1 \rangle & \langle x_2 | x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2 | x_n \rangle & \langle x_2 | x - p_F(x) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n | x_1 \rangle & \langle x_n | x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n | x_n \rangle & \langle x_n | x - p_F(x) \rangle \\ \langle x | x_1 \rangle & \langle x | x_2 \rangle & \cdots & \langle x | x_n \rangle & \langle x | x - p_F(x) \rangle \end{pmatrix}$$

$$+ \det \begin{pmatrix} \langle x_1|x_1 \rangle & \langle x_1|x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1|x_n \rangle & \langle x_1|p_F(x) \rangle \\ \langle x_2|x_1 \rangle & \langle x_2|x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2|x_n \rangle & \langle x_2|p_F(x) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n|x_1 \rangle & \langle x_n|x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n|x_n \rangle & \langle x_n|p_F(x) \rangle \\ \langle x|x_1 \rangle & \langle x|x_2 \rangle & \cdots & \langle x|x_n \rangle & \langle x|p_F(x) \rangle \end{pmatrix}$$

Désolé, c'est un peu dégueu à écrire mais il faut bien comprendre ce qu'il se passe.

Maintenant, pour la première matrice de la somme, on regarde la dernière colonne :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x_i|x - p_F(x) \rangle = 0 \text{ et } \langle x|x - p_F(x) \rangle = \|x - p_F(x)\|^2$$

Pour la deuxième matrice de la somme, on regarde la dernière ligne :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x|x_i \rangle = \langle p_F(x)|x_i \rangle$$

D'où,

$$|G(x_1, \dots, x_n, x)| = \det \begin{pmatrix} \langle x_1|x_1 \rangle & \langle x_1|x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1|x_n \rangle & 0 \\ \langle x_2|x_1 \rangle & \langle x_2|x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2|x_n \rangle & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n|x_1 \rangle & \langle x_n|x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n|x_n \rangle & 0 \\ \langle x|x_1 \rangle & \langle x|x_2 \rangle & \cdots & \langle x|x_n \rangle & \|x - p_F(x)\|^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \det \begin{pmatrix} \langle x_1|x_1 \rangle & \langle x_1|x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1|x_n \rangle & \langle x_1|p_F(x) \rangle \\ \langle x_2|x_1 \rangle & \langle x_2|x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2|x_n \rangle & \langle x_2|p_F(x) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n|x_1 \rangle & \langle x_n|x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n|x_n \rangle & \langle x_n|p_F(x) \rangle \\ \langle p_F(x)|x_1 \rangle & \langle p_F(x)|x_2 \rangle & \cdots & \langle p_F(x)|x_n \rangle & \langle p_F(x)|p_F(x) \rangle \end{pmatrix}$$

Donc, en développant par rapport à la dernière colonne dans la première matrice, on a la relation suivante :

$$|G(x_1, \dots, x_n, x)| = \|x - p_F(x)\|^2 \cdot |G(x_1, \dots, x_n)| + |G(x_1, \dots, x_n, p_F(x))|$$

Or, comme dit précédemment,  $\|x - p_F(x)\|^2 = d(x, F)^2$ .

D'où,

$$|G(x_1, \dots, x_n, x)| = d(x, F)^2 \cdot |G(x_1, \dots, x_n)| + |G(x_1, \dots, x_n, p_F(x))|$$

Donc, maintenant, si j'arrive à montrer que  $|G(x_1, \dots, x_n, p_F(x))| = 0$ , on aura gagné.

C'est assez facile à comprendre. En effet,  $p_F(x)$  est la projection de  $x$  sur  $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ .

En particulier,  $p_F(x)$  s'écrit comme une combinaison linéaire des  $x_i$ . Donc la dernière colonne est combinaison linéaire des autres, ainsi le déterminant est bien nul :  $|G(x_1, \dots, x_n, p_F(x))| = 0$ .

D'où :

$$|G(x_1, \dots, x_n, x)| = d(x, F)^2 \cdot |G(x_1, \dots, x_n)| \iff d(x, F)^2 = \frac{|G(x_1, \dots, x_n, x)|}{|G(x_1, \dots, x_n)|}$$

C'est gagné!

---

---

# CHAPITRE 3

---

## SOLUTION DE 2016

*Solution 2016.1* : C'est du cours, je l'écrirais plus tard.

*Solution 2016.2* :

Qu'est-ce qu'on sait de la matrice nulle ? Son rang est nul lui aussi, car c'est la matrice de l'endomorphisme nul  $f$  dont le noyau est  $E$ , donc  $\dim(\text{Im } f) = 0$ .

Comment se comporte donc le rang d'une matrice non-nulle lorsqu'on la multiplie avec une matrice nilpotente avec laquelle elle commute ? On va voir ça.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $A \neq 0$  et soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  nilpotente et telle que  $AB = BA$ .

Montrons que,

$$\underline{\text{rg}(AB) < \text{rg}(A)}$$

.

On raisonne par l'absurde en supposant que,  $\text{rg}(AB) \geq \text{rg}(A)$ .

Ainsi, comme  $\text{rg}(AB) \leq \min\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\}$ , en particulier,  $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$  et donc,

$$\text{rg}(AB) = \text{rg}(A)$$

Si bien que,

$$\ker(AB) = \ker(A)$$

Car, Théorème du rang + si  $AX = 0$  alors  $BAX = 0$  ie,  $ABX = 0$  par commutativité, ie  $\ker(A) \subset \ker(AB)$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(\text{Im}(A))$  tel que,  $f(Y) = BY$ . L'application ainsi définie est évidemment injective. Or, comme  $B$  est nilpotente, soit  $p$  son indice de nilpotence, on a  $f^p = 0$ . C'est absurde car  $\text{Im}(A) \neq \{0\}$ .

D'où le résultat.

Par récurrence immédiate, on a que l'assertion suivante est vraie :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{H}_p : \text{''rg}\left(\prod_{k=1}^p A_k\right) \leq n - p\text{''}$$

Et ainsi,  $\mathcal{H}_n$  donne le résultat.

---

---

# CHAPITRE 4

---

## SOLUTION DE 2017

### *Solution 2017.1 :*

Celui-là j'avais trouvé un truc peu convaincant et quelqu'un m'avait envoyé une solution. Ducoup ce n'est pas de moi. Elle est assez astucieuse.

Notons  $\mathcal{T} = \{M \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ . On veut montrer que tout élément de  $\mathcal{T}$  est combinaison linéaire de matrices nilpotentes.

Pour cela, on va exhiber une base de  $\mathcal{T}$  qui est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On va la construire via la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose :

$$\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n} \cup (E_{i,i} - E_{n,n})_{1 \leq i \leq n-1}$$

On a les termes hors-diagonale et les termes intradiagonales en fait.

On voit que, 
$$\begin{cases} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, \text{Tr}(E_{i,j}) = 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \text{Tr}(E_{i,i} - E_{n,n}) = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Ainsi,  $\mathcal{B}$  est bien constituée de matrices de trace nulle.

Montrons que,  $\mathcal{B}$  est bien une base de  $\mathcal{T}$ .

- La liberté des  $(E_{i,j})$  implique la liberté de  $\mathcal{B}$ .

- Maintenant, 
$$\begin{cases} \text{Card}(E_{i,j})_{i \neq j} = n^2 - n \\ \text{Card}(E_{i,i} - E_{n,n})_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket} = n - 1 \end{cases}$$
 . D'où,  $\text{Card}(\mathcal{B}) = n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$ .

De plus,  $\mathcal{T} = \text{Ker}(\text{Tr})$ . C'est donc le noyau d'une forme linéaire. Ainsi,  $\mathcal{T}$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et donc de dimension  $n^2 - 1$ .

C'est-à-dire que,  $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathcal{T})$

Ainsi,  $\mathcal{B}$  est bien une base de  $\mathcal{T}$ .

Maintenant qu'on a cela, posons  $M_i = E_{i,i} - E_{n,n}$ .

Comme on sait que les  $(E_{i,j})_{i \neq j}$  sont nilpotentes, il ne reste plus qu'à montrer que les  $M_i$  sont combinaisons linéaires de matrices nilpotentes.

C'est assez facile de s'en convaincre :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, M_i = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ & 0 & & & & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ & 0 & & & & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} + E_{i,n} - E_{n,i}$$

On appelle la matrice  $M'_i$  et on a :  $M'_i = M_i - E_{i,n} + E_{n,i}$  et  $(M'_i)^2 = 0$ .

Si bien que,

$$M_i = M'_i + E_{i,n} - E_{n,i}$$

Ainsi,  $M_i$  est bien combinaison linéaire de matrices nilpotentes.

Comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{T}$ , on a bien l'égalité voulue.

**Solution 2017.2 :**

1) On procède par récurrence sur  $n$ . On pose donc le postulat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_n : "A^n B - BA^n = nA^n"$$

Initialisation : C'est évidemment vrai pour  $n = 0$  mais c'est un cas un peu pathologique.

