

Un corrigé de mes exercices d'oraux du Magistère

Killian Le Milbeau

1^{er} novembre 2022

1 Exercices d'Algèbre

Exercice 1 :

Pas de surprises, l'exercice est dur. Qu'est-ce qu'on sait de la matrice nulle ? Son rang est nul lui aussi, car c'est la matrice de l'endomorphisme nul f dont le noyau est E , donc $\dim(\text{Im } f) = 0$.

Comment se comporte donc le rang d'une matrice non-nulle lorsqu'on la multiplie avec une matrice nilpotente avec laquelle elle commute ? On va voir ça.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \neq 0$ et soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et telle que $AB = BA$.

Montrons que,

$$\underline{\text{rg}(AB) < \text{rg}(A)}$$

On raisonne par l'absurde en supposant que, $\text{rg}(AB) \geq \text{rg}(A)$.

Ainsi, comme $\text{rg}(AB) \leq \min\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\}$, en particulier, $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$ et donc,

$$\text{rg}(AB) = \text{rg}(A)$$

Si bien que,

$$\ker(AB) = \ker(A)$$

Car, Théorème du rang + si $AX = 0$ alors $BAX = 0$ ie, $ABX = 0$ par commutativité, ie $\ker(A) \subset \ker(AB)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\text{Im}(A))$ tel que, $f(Y) = BY$. L'application ainsi définie est évidemment injective. Or, comme B est nilpotente, soit p son indice de nilpotence, on a $f^p = 0$. C'est absurde car $\text{Im}(A) \neq \{0\}$.

D'où le résultat.

Par récurrence immédiate, on a que l'assertion suivante est vraie :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{H}_p : \text{rg}\left(\prod_{k=1}^p A_k\right) \leq n - p$$

Et ainsi, \mathcal{H}_n donne le résultat.

Exercice 2 :

On raisonne par double implication.

Le sens direct est évident. Si on a un groupe fini, comme un sous-groupe doit être en particulier inclus dans le groupe, on voit bien qu'on a un nombre fini de façon de former un sous-ensemble du groupe et donc en particulier de faire un sous-groupe.

Le sens indirect est un peu plus dur. Soit G un groupe dont l'ensemble des sous-groupes est fini. Alors, $\forall x \in G, o(x) < +\infty$. En effet, si $\exists y \in G \mid o(y) = +\infty$ alors $\langle y \rangle \cong \mathbb{Z}$ qui admet une infinité de sous-groupes, c'est donc absurde.

On rappelle que si un élément x est d'ordre n , $\langle x \rangle = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$. Maintenant, on peut écrire G comme la réunion de ses sous-groupes monogènes, qui sont en nombre fini et qui sont fini car tout élément de G est d'ordre fini. Ainsi, G est fini comme réunion finie d'ensembles finis.

Exercice 3 :

Soit X une matrice symétrique réelle. Alors, d'après le théorème spectral, on peut diagonaliser dans une base orthonormée : $\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \mid X = PDP^{-1}$, avec D diagonale.

Par hypothèse, on a donc $X^3 = PD^3P^{-1} = I_n$ et donc $D^3 = I_n$. Si bien que $D = I_n$ et donc $X = I_n$. Réciproquement, $I_n^3 = I_n$.

2 Exercices d'Analyse

Exercice 1 :

Soit R le rayon de $\sum a_n z^n$ et R' le rayon de $\sum a_n^\alpha z^n$. On va montrer que $R' = R^\alpha$ par double inégalité.

On prend, $|z| < R$, alors $a_n z^n \rightarrow 0$ et donc $(a_n z^n)^\alpha = a_n^\alpha z^{\alpha n} \rightarrow 0$. Maintenant, si $|z'| > R'$, alors $\sum a_n^\alpha (z')^n$ n'est pas convergente et donc $(a_n^\alpha (z')^n)_n$ n'est pas bornée. Ainsi, $|z|^\alpha \leq R'$ ie $|z| \leq \sqrt[\alpha]{R'}$. D'où, $R \leq \sqrt[\alpha]{R'}$.

L'autre inégalité découle de la première. $R \leq \sqrt[\alpha]{R'}$

Ainsi, $R = \sqrt[\alpha]{R'}$, c'est-à-dire que $R' = R^\alpha$.

Exercice 2 :

Soit (u_n) une telle suite de fonctions. Alors,

$$\exists K > 0 \mid \forall (x, y) \in [0, 1], |u_n(x) - u_n(y)| \leq K|x - y|$$

Par passage à la limite, on a que u est aussi K -lipschitzienne.

Soit $\sigma = (0 = a_1 < \dots < a_m = 1)$ une subdivision de pas $\epsilon = \frac{1}{m}$. Soit $x \in [0, 1]$, alors x est dans l'un des intervalles formés par σ , ie, $\exists i \in \llbracket 1, m \rrbracket \mid x \in [a_i, a_{i+1}]$, d'où :

$$|u_n(x) - u(x)| \leq |u_n(x) - u_n(a_i)| + |u_n(a_i) - u(a_i)| + |u(a_i) - u(x)|$$

Comme u_n et u sont K -lipschitzienne et que $x \in [a_i, a_{i+1}]$ qui est un intervalle de longueur ϵ :

$$|u_n(x) - u(x)| \leq 2K|x - a_i| + |u_n(a_i) - u(a_i)| \leq 2K\epsilon + |u_n(a_i) - u(a_i)|$$

Or, maintenant $u_n(a_i) \rightarrow u(a_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, c'est-à-dire que,

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \exists N_i \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N_i, |u_n(a_i) - u(a_i)| < \epsilon$$

On prend $N = \max_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} N_i$, comme ça on a un N indépendant de i .

Si bien que, $\forall n \geq N, |u_n(x) - u(x)| < 2K\epsilon + \epsilon$. D'où :

$$\|u_n - u\|_\infty \leq (2K + 1)\epsilon$$

D'où la convergence uniforme.

Exercice 3 :

Posons $d : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{|x - y|}$. Montrons que d est une distance sur \mathbb{R}^2 .

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(x, y) = 0 \iff \sqrt{|x - y|} = 0 \iff x = y$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(x, y) = \sqrt{|x - y|} = \sqrt{|y - x|} = d(y, x)$
3. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, d(x, y) = \sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{|x - z| + |z - y|}$ par croissance de la racine sur \mathbb{R}_+ . D'où, $d(x, y) \leq \sqrt{|x - z| + |z - y|} \leq \sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|} = d(x, z) + d(z, y)$

Ainsi, d est bien une distance. Elle vérifie donc la seconde inégalité triangulaire :

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

Pour $z=0$: $|d(x, 0) - d(0, y)| \leq d(x, y)$, c'est-à-dire :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$$