Pour  $n = 1$ ,  $AB - BA = A$  par hypothèse.

$H_0$  et  $H_1$  sont vraies.

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$ , quelconque, tel que  $A^n B - BA^n = nA^n$ . Montrons  $H_{n+1}$ .

D'après  $H_n$ ,  $nA^{n+1} = nA^n A = (A^n B - BA^n)A = A^n BA - BA^{n+1}$ .

Or d'après  $H_1$ ,  $BA = AB - A$ .

D'où,  $nA^{n+1} = A^n(AB - A) - BA^{n+1} = A^{n+1}B - A^{n+1} - BA^{n+1}$ .

C'est-à-dire,  $A^{n+1}B - BA^{n+1} = (n+1)A^{n+1}$ .

2) Montrons maintenant que  $A$  est nilpotente. Pour cela, on raisonne par l'absurde.

C'est-à-dire que l'on suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n \neq 0$ .

On se munit d'une norme matricielle sous-multiplicative, par exemple  $\|\cdot\|_\infty$ . De toute façon, elles sont toutes équivalentes en dimension finie.

On a alors,  $\|A^n B - BA^n\|_\infty = n\|A\|_\infty^n$  par la première question.

Or,  $\|A^n B - BA^n\|_\infty \leq \|A^n B\|_\infty + \|BA^n\|_\infty \leq 2\|B\|_\infty \|A\|_\infty^n$ .

C'est-à-dire,  $n\|A\|_\infty^n \leq 2\|B\|_\infty \|A\|_\infty^n$ . (\*)

• Si  $\|A\|_\infty = 0$ , alors  $A = 0$ . C'est absurde car  $A \neq 0$  par hypothèse.

• Si  $\|A\|_\infty \neq 0$  alors, (\*)  $\Rightarrow n \leq 2\|B\|_\infty$ , c'est absurde par l'asymptotique  $[n \rightarrow +\infty]$ .

Dans tous les cas, on obtient une absurdité.

Ainsi,  $A$  est nilpotente.

**Solution 2017.3 :** C'est du dénombrement. Pas de difficulté.

**Solution 2017.4 :**

Soit  $K$  un tel corps et  $M$  une telle matrice. Montrons alors que  $M^n = 0$ .

Enfait, c'est une réécriture d'un résultat extrêmement classique, un exercice que tous les taupins doivent savoir faire, qui est le suivant :

$$M \text{ est nilpotente} \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Tr}(M^k) = 0$$

On va montrer ce résultat et on aura directement la solution de l'exercice.

⇒ Si  $M$  est nilpotente, alors pour tout  $k$ ,  $M^k$  l'est aussi et 0 est l'unique valeur propre de  $M^k$  dans  $\mathbb{C}$ .  
Donc, comme la trace est la somme des valeurs propres (c'est un invariant de similitude), on a bien l'implication.

⇐ Supposons que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Tr}(M^k) = 0$ . On prend  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  les valeurs propres distinctes complexes de  $M$ . On note  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  les multiplicités respectives de chaque valeur propre.

En considérant toutes les valeurs propres distinctes de  $M$  avec leur multiplicité, on couvre tous les cas, car si toutes les valeurs propres de  $M$  sont distinctes, alors on a juste  $m = n$  et les  $\alpha_i = 1$ , et sinon,  $m < n$  avec les multiplicités respectives.

Supposons que toutes ces valeurs propres soient non-nulles.

Alors, on sait que  $M$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure  $T$  dans  $C$ . Ainsi, pour tout  $k$ ,  $M^k$  est semblable à  $T^k$  et ses valeurs propres sont les  $\lambda_i^k$  avec les mêmes multiplicités.

Ainsi,

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Tr}(M^k) = 0 \iff \begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1^2 + \dots + \alpha_m \lambda_m^2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \lambda_1^n + \dots + \alpha_m \lambda_m^n = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi une matrice de Vandermonde, dans laquelle on ne prend que les puissances de 1 à  $m$  :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^m & \dots & \lambda_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme les valeurs propres sont toutes deux à deux distinctes, la matrice de Vandermonde est inversible et donc :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice  $M$  n'admet que des valeurs propres nulles. Elle est donc semblable à une matrice strictement triangulaire et donc nilpotente.

On revient donc à notre énoncé de base. La condition fixée sur les trace successives de  $M^k$  revient à dire que  $M$  est nilpotente. Donc, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, elle est annulée par le polynôme  $P = X^n$ .

C'est-à-dire que  $M^n = 0$ .

**Solution 2017.5 :**

Posons  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ . Alors,  $P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k (P^k(X) - X^k)$ .

Or,  $a^k - b^k = (a - b) \sum_{l=0}^{k-1} a^l b^{k-1-l}$ , d'où  $P^k(X) - X^k = (P(X) - X) \sum_{l=0}^{k-1} P^l(X) X^{k-1-l}$ .

Ainsi,  $P(X) - X$  divise  $P^k(X) - X^k$  et donc,  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - P(X)$ .

De plus, on a évidemment que  $P(X) - X$  divise  $P(X) - X$ .

Ainsi,  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - P(X) + P(X) - X = P(P(X)) - X$ .

Finalement,  $P(P(X)) - X$  est divisible par  $P(X) - X$ .

Pour aller plus loin, si on note  $P^{\tilde{n}} = P \circ \dots \circ P$  avec  $n$  composition. On peut montrer, par récurrence que  $P(X) - X$  divise  $P^{\tilde{n}}(X) - X$ .

**Solution 2017.6 :**

**Solution 2017.7 :**

**Solution 2017.8 :**

1)  $X$  décrit l'ensemble des points du cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $r = \sqrt{3}$ .

2) Soit  $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$  tels que  $x^2 + y^2 = 3$ .

$$X^2 + Y^2 - 3Z^2 = 0 \iff X^2 + Y^2 = 3Z^2 \iff \frac{X^2}{Z^2} + \frac{Y^2}{Z^2} = 3, (X, Y, Z) \in \mathbb{Z}^3.$$

On prend bien sûr  $Z \neq 0$  et on pose  $x = \frac{X}{Z}$  et  $y = \frac{Y}{Z}$ .

On peut, quitte à diviser par leur pgcd, supposer que  $\text{pgcd}(X, Y, Z) = 1$ .

On a,  $X^2 + Y^2 = 3Z^2 \Rightarrow X^2 + Y^2 \equiv 0[3]$ .

D'où,  $(X, Y) \equiv (0, 0)[3]$  ou  $(X, Y) \equiv (\pm 1, \mp 1)[3]$ .

On étudie séparément les deux cas,

Si  $(X, Y) \equiv (\pm 1, \mp 1)[3]$ , on peut supposer (quitte à échanger), que  $X \equiv 1[3]$  et  $Y \equiv -1[3]$ . C'est impossible car  $-1$  n'est pas un carré dans  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Sinon,  $(X, Y) \equiv (0, 0)[3]$ , alors,  $9|3Z^2 \Rightarrow 3|Z^2 \Rightarrow 3|Z$  car 3 est un nombre premier. Donc,  $3|\text{pgcd}(X, Y, Z)$ , ce qui est exclu.

Dans tous les cas, c'est impossible.

**Solution 2017.9 :**

On raisonne par double implication,

$\Rightarrow$  Supposons que  $M$  est diagonalisable dans  $K$ . Alors, en notant  $\lambda_k \in K$  les valeurs propres de  $M$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , on a :

$$\exists P \in \text{GL}_n(K) \mid M = PDP^{-1} \Rightarrow M^p = P D^p P^{-1} \text{ avec } D^p = \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p).$$

Or, comme  $\lambda_k \in K$ ,  $\lambda_k^p = \lambda_k$ . D'où,  $M^p = M$ .

$\Leftarrow$  Supposons que  $M^p = M$ . Alors le polynôme  $P = X^p - X$  est annulateur de la matrice  $M$ .

Le groupe des inversibles de  $K$  étant fini (car  $K$  l'est) et monogène, il est cyclique. Soit  $\omega$  un générateur de  $K^\times$ .

$$\text{Alors, } P = X^p - X = X(X^{p-1} - X) = X \prod_{k=0}^{p-1} (X - \omega^k) : P \text{ est scindé à racine simple.}$$

Donc,  $M$  est bien diagonalisable.

**Solution 2017.10 :**

**Solution 2017.11 :**

1) Prenons  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre associée au vecteur propre  $f \in E \setminus \{0\}$ . Alors,  $\Phi(f) = \lambda f$ .

C'est-à-dire,  $f' + tf = \lambda f \iff f' + (t - \lambda)f = 0$  (\*)

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 est donc un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 1.

Les solutions sont, pour  $C \in \mathbb{R}$ ,  $f_\lambda(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\lambda t}$ .

Tous les  $\lambda \in \mathbb{C}$  sont donc valeurs propres de  $\Phi$ , l'espace propre associé étant la droite vectorielle de direction  $f_\lambda$ .

2) On passe au cas de  $\Phi \circ \Phi$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

- Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\exists \mu \in \mathbb{C}^* \mid \lambda = \mu^2$  et  $(X - \mu)(X + \mu) = X^2 - \lambda$ .

On s'intéresse à  $\text{Ker}(\Phi^2 - \lambda \text{Id})$ .

Comme  $\text{pgcd}(X - \mu, X + \mu) = 1$ , par le lemme des noyaux :

$$\text{Ker}(\Phi^2 - \lambda \text{Id}) = \text{Ker}(\Phi + \mu \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\Phi - \mu \text{Id}).$$

On en déduit que, si  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda$  est une valeur propre de  $\Phi^2$ , et  $E_\lambda(\Phi^2) = \text{Vect}\{(f_\mu, f_{-\mu}) \mid \mu \in \mathbb{C}^*\}$ .

- Si  $\lambda = 0$ . Alors,

$$\Phi^2(f) = 0 \iff (f' + tf)' + t(f' + tf) = 0 \quad (4.1)$$

$$\iff f'' + f + tf' + tf' + t^2f = 0 \quad (4.2)$$

$$\iff f'' + 2tf'(t^2 + 1)f = 0 \quad (4.3)$$

On doit donc résoudre cette équation différentielle linéaire d'ordre 2.

D'abord, on remarque que,  $\Phi^2(f) = 0 \Rightarrow \Phi(f) \in \text{Ker}(\Phi) \Rightarrow \Phi(f) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$  ie,  $f' + tf = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$ .

$$\text{ESSM : } f' + tf = 0 \Rightarrow \frac{f'}{f} = -t \Rightarrow \ln |f(t)| = \frac{t^2}{2} + Cte \Rightarrow f(t) = Be^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\text{EASM : } f(t) = B(t)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

$$f' + tf = Ce^{-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow B'(t)e^{-\frac{t^2}{2}} - B(t)te^{-\frac{t^2}{2}} + B(t)te^{-\frac{t^2}{2}} = Ce^{-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow B(t) = Ct$$

Ainsi, 0 est valeur propre de  $\Phi^2$  et  $E_0(\Phi^2) = \text{Vect}\{(t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}, t \mapsto te^{-\frac{t^2}{2}})\}$

3) Résolvons  $y'' + 2xy' + (x^2 + 3)y = 0$ . Cette équation est équivalente à  $\Phi^2(y) = -2y$  donc, c'est équivalent à chercher  $E_{-2}(\Phi^2)$ .

On utilise ce qu'il y a ci-dessus.

---

---

# CHAPITRE 5

---

## SOLUTION DE 2018

### *Solution 2018.1 :*

Cf. Problème du berger.

### *Solution 2018.2 :*

- 1) Prenons une telle suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et un tel  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Posons  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie comme suit :  $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ . Alors, on voit que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = v_n + \alpha u_n$ .

Par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \alpha^k v_{n-k}$ .

Soit  $\epsilon > 0$ ,  $|\sum_{k=0}^n \alpha^k v_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^n |\alpha^k| |v_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{l-1} |\alpha^k| |v_{n-k}| + \sum_{k=l}^n |\alpha^k| |v_{n-k}|$ .

Avec,  $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\forall k \geq l$ ,  $|\alpha|^k < \epsilon$ . Posons,  $C = \sup_{n \in \mathbb{N}} |v_{n-k}| \in \mathbb{R}_+$ .

Alors,

$$\sum_{k=l}^n |\alpha^k| |v_{n-k}| \leq C \sum_{k=l}^n |\alpha^k| = C |\alpha|^l \frac{1 - |\alpha|^{n+1-l}}{1 - |\alpha|} \leq \frac{C}{1 - |\alpha|} |\alpha|^l \leq \frac{C|\epsilon|}{1 - |\alpha|}.$$

Puis, comme  $v_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ ,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$ ,  $|v_n| \leq \frac{\epsilon}{l}$ .

Posons  $n = N + l$ ,

$$\sum_{k=0}^{l-1} |\alpha^k| |v_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{l-1} |v_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\epsilon}{l} = \epsilon.$$

Si bien que,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $|u_{n+1}| \leq \frac{C\epsilon}{1 - |\alpha|} + \epsilon = \epsilon'$ , c'est-à-dire que  $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ .

- 2) Soit  $P = \sum_{k=0}^d p_k X^k$ , alors  $[P(\sigma)(u)]_n = \sum_{k=0}^d p_k \sigma^k(u) = \sum_{k=0}^d p_k u_{n+k}$  (Changement de variable?)

- 3) Double-implication.

**Solution 2018.3 :**

On raisonne par double implication.

Le sens direct est évident. Si on a un groupe fini, comme un sous-groupe doit être en particulier inclus dans le groupe, on voit bien qu'on a un nombre fini de façon de former un sous-ensemble du groupe et donc en particulier de faire un sous-groupe.

Le sens indirect est un peu plus dur. Soit  $G$  un groupe dont l'ensemble des sous-groupes est fini. Alors,  $\forall x \in G, o(x) < +\infty$ . En effet, si  $\exists y \in G \mid o(y) = +\infty$  alors  $\langle y \rangle \cong \mathbb{Z}$  qui admet une infinité de sous-groupes, c'est donc absurde.

On rappelle que si un élément  $x$  est d'ordre  $n$ ,  $\langle x \rangle = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ . Maintenant, on peut écrire  $G$  comme la réunion de ses sous-groupes monogènes, qui sont en nombre fini et qui sont fini car tout élément de  $G$  est d'ordre fini. Ainsi,  $G$  est fini comme réunion finie d'ensembles finis.

**Solution 2018.4 :**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , montrons le résultat suivant :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} M^p = 0 \iff \forall \lambda \in \text{Sp}(A), |\lambda| < 1$$

$\Leftarrow$  C'est immédiat car  $|\lambda^p| = |\lambda|^p \rightarrow 0$

$\Rightarrow$  Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} M^p = 0$ . Comme  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos,  $M$  est trigonalisable.

Soit  $m \leq n$ , notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  les valeurs propres distinctes de  $M$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  leur multiplicité respective.

$$\text{Alors d'une part, } \text{Tr}(M^p) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j^p.$$

D'autre part, l'application  $\text{Tr}$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (car linéaire sur cet espace qui est de dimension finie). Si bien que,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} M^p = 0 \implies \lim_{p \rightarrow +\infty} \text{Tr}(M^p) = 0$ .

$$\text{Ainsi } \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j^p = 0.$$

Pour établir le résultat et ainsi finir la preuve, on va raisonner par récurrence sur  $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Pour cela, on pose le prédicat suivant pour tout  $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$H_m$  : " Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}^*$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  deux à deux distinctes.

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j^p = 0 \implies \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, |\lambda_j| < 1. "$$

Initialisation : Pour  $m = 1$ , on a  $\alpha_1 \lambda_1^p \rightarrow 0$  avec  $\alpha_1 \neq 0$ . D'où,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \lambda_1^p = 0$ , ie,  $|\lambda_1| < 1$ .

Hérédité : Supposons que  $H_{m-1}$  est vraie pour  $m - 1 \leq 1$  et montrons  $H_m$ .

Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}^*$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  deux à deux distincts, tels que,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j^p = 0$ .

$$\text{D'où, } \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j^{p+1} = 0.$$

$$\text{Maintenant, } \lambda_m \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j^p - \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j^{p+1} = (\lambda_m \alpha_m \lambda_m^p - \alpha_m \lambda_m^p) + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (\lambda_m - \lambda_j) \lambda_j^p.$$

$$\text{D'où, } \lambda_m \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j^p - \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j^{p+1} = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (\lambda_m - \lambda_j) \lambda_j^p \rightarrow 0.$$

Si bien que, en posant pour  $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$   $\beta_j = \alpha_j(\lambda_m - \lambda_j) \neq 0$ , on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \lambda_j^p = 0.$$

D'après  $H_{m-1}$ ,  $\forall j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ ,  $|\lambda_j| < 1$ .

Il manque  $\lambda_m$  pour avoir  $H_m$ .

$$\text{Pour cela, on l'isole : } \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j^p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \lambda_j^p + \alpha_m \lambda_m^p = 0.$$

D'où,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha_m \lambda_m^p = 0$  avec  $\alpha_m \neq 0$ .

Par le même raisonnement que dans l'initialisation, on a  $|\lambda_m| < 1$ .

Conclusion :  $\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $H_m$ .

On a donc caractérisé ces matrices.

**Solution 2018.5 :**

- 1) Soit  $n_1, \dots, n_k \geq 2$  des entiers deux à deux distincts. On suppose, sans perte de généralités, que ces entiers sont ordonnés (quitte à les réordonner). Ainsi, comme  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $n_i \geq 2$ , on a que :  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $n_i \geq 1 + i$ .

$$\text{Ainsi, } \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \geq \prod_{i=2}^{k+1} \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

- 2) On note  $\phi$  l'indicatrice d'Euler. On note  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$  la décomposition en facteur premier de  $n$ , avec  $p_1, \dots, p_k \geq 2$ .

$$\text{Alors, on a } n \geq p_1 \dots p_k \geq 2^k \text{ et donc } k \leq \frac{\ln(n)}{\ln(2)}.$$

$$\text{Maintenant, } \phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

$$\text{Si bien que, d'après la question 1), } \phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \geq \frac{n}{k+1} \geq \frac{n}{\frac{\ln(n)}{\ln(2)} + 1} = \frac{n \ln(2)}{\ln(n) + \ln(2)}.$$

**Solution 2018.6 :**

Déjà, si  $u$  est un automorphisme orthogonal de  $E$  ça marche.

En effet, pour un tel  $u$ , pour tout  $x \in E$ , il existe  $y \in E$  tel que  $y = u(x)$ . D'où,

$$x \in u(F^\perp) \iff y \in F^\perp \iff \forall z \in E, \langle y, z \rangle = 0 \iff \forall z \in E, \langle u(y) = x, u(z) \rangle = 0 \iff x \in u(F)^\perp$$

Donc, pour un automorphisme orthogonal de  $E$ ,  $u(F^\perp) = [u(F)]^\perp$ .

---

---

# CHAPITRE 6

---

## SOLUTIONS DE 2019

**Solution 2019.1 :**

Je crois qu'il y a une erreur dans l'énoncé de l'exercice. Je vais essayer de voir ça.

**Solution 2019.2 :**

1) Je pense que ce qu'on nous demande de montrer, c'est que pour  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ , on a :

$$|\text{rang}(u) - \text{rang}(v)| \leq \text{rang}(u + v) \leq \text{rang}(u) + \text{rang}(v)$$

C'est un très grand classique de concours, grand classique de sup aussi.

On a que,  $\text{Im}(u + v) \subseteq \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$ . D'où,

$$\text{rang}(u + v) = \dim(\text{Im}(u + v)) \leq \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) \leq \text{rang}(u) + \text{rang}(v)$$

On a donc l'inégalité de droite. On s'attaque à celle de gauche.

On sait que  $u = u + v - v = u + v + (-v)$ . Donc, par ce qui précède,

$$\text{rang}(u) = \text{rang}(u + v + (-v)) \leq \text{rang}(u + v) + \text{rang}(-v) = \text{rang}(u + v) + \text{rang}(v)$$

. C'est-à-dire, d'une part,

$$\text{rang}(u) - \text{rang}(v) \leq \text{rang}(u + v)$$

D'autre part,

$$\text{rang}(v) - \text{rang}(u) \leq \text{rang}(u + v)$$

Si bien que,

$$|\text{rang}(u) - \text{rang}(v)| \leq \text{rang}(u + v)$$

2) On sait que,  $u + v$  est inversible dans  $E$  et que  $u \circ v = 0$ .

Supposons que  $\dim(E) = n$ .

D'une part, comme  $u + v$  est inversible,  $\text{rang}(u + v) = n$ .

D'autre part, comme  $u \circ v = 0$ ,  $\text{Im}(v) \subseteq \text{Ker}(u)$ . Si bien que,  $\dim(\text{Im}(v)) = \text{rang}(v) \leq \dim(\text{Ker}(u))$ .

Ainsi, par le théorème du rang,  $n = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rang}(u) \geq \text{rang}(v) + \text{rang}(u)$

ie,  $\text{rang}(v) + \text{rang}(u) \leq n$ .

Puis, par l'inégalité de la question précédente, comme  $\text{rang}(u + v) = n$ ,  $\text{rang}(u + v) \leq \text{rang}(u) + \text{rang}(v)$ , donc  $n \leq \text{rang}(u) + \text{rang}(v)$ .

Par double inégalité,

$$\text{rang}(u + v) = n = \text{rang}(u) + \text{rang}(v)$$

**Solution 2019.3 :** (Merci à Benjamin Duquène pour l'astuce)

Il y a écrit "On pourra s'intéresser à" dans l'énoncé, mais je ne vais pas le faire. Vous pouvez essayer si vous voulez, c'est intéressant.

A la place, on va direct la résoudre, parce qu'on veut impressionner le jury.

On s'intéresse donc à  $X^2 + X + I = A$ , avec  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

On a une équation du second degré, donc normalement on pense directement au discriminant mais là comme c'est matriciel, on peut se dire que ça ne marche pas, ce qui est totalement normal. Surtout qu'en oral, on a peur de dire n'importe quoi.

Sauf que, avec un peu de justifications, ça marche.

En fait, on va se ramener à calculer des racines carrées de matrices, qui est un problème classique de réduction des endomorphismes. Le tout va marcher parce que la matrice identité commute avec toutes les matrices et donc en particulier avec  $X$ .

En effet, partant de  $X^2 + X + I_2 = A$ , il vient que  $X^2 + X + (I_2 - A) = 0$ .

D'où,  $\Delta = I_2^2 - 4(I_2 - A) = 4A - 3I_2 = \delta^2$ , où  $\delta$  est une racine carrée de  $\Delta$ .

Ainsi, on a  $X = \frac{-I_2 + \delta}{2I_2} = \frac{-I_2 + \delta}{2}$ .

On note que l'on peut très bien "diviser" par  $I_2$  car cela revient à multiplier par  $I_2^{-1} = I_2$ , de plus  $I_2$  commute avec toutes les matrices, donc l'écriture est licite.

Maintenant qu'on a vu que tout cela était licite, il faut se poser la question de la forme de  $\delta$ . C'est là que tout va changer car  $\delta$  pourrait prendre beaucoup plus de "valeurs" que d'habitude.

Alors, en passant à la forme canonique :

$$X^2 + X + (I_2 - A) = 0 \iff \left(X + \frac{1}{2}I_2\right)^2 + \frac{3}{4}I_2 - A = 0$$

Ce qui est encore une écriture justifiée par le fait que  $I_2$  commute avec toutes les matrices et donc en particulier avec  $X$ .

Si bien que,

$$\left[2\left(X + \frac{1}{2}I_2\right)\right]^2 = 4A - 3I_2 = \Delta$$

On est donc ramener à résoudre une équation de type  $C^2 = B$ , où  $C = 2\left(X + \frac{1}{2}I_2\right)$  et  $B = 4A - 3I_2$

C'est normalement dans votre cours de MP, ou alors dans des exercices que vous avez déjà fait en TD.

On sait que les classes de similitudes des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  sont :

1. Les matrices diagonalisables :  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
2. Les autres, donc pas diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ , ça veut dire trigonalisable. Donc c'est des blocs de Jordan  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Donc là, on a toutes nos disjonctions de cas qui nous tombent dessus, toutes prêtes.

Si  $B$  et  $C$  sont diagonalisables :

Alors, on peut écrire  $B = P\text{diag}(\alpha_1, \beta_1)P^{-1}$  et  $C = Q\text{diag}(\alpha_2, \beta_2)Q^{-1}$ , ie,  $C^2 = Q\text{diag}(\alpha_2^2, \beta_2^2)Q^{-1}$ .

Quitte à inverser les coefficients diagonaux, on a alors que  $\begin{cases} \alpha_2^2 = \alpha_1 \\ \beta_2^2 = \beta_1 \end{cases}$  Maintenant,

1) Si  $\alpha_1 = \beta_1$ , alors  $B$  est une matrice scalaire et on peut donc choisir n'importe quelle matrice  $Q \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ .

2) Si  $\alpha_1 \neq \beta_1$ , soit  $Y$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\alpha_2$ . Alors,  $Y$  est aussi un vecteur propre associé à la valeur propre  $\alpha_1$ .

Ainsi,  $B$  et  $C$  sont codiagonalisables. Ainsi, en choisissant la base de diagonalisation de  $C$  comme base simultanée (quitte à changer  $Q$ ), on obtient que :  $Q = P$ .

Donc,  $C = P\text{diag}(\alpha_2, \beta_2)P^{-1}$ . On fait la même chose si les coefficients diagonaux sont inversés. On arrive à 8 solutions possibles.

Si  $B$  est diagonalisable mais pas  $C$  :

Alors,  $C = Q \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q^{-1}$ . D'où,  $C^2 = Q \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} Q^{-1} \implies \alpha = \beta = \lambda^2$ .

Comme précédemment, on en déduit que  $B$  est une matrice scalaire.

Si bien que, si  $\alpha \neq 0$ , alors  $\lambda \neq 0$ . Donc, on est dans une classe de similitude de Jordan, sauf qu'on est aussi semblable à l'identité (car scalaire) : C'est impossible.

Donc, forcément  $\alpha = \beta = \lambda = 0$ .

Donc,  $C = Q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$  et  $B = 0$ .

La matrice  $C$  est d'ailleurs un exemple de matrice non-diagonalisable tel que son carré l'est.

Si ni  $B$  ni  $C$  ne sont diagonalisables :

Alors,  $B = P \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$  et  $C = Q \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q^{-1}$ . D'où,  $C^2 = Q \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} Q^{-1}$ .

1) Si  $\mu \neq 0$ , alors  $\lambda \neq 0$  car  $\lambda^2 = \mu$ .

Alors  $C^2 \sim QR \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} R^{-1}Q^{-1}$ .

Or, comme les blocs de Jordan caractérisent les classes similitudes et par égalité  $C^2 = B$ , on a  $P = QR$ .

2) Si  $\mu = 0$  alors  $\lambda = 0$  et donc  $C = 0$ , aucune solution.

On a terminé avec ce point.

Maintenant, on voit que dans  $B = 4A - 3I_2$ ,  $B$  diagonalisable  $\iff A$  diagonalisable.

Ducoup, dans les disjonctions de cas, on peut remplacer tous les  $B$  par  $A$ .

A partir de là, il ne reste plus qu'à voir les formes possibles de  $A$  selon les cas de figures qu'on a vu avant. (C'est assez simple).

C'est terminé.

**Solution 2019.4 :**

1) Montrons donc que  $\phi$  est linéaire.

Pour cela, considérons  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, pour division euclidienne : 
$$\begin{cases} AP_1 = BQ_1 + \phi(P_1) \\ AP_2 = BQ_2 + \phi(P_2) \end{cases}$$
 avec,  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ .

Si bien que,  $A(P_1 + \lambda P_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + (\phi(P_1) + \lambda\phi(P_2))$ .

Or, on a  $\deg(\phi(P_1) + \lambda\phi(P_2)) < \deg(B)$  et la division euclidienne est unique.

Ainsi,  $\phi(P_1) + \lambda\phi(P_2)$  est le reste de la division euclidienne de  $A(P_1 + \lambda P_2)$  par  $B$ .

C'est-à-dire que  $\phi(P_1 + \lambda P_2) = \phi(P_1) + \lambda\phi(P_2)$ . Donc,  $\phi$  est linéaire.

On peut donc noter que  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

De plus, par définition de la division euclidienne,  $\phi$  ne peut pas être surjectif et n'est donc pas un isomorphisme.

2) On va étudier les valeurs propres de  $\phi$  ainsi que les espaces propres associés à ces valeurs propres.

On peut d'ores et déjà déduire de la question précédente que  $\lambda = 0$  est une valeur propre de  $\phi$ .

Ainsi :

Si  $\lambda = 0$  :

Notons  $P$  un vecteur propre associé. Ainsi,  $AP = BQ$  dans la division euclidienne et donc  $B|AP$ .

De plus, par hypothèse, on a  $\text{pgcd}(A, B) = 1$ , donc par le théorème de Gauss  $B|P$ .

Réciproquement, tout multiple de  $B$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  est tel que  $\phi(P) = 0 = 0.P$ .

Si bien que  $E_0(\phi) = \text{Vect}\{B, XB, \dots, X^{\deg(A)-1}B\}$ .

Si  $\lambda \neq 0$  :

Notons encore une fois  $P$  le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  :

$$\phi(P) = \lambda.P \iff AP - BQ = \lambda.P \iff (A - \lambda).P = BQ \iff B|(A - \lambda).P$$

De plus  $B$  est, par hypothèse, scindé à racines simples. Notons  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  ses racines.

Posons  $P_k(X) = \prod_{j \neq k} (X - \alpha_j)$ .

On prend  $\lambda = A(\alpha_k)$ , comme ça toutes les racines de  $B$  sont des racines de  $(A - \lambda)P_k$  et ainsi,  $B|(A - \lambda)P_k$ .

Si bien que  $P_k$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda = A(\alpha_k)$ .

Les  $P_k$  interpolent en quelque sorte les  $\alpha_k$ .

**Solution 2019.5 :****Solution 2019.6 :****Solution 2019.7 :**

**Solution 2019.8 :**

- 1) Facile.
- 2) Ce que l'on veut démontrer, c'est que si un nombre réel  $x$  est rationnel, alors son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

Supposons alors que  $\frac{a}{b} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n}$ .

On écrit la division euclidienne, pour  $k \in \mathbb{N}$ , de  $10^k a$  par  $b$  :  $10^k a = bq_k + r_k$  avec  $0 \leq r_k \leq b-1$ . Comme  $\{0, \dots, b-1\}$  est un ensemble fini,  $r_k$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors il existe forcément un  $l$  supérieur à  $k$  tel que  $r_k = r_l$ .

Ainsi, encore par la formule de la division euclidienne :  $\frac{10^l a}{b} - \frac{10^k a}{b} = q_l - q_k \in \mathbb{N}$  car  $r_k = r_l$ .

Ainsi, par unicité du développement décimal propre,  $\frac{10^l a}{b}$  et  $\frac{10^k a}{b}$  ont les mêmes décimales, ie,  $d_{n+l} = d_{n+k}$ .

Si bien que, à partir du rang  $k$ ,  $d_{n+(l-k)} = d_n$ . D'où le résultat.

Quelques approfondissements, je vous conseil d'aller voir la preuve de l'unicité du développement décimal propre d'un réel. C'est aussi un exercice d'oraux.

Puis, l'implication que l'on vient de prouver est en fait une équivalence :

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \iff$  Son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

Essayons de voir comment montrer la réciproque.

On suppose que,  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n}$  est périodique, de période  $T$ , à partir d'un certain rang  $N$ .

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} d_n 10^{-n} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=N+Ti}^{N+T(i+1)-1} d_j 10^{-j} = \sum_{n=0}^{N-1} d_n 10^{-n} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=N}^{N+T-1} d_{j+Ti} 10^{-j-Ti}$$

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} d_n 10^{-n} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=N}^{N+T-1} d_j 10^{-j-Ti} = \sum_{n=0}^{N-1} d_n 10^{-n} + \sum_{i=1}^{+\infty} \left( \sum_{j=N}^{N+T-1} d_j 10^{-j} \right) 10^{-Ti}$$

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} d_n 10^{-n} + \left( \sum_{j=N}^{N+T-1} d_j 10^{-j} \right) \sum_{i=1}^{+\infty} (10^{-T})^i = \sum_{n=0}^{N-1} d_n 10^{-n} + \left( \sum_{j=N}^{N+T-1} d_j 10^{-j} \right) \frac{1}{1-10^{-T}}$$

Ainsi, on a bien écrit  $x$  sous forme de ratio.

**Solution 2019.9 :**

- 1) Pour commencer, on peut remarquer que l'ensemble des racines de l'unité  $\mathbb{U}$  est compact, et que l'image d'une fonction continue par un compact est compact. En particulier,  $f(\mathbb{U})$  est bornée.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un  $u \in \mathbb{U}$  tel que  $f(u) \notin \mathbb{U}$ .

- Si  $|f(u)| > 1$ , en considérant la suite  $(f(u^n))_n$  on a un problème concernant le caractère borné de  $f(\mathbb{U})$ , car  $f$  est un morphisme de groupe multiplicatif.

- Si  $|f(u)| < 1$ , alors  $|f(u^{-1})| > 1$  et ce qui aboutit aussi à une contradiction.

D'où,  $f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$ .

2)  $f$  est un morphisme de groupes, donc c'est immédiat.

3) On a  $f\left(\exp\left(\frac{2i\pi}{2^n}\right)\right) = \exp\left(\frac{2ik_n\pi}{2^n}\right)$ .

En particulier,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\exp\left(\frac{2i\pi}{2^n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{2ik_n\pi}{2^n}\right)$ .

Par continuité de  $f$  et  $\exp$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\exp\left(\frac{2i\pi}{2^n}\right)\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{2i\pi}{2^n}\right)\right) = f\left(\exp\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2i\pi}{2^n}\right)\right)$

D'où,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\exp\left(\frac{2i\pi}{2^n}\right)\right) = f(1) = 1$ .

C'est-à-dire,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{2ik_n\pi}{2^n}\right) = 1$ , ie,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2ik_n\pi}{2^n} = 0$ .

C'est-à-dire,  $k_n = o_{n \rightarrow +\infty}(2^n)$ .

4)

5)  $\exists k \in \mathbb{N} \mid f(z) = f(e^{i\theta}) = e^{ik\theta} = (e^{i\theta})^k = z^k$

---

---

# CHAPITRE 7

---

## SOLUTIONS DE 2020

*Solution 2020.1 :*

La matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ?

On note que  $\chi_C = \det(XI_2 - C) = (X + 1)(X - 3)$  est scindé à racines simples, c'est donc un polynôme annulateur de  $C$  d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Ainsi,  $C$  est diagonalisable.

Maintenant, soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose  $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ .

Supposons que  $A$  soit diagonalisable :  $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A = PDP^{-1}$ .

D'où,  $B = \begin{pmatrix} PDP^{-1} & 4PDP^{-1} \\ PDP^{-1} & PDP^{-1} \end{pmatrix}$ .

On va se servir de la réduction de  $C$ .

Pour  $\lambda = -1$  :

$$C + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow \text{Ker}(C + I_2) = \text{Vect}(2, -1).$$

Pour  $\lambda = 3$  :

$$C - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow -2C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow 2C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow \text{Ker}(C - 3I_2) = \text{Vect}(2, 1).$$

Donc la matrice de passage qui diagonalise  $C$  s'écrit  $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Ainsi, } B = \begin{pmatrix} 2P & 2P \\ -P & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & 3D \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} P^{-1} & -2P^{-1} \\ P^{-1} & 2P^{-1} \end{pmatrix}.$$

De plus,  $\begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & 3D \end{pmatrix}$  est diagonale.

Et,  $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} P^{-1} & -2P^{-1} \\ P^{-1} & 2P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & -2P \\ P & 2P \end{pmatrix}^{-1}$ . Si bien que,  $B$  est diagonalisable.

$B$  n'est pas diagonalisable dans le cas général, on veut trouver un contre-exemple. On prend  $A$  strictement triangulaire supérieure avec  $n = 2$  et 1 en haut à droite. Alors,  $\chi_B = X^4$  et donc  $B$  est nilpotente et différente de 0 donc pas diagonalisable.

**Solution 2020.2 :**

C'est un théorème assez difficile à démontrer, surtout en 2 questions. C'est donc un exercice assez compliqué.

On reprend les notations de l'énoncé que je rappelle ici. Notons  $(\cdot|\cdot)$  le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ , et  $\|\cdot\|$  la norme associée à ce produit scalaire.

On prend  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et on note  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  ses valeurs propres (répétées selon leur multiplicité). Par le théorème spectral, on peut d'ores et déjà dire que  $A$  est diagonalisable dans une base orthonormée. Ainsi,  $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid A = PDP^T$ , avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

On note aussi  $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  les colonnes de  $P$ . La famille  $(C_1, \dots, C_n)$  est donc une base orthonormée de valeurs propres de  $A$ .

Notons de plus, pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{H}_k$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de dimension  $k$ .

1) Soit  $X$  un vecteur de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $X = (x_1, \dots, x_n)$  dans la base orthonormée  $(C_1, \dots, C_n)$ .

$$\text{Ainsi, } X = \sum_{i=1}^n x_i C_i \text{ et donc } AX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i C_i. \text{ On en déduit que, } X^T AX = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_i x_j x_i C_j^T C_i.$$

Les colonnes de  $P$  formant une famille orthonormée,  $C_j^T C_i = \delta_{ij}$ .

$$\text{Si bien que, } X^T AX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

De même, la base  $(C_1, \dots, C_n)$  étant orthonormée,  $X^T X = \|X\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

En particulier pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ , en prenant  $X = C_k$ , on obtient :

$$\frac{C_k^T A C_k}{C_k^T C_k} = \lambda_k$$

Maintenant, on note  $H_k = \text{Vect}\{C_1, \dots, C_k\}$ . Soit  $X \in H_k$ ,  $X \neq 0$ . Alors, pour  $i > k$ ,  $x_i = 0$ .

$$\frac{X^T AX}{X^T X} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^k x_i^2} = \lambda_k$$

Et, on a égalité pour  $X = C_k$ . Ainsi,

$$\lambda_k = \min_{X \neq 0} \frac{X^T AX}{X^T X} = \min_{X \neq 0} \frac{(AX|X)}{\|X\|^2}$$

2) Soit  $H \in \mathcal{H}_k$ .

Alors,  $\dim(H \cap \text{Vect}\{C_k, \dots, C_n\}) = k + (n - k + 1) - \dim(H \cup \text{Vect}\{C_k, \dots, C_n\}) \geq 1$ .

Ainsi, pour  $X \in \text{Vect}\{C_k, \dots, C_n\}$ , par le même raisonnement que la question précédente :

$$\frac{X^T AX}{X^T X} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^k x_i^2} = \lambda_k$$

$\forall k$ ,  $\dim(H_k) = k$ , car les colonnes de  $P$  sont libres.

De là,

$$\max_{H \in \mathcal{H}_k} \min_{X \in H \setminus \{0\}} \frac{X^T AX}{X^T X} \geq \min_{X \in H_k \setminus \{0\}} \frac{X^T AX}{X^T X} = \lambda_k$$

Soit  $H \in \mathcal{H}_k$ , soit  $X_0 \in H \cap \text{Vect}\{C_k, \dots, C_n\}$  non-nul (possible car  $H \cap \text{Vect}\{C_k, \dots, C_n\}$  est de dimension non-nulle).

$$\min_{X \in H \setminus \{0\}} \frac{X^T A X}{X^T X} \leq \frac{X_0^T A X_0}{X_0^T X_0} \leq \lambda_k$$

Ceci étant vrai pour tout  $H$  dans  $\mathcal{H}_k$ ,

$$\max_{H \in \mathcal{H}_k} \min_{X \in H \setminus \{0\}} \frac{X^T A X}{X^T X} \leq \lambda_k$$

Ainsi, par antisymétrie de la relation d'ordre,

$$\forall k < n, \max_{H \in \mathcal{H}_k} \min_{X \in H \setminus \{0\}} \frac{X^T A X}{X^T X} = \lambda_k$$

Il est à noter que si les valeurs propres sont ordonnées dans l'autre sens, on peut inverser les max et min.

***Solution 2020.3 :***

---

---

# CHAPITRE 8

---

## SOLUTIONS DE 2021

### *Solution 2021.1 :*

Soit  $\mathcal{B} = (E_{i,j})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On pose  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ . Soit  $\phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{C}$  une forme linéaire telle que  $\phi(ab) = \phi(ba)$ . On définit  $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  l'analogue de  $\phi$  mais prenant  $M$  au lieu de  $f$ . D'après le cours, on sait que,

$$\forall (i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, E_{i,j}E_{k,l} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ E_{i,l}, & \text{si } j = k \end{cases}$$

Ainsi, comme pour tous  $a, b \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\phi(ab) = \phi(ba)$ , et que  $\varphi$  a les propriétés analogues,

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(E_{i,j}) = \varphi(E_{i,1}E_{1,j}) = \varphi(E_{1,j}E_{i,1}) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \varphi(E_{1,1}), & \text{sinon} \end{cases}$$

En posant  $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , il vient que comme  $\varphi$  est linéaire :

$$\varphi(M) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} E_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} \varphi(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^n m_{k,k} \varphi(E_{1,1}) = \varphi(E_{1,1}) \times \text{Tr}(M)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Alors, on peut aller plus loin car c'est une équivalence. En effet, la trace est une forme linéaire telle que  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  (c'est dans le cours et c'est pas dur à montrer mais il y a l'exo 3 qui m'attend donc je vais pas le faire là). Donc, si une application est proportionnelle à la trace alors c'est une forme linéaire et elle est invariante par commutativité de son argument.

### *Solution 2021.2 :*

Exercice très classique, il faut utiliser une projection sur un sous-espace bien précis puis utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. En fait c'est un exercice de produit scalaire caché. On peut aussi sûrement passer par une matrice hessienne.

**Solution 2021.3 :** (Merci à Rafik Souanef pour l'aide sur la disjonction de cas)

Sachez que si vous tombez sur cet exercice, c'est vraiment vraiment pas de bol mdr.

- 1) Soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  d'ordre fini  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors,  $P = X^k - 1$  est un polynôme annulateur de  $M$ . Or, dans  $\mathbb{C}$ ,  $P$  est scindé à racines simples :

$$P = \prod_{j=0}^{k-1} (X - e^{\frac{2i\pi \cdot j}{k}})$$

Ainsi,  $M$  est diagonalisable.

Notons,  $(\lambda_i)$  ses valeurs propres complexes.

Alors :

$$|\text{Tr}(M)| = \left| \sum_{i=0}^n \lambda_i \right| \leq \sum_{i=0}^n |\lambda_i| = n$$

Maintenant, on voit que  $M = I_n \Rightarrow \text{Tr}(M) = n$ .

Réciproquement, si  $\text{Tr}(M) = n$  alors,  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = n$ . C'est-à-dire,  $\sum_{j=0}^n \text{Re}(\lambda_i) = n$ , car  $n \in \mathbb{N}$ .

Or, pour tous  $j$ ,  $\lambda_j = x_j + i \cdot y_j$  et  $r = \sqrt{x_j^2 + y_j^2} = 1$ .

Si bien que,  $x_j, y_j \leq 1$  et comme  $\sum_{j=0}^n \text{Re}(\lambda_i) = \sum_{j=0}^n x_j = n$ , on a directement  $x_j = 1$  et  $y_j = 0$  pour tous  $j$ .

Finalement, la seule valeur propre de  $M$  est 1 et elle est diagonalisable par ce qui précède, ie,  $M = I_n$ .

Donc,  $\text{Tr}(M) = I_n \iff M = I_n$ .

- 2) On sait que  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  est un groupe, et  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{R})$ . On peut montrer que c'est un groupe aussi. On peut montrer aussi que  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  est un groupe. Ainsi,  $\pi_p$  le morphisme de réduction canonique modulo  $p$  est un morphisme de groupe, car l'opération de réduction modulo  $p$  est évident compatible à l'addition et la multiplication usuelle.

Pour montrer le résultat demandé, on va raisonner par l'absurde.

Prenon  $M \in \text{Ker}(\pi_p)$  et  $M \neq I_2$ . Supposons que  $M$  soit d'ordre fini.

D'après ce qui précède, elle est diagonalisable et :

$$\exists P \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) \mid M = P \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{2iq\pi}{n}\right) \end{pmatrix} P^{-1}$$

Or,  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , donc  $\det(M) = 1$ , donc comme le déterminant est un invariant de similitude,  $\exp\left(\frac{2iq\pi}{n}\right) = \exp\left(-\frac{2ik\pi}{n}\right)$ .

Donc,  $\text{Tr}(M) = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) + \exp\left(-\frac{2ik\pi}{n}\right) = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2]$ .

Encore d'après la question 1,  $|\text{Tr}(M)| < n = 2$  car  $M \neq I_2$ . D'où,  $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$ .

De plus, comme  $M \in \text{Ker}(\pi_p)$ , on a  $\pi_p(M) = I_2$  car  $I_2$  est le neutre du groupe multiplicatif  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Si bien que,  $\text{Tr}(\pi_p(M)) = 2$ , c'est-à-dire que  $\text{Tr}(M) \equiv 2 \pmod{p}$ .

A partir de là, on a pas d'autre choix que de faire une disjonction de cas selon que  $p = 3$  ou  $p \geq 5$ .

$p \geq 5$  :  $\text{Tr}(M) = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \equiv 2 \pmod{p \geq 5}$ .

Cependant,  $\neg(-1 \equiv 2 \pmod{p})$ ,  $\neg(0 \equiv 2 \pmod{p})$  et  $\neg(1 \equiv 2 \pmod{p})$ !

Donc, c'est impossible.

$p = 3$  : Dans ce cas, pas le choix, il faut passer par la méthode de bourrin, pas très élégante.

Ensuite, je plaide coupable j'en ai pas chercher une meilleure.

$\text{Tr}(M) = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \equiv 2 \pmod{3}$  d'où,  $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = -\frac{1}{2}$  (sinon c'est la même chose qu'avant).

Donc,  $\text{Tr}(M) = -1$ . Notons  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et donc,  $\begin{cases} \text{Tr}(M) = a + d = -1 \\ \det(M) = ad - bc = 1 \end{cases}$ .

Si bien que,  $d = -1 - a$ , donc  $a^2 + a + (bc + 1) = 0$  (faire les calculs en passant par l'expression du det).

De plus,  $a \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  donc, c'est une racine réelle du polynôme de degré 2 :

$Q = X^2 + X + (bc + 1)$ .

Donc,  $\Delta_Q = 1 - 4(bc + 1) \geq 0$  (parce que  $Q$  admet une racine réelle)

Ducoup,

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(bc + 1)}}{2} \in \mathbb{Z}$$

Cela veut dire qu'il existe  $z \in \mathbb{Z}$  tel que  $z^2 = 1 - 4(bc + 1) = 1 - 4bc - 4$ .

Or, le seul carré dans  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , c'est 1 (s'en convaincre avec un tableau).

D'où,  $z^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 1 - 4bc - 4 \equiv 1 \pmod{3}$ .

Seulement, on a  $\pi_3(M) = I_2 \Rightarrow \begin{cases} b \equiv 0 \pmod{3} \\ c \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3|b \\ 3|c \end{cases}$  Finalement,  $z^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$

$1 - 4bc - 4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 1 - 4 \equiv 1 \pmod{3}$ . Ce qui est absurde.

Ainsi, dans tous les cas on obtient une absurdité.

Donc,

$$M \in \text{Ker}(\pi_p) \setminus \{I_2\} \implies M \text{ est d'ordre infini}$$

3) Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Alors, tous les éléments de  $G$  sont d'ordre fini.

Par ce qui précède,  $\text{Ker}(\pi_3) = \{I_2\}$ .

Si bien que,  $\pi_3 : \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  est injective.

Cela nous donne l'information suivante :

$$|G| \leq |\text{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})|$$

Reste à déterminer le cardinal de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ .

Pour calculer ce cardinal, on doit d'abord calculer celui de  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ .

Mais bon, on va pas juste le faire pour  $n = 2$  et  $p = 3$ , on va le faire dans le cas général, sinon c'est pas marrant.

La question c'est : Comment est-ce que l'on construit une matrice inversible ?

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , que l'on note  $M = (M_1 | \dots | M_n)$  où les  $M_i$  sont les colonnes de  $M$ .

Alors en fait, une matrice est inversible si et seulement si, ses colonnes ne sont pas combinaison linéaire des précédentes.

Formellement :

$$M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \iff \begin{cases} M_1 \neq 0, \\ M_2 \in \mathbb{F}_p^n \setminus \text{Vect}(M_1), \\ M_3 \in \mathbb{F}_p^n \setminus \text{Vect}(M_1, M_2), \\ \dots \\ M_n \in \mathbb{F}_p^n \setminus \text{Vect}(M_1, \dots, M_{n-1}) \end{cases}$$

Maintenant, on a plus qu'à dénombrer parce que  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est fini.

Pour  $M_1$  c'est facile comme on prend tous les vecteurs sauf le vecteur nul, on a  $p^n - 1$  possibilités.

Pour  $M_2$ , il y a  $p^n - p$  possibilités.....

Pour  $M_n$ , il y a  $p^n - p^{n-1}$  possibilités.

Si bien que,

$$|\text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \prod_{k=0}^{n-1} (p^n - p^k)$$

On passe maintenant à  $\text{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ .

Dans ce groupe, on veut les matrices inversibles mais seulement celles dont le déterminant vaut 1.

Or,  $\det : \text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  est un morphisme de groupes (multiplicatif) surjectif.

De plus,  $\text{Ker}(\det) = \text{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  (car ce sont des groupes multiplicatif, donc le neutre c'est 1!).

Si bien que,

$$|\text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = |\text{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| \cdot |(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*|$$

Autrement dit,

$$|\text{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \frac{|\text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|}{|(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*|}$$

Finalement,

$$|\text{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (p^n - p^k)}{p - 1}$$

Ainsi, pour  $n = 2$  et  $p = 3$ ,  $|\text{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})| = \frac{1}{2} \prod_{k=0}^1 (9 - 3^k) = \frac{1}{2} (8 \times 6) = \frac{48}{2} = 24$ .

AINSI,

$$|G| \leq 24$$

Petite remarque avant de passer à la suite,  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  par exemple, N'EST PAS un espace vectoriel !  
Donc, parler de la dimension de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  n'a aucun sens. On peut parler de son cardinal, même si dans ce cas il est infini. Cependant, comme le corps  $\mathbb{F}_p$  est fini, celui de  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$  l'est aussi comme on l'a vu plus haut.

- 4) Là il faut repocéder comme on a fait au dessus mais avec  $n$  quelconque.  
En effet, en diagonalisant  $M$ , on retrouver  $|\text{Tr}(M)| \leq n$  et  $\text{Tr}(M) \equiv n \pmod{p}$ .  
En prenant,  $p > 2n$ , on a  $M = I_n$ .

On peut généraliser la question 2 à  $n$  quelconque. Je le ferai peut-être mais déjà si vous faites tout ça en 20 minutes, gg.

---

---

# CHAPITRE 9

---

## SOLUTION DE 2022

### *Solution 2022.1 :*

Soit  $P \in \mathbb{Q}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que décrit dans l'énoncé.

Alors, d'une part  $P$  se factorise en produit de facteurs irréductibles distincts à coefficients rationnels (donc premiers entre eux) :

$$P = \mu \cdot \prod_{i=0}^m P_i^{\alpha_i}$$

Sans perte de généralités, on peut supposer que  $\lambda$  soit une racine de  $P_1$  (quitte à échanger avec un autre  $P_i$ ).

Comme  $P_1$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\omega_{P_1}(\lambda) = 1$  et donc  $\omega_P(\lambda) = \alpha_1$ .

Si bien que par hypothèse,  $\alpha_1 > \frac{\deg(P)}{2}$ .

Et donc,  $P_1$  est forcément de degré 1 car sinon  $\deg(P_1^{\alpha_1}) > \deg(P)$ , ce qui est absurde.

Donc, comme  $\lambda$  est une racine de  $P_1$  qui est de degré 1 et à coefficients rationnels :  $\lambda \in \mathbb{Q}$ .

### *Solution 2022.2 :*

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme  $u$  est :  $\chi_u = \det(\lambda \cdot Id_E - u)$ .

C'est un exercice important pour comprendre la notion de polynôme caractéristique plus en profondeur. En effet, on fait souvent de la réduction sur des matrices donc c'est plus facile de se représenter le polynôme caractéristique, idem pour le polynôme minimal. Par contre, on en fait presque jamais sur les endomorphismes, alors que c'est sous-jacent quand on parle de matrices (matrice d'un endomorphisme dans une base).

Donc en fait ce qu'il suffit de faire c'est retranscrire le tout en terme de matriciel. Ecrire la matrice de l'endomorphisme dans la bonne base et voilà.

### *Solution 2022.3 :*

On rappelle que, soit  $A$  une partie non-vide d'un ensemble  $E$ ,

$$A \text{ est convexe} \Rightarrow A \text{ est étoilée} \Rightarrow A \text{ est connexe par arcs}$$

Cette suite d'implication est évidente via la définition intuitive de ce que c'est que d'être "connexe par arcs" : on peut toujours relier deux points par un chemin.

Il est évident d'ailleurs que  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe par arcs. En effet :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}$$

Donc, d'un côté on aurait  $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$  et de l'autre  $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}$ . En gros, on coupe la droite réelle en deux en enlevant le 0. Il est donc, par exemple, impossible de relier une matrice de déterminant 1 avec une matrice déterminant  $-1$  qui sont toutes les deux de part et d'autre de la "droite" ainsi contruite.

Formellement, ce qu'on peut dire c'est que  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe car cest l'union disjointe de 2 ouverts non-vides :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\} \sqcup \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}$$

Ce sont bien des ouverts car ce sont des images réciproques de  $\det$  qui est continue par des ouverts.

Donc, à ce stade on sait que  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe. Donc,  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe par arcs car tout espace connexe par arcs est connexe.

Pour identifier les composantes connexes, en prépa je crois qu'on a pas le choix de sortir "l'artillerie lourde". Je veux dire par là qu'il faut utiliser le fait que les matrices de dilatations (que l'on note  $D_i(a)$ , matrice diagonale avec des 1 partout et un  $a$  à la  $i$ -ième ligne) et les matrices de transvections (que l'on note  $T_{i,j}(a) = I_n + aE_{i,j}$ , avec  $i \neq j$ ) engendrent  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ . Il y a des résultats de topologie qui permettent d'avoir directement les composantes connexes mais c'est plutôt du programme de L3. Pour montrer cela, je rappelle que c'est simplement le pivot de Gauss.

$$\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \exists T_1, \dots, T_k, D \mid A = T_1 \dots T_k D$$

où les  $T_i$  sont des matrices de transvections et  $D$  est une matrice de dilatation.

On pose  $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}$  et  $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$ . Soit  $M_1 \in \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ , comme  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ , pour tout  $M \in \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ ,  $M_1^{-1}M \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ . Donc,  $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = M_1\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ . La conclusion est immédiate car l'application  $M \mapsto M_1M$  est continue.

C'est bon d'avoir ce genre de résultats en tête :

1. Les matrices de dilatations et les matrices de transvections engendrent  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ .
2. Les matrices de transvections engendrent  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ .

**Solution 2022.4 :**

---

---

# CHAPITRE 10

---

## SOLUTION DES EXERCICES

### *Solution 1 :*

Pour la première partie, voir l'exercice 2021.3, question 3 :

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \prod_{k=0}^{n-1} (p^n - p^k)$$

$$|\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (p^n - p^k)}{p - 1}$$

Si  $E$  est un  $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Alors,  $E$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_q^n$  et donc de cardinal  $q^n$ . Donc, en fixant une base de  $E$ , on obtient une bijection entre  $\mathrm{GL}(E)$  et  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ . D'où l'égalité des cardinaux.

### *Solution 2 : (Lemme d'Hadamard)*

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice à diagonale strictement dominante. Il s'agit alors de prendre un vecteur  $x$  dans  $\mathrm{Ker}(A)$  et de regarder  $\|x\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$ .

Raisonnons par contraposée. Si  $A$  n'est pas inversible, alors  $\mathrm{Ker}(A)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ .

Si bien qu'il existe un vecteur  $x \in \mathrm{Ker}(A)$  non-nul et tel que  $Ax = 0$ .

Il existe  $i_0$  tel que  $x_{i_0} = \|x\|_\infty$ . (Définition "d'être dans le noyau")

On prend donc le produit  $Ax$  à la ligne  $i_0$  :

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0, j} x_j = 0$$

Si bien que,

$$a_{i_0, i_0} x_{i_0} = - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} x_j$$

D'où,

$$|a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} \left| a_{i_0, j} \frac{x_j}{x_{i_0}} \right|$$

Par définition de  $i_0$ ,  $\left| \frac{x_j}{x_{i_0}} \right| \leq 1$ .

D'où,

$$|a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}|$$

Donc, la matrice n'est pas à diagonale strictement dominante.

Par contraposée, si la matrice est à diagonale strictement dominante, elle est inversible.

### **Solution 3 : (Disques de Gershgorin)**

Posons  $D_i$  comme dans l'énoncé, le  $i$ -ième disque de Gershgorin.

Prenons  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ . Alors  $A - \lambda I_n \notin \text{GL}_n(K)$ .

D'après le lemme d'Hadamard,

$$\exists i_0 \mid |a_{i_0, i_0} - \lambda| \leq R_{i_0}$$

C'est-à-dire,

$$\lambda \in D_{i_0}$$

D'où,

$$\text{Sp}(A) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} D_i$$

On peut aussi le faire sans le lemme d'Hadamard, mais ça revient à faire la preuve du lemme d'Hadamard presque.

### **Solution 3.5 : (Disques de Gershgorin)**

On veut  $|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^n (|a_{i,i}| - R_i)$  ie,  $|\det(A)| = \{truc\} \times \prod_{i=1}^n (|a_{i,i}| - R_i)$  avec  $\{truc\} \geq 1$ .

Via ce constat, il devient naturel de poser  $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en multipliant, pour tout  $i$ ,  $L_i$  par  $\frac{1}{|a_{i,i}| - R_i}$ . Il est à noter que  $|a_{i,i}| - R_i \neq 0$  par hypothèse.

Alors, on a  $|\det(A)| = |\det(A')| \times \prod_{i=1}^n (|a_{i,i}| - R_i)$ .

La question devient alors, est-ce que  $|\det(A')| \geq 1$ ? La réponse est évidemment oui.

$$\forall i \leq n, |a'_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a'_{i,j}| = \frac{|a_{i,i}|}{|a_{i,i}| - R_i} - \frac{R_i}{|a_{i,i}| - R_i} = 1$$

Puis,

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A'), \exists i \leq n \mid |a'_{i,i} - \lambda| = |\lambda - a'_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a'_{i,j}| \Rightarrow |a'_{i,i}| - |\lambda| \leq \sum_{j \neq i} |a'_{i,j}|$$

Donc,

$$|\lambda| - |a'_{i,i}| \geq - \sum_{j \neq i} |a'_{i,j}|$$

Finalement,  $|\lambda| \geq |a'_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a'_{i,j}| = 1$ .

Or, en notant  $m_\lambda$  la multiplicité de  $\lambda$  dans la polynôme caractéristique de  $A'$ ,

$$|\det(A')| = \prod_{\lambda \in \text{Sp}} |\lambda|^{m_\lambda}$$

D'après ce qu'il précède, toutes les valeurs propres de  $A'$  sont de modules inférieure à 1, ce qui implique :

$$|\det(A')| \geq 1$$

CQFD.

Question supplémentaire : Est-ce que ça marche toujours avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

La réponse est oui, on peut enlever les valeur absolue dans ce cas. Pourquoi ça marche ? C'est un peu plus complexe que dans les complexes (comme toujours).

C'est essentiellement parce que l'ensemble suivant (presque l'ensemble des matrices réelles à diagonale dominante)

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall i \leq n, m_{i,i} > \sum_{j \neq i} |m_{i,j}| \right\}$$

est convexe et donc connexe et que le déterminant restreint à cet ensemble est continue et ne s'annule pas.

Ainsi, l'image  $\text{Im}(\det|_{\mathcal{C}})$  est un connexe de  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  ne contenant pas 0.

Si bien que, cet intervalle  $I$  est soit contenu dans  $\mathbb{R}_+^*$  soit dans  $\mathbb{R}_-^*$ .

Mais, comme  $I_n \in \mathcal{C}$  et que ce déterminant vaut 1,  $I \subseteq \mathbb{R}_+^*$  et donc, comme  $A \in \mathcal{C}$ ,  $\det(A) > 0$ . On a ce que l'on voulait.

**Solution 4 : (Décomposition de Dunford)**

**Solution 5 : (Sous-groupes de  $(\mathbb{R}, +)$ )**

**Solution 6 : (Théorème de Lagrange)**