L'Espace de Hardy dans la recherche des sous-espaces invariants de l'opérateur shift

Killian Le Milbeau

Sous la direction de Mr. Andreas Hartmann

Ecole normale supérieure de Rennes, Institut de Mathématiques de Bordeaux

27 août 2023

Table des matières

1 Introduction

L'un des problèmes, encore ouverts, le plus connu en Théorie des opérateurs est celui des sous-espaces invariants :

Enoncé 1 (Problème des sous-espace invariants)**.** *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et séparable. Soit T un opérateur linéaire non-nul sur H. Alors, existe-t-il un sous-espace $\mathcal{M}$, fermé non-trivial, de H tel que $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$?*

Dans le cas où H est un espace de Hilbert complexe de dimension finie $n \geq 2$. Alors, si X est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ, $\mathbb{C}X$ est un sous-espace fermé non-trivial de H et de dimension 1. Cela vient du fait qu'en dimension finie, toutes les applications linéaire d'un espace vectoriel vers ce même espace possède un vecteur propre, celui-ci engendrant un sous-espace sur lequel l'application linéaire est invariante.

Dans le cas où H est simplement un espace de Banach. On sait depuis 1975 et Per Enflo, qu'il n'existe pas de tels sous-espaces dans le cas général.
Ce problème est d'une actualité très importante. En effet, Per Enflo a récemment sorti un préprint dans lequel il prétend répondre positivement à l'énoncé 1.
Pour le moment, la communauté mathématique ne s'est pas prononcée sur la validité des arguments proposés.

On peut néanmoins citer le Théorème de Lomonosov, que l'on peut développer en allant consulter le séminaire Bourbaki de Bernard Beauzamy :

Théorème 1.0.1 (de Lomonosov)**.** *Soit T un opérateur linéaire compact non-nul sur un espace de Banach E. Alors, il existe un sous-espace fermé non-trivial invariant par tous les opérateurs qui commutent avec T. Ce sous-espace est alors dit hyper-invariant.*

Dans le cas où H est un espace de Hilbert non-séparable. Alors, pour x non-nul, $\overline{\mathrm{Vect}\{T^n x \mid n \in \mathbb{N}\}}$ est un tel sous-espace.

Maintenant, au début du XX-ième siècle, des Mathématiciens tels que Godfrey Harold Hardy, Frigyes et Marcel Riesz, ont commencé à travailler sur des espaces de fonctions holomorphes définies sur des domaines fixes du plan complexe.
Ces espaces sont dits "de Hardy" et ont de nombreuses bonnes propriétés.

Dans ce rapport de stage, nous allons nous intéresser à l'opérateur shift de décalage à droite. Pour introduire cet opérateur, on se place dans l'espace de Hilbert suivant

$$l^2 = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < +\infty \right\}$$

Dans ce cadre, l'opérateur shift est :

$$\begin{array}{cccc} S_{l^2} & : & l^2 & \rightarrow & l^2 \\ & & (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & (S_{l^2}(a_n))_{n \in \mathbb{N}} = (0, a_0, a_1, ...) \end{array}$$

Pour mieux comprendre cet opérateur, une piste serait de chercher ses sous-espaces invariants fermés. Cependant, dans ce cadre, la question s'avère délicate.

En revanche, on peut traduire le problème des sous-espaces invariants de l'opérateur shift dans le cadre de l'espace de Hardy sur le disque unité $\mathbb{D} = \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\big\}$, que l'on note :

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \;=\; \Big\{f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \;\Big|\; \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < +\infty\Big\}$$

où $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur le disque unité.
On munit $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ de sa norme naturelle $||f||_2 = \sqrt{\sum_{n\geq 0} |a_n|^2}$.
Dans ce cadre, l'opérateur shift devient :

$$\begin{array}{cccc} S & : & \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) & \to & \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \\ & & f & \mapsto & [\ Sf : z \mapsto Sf(z) = zf(z)\ ] \end{array}$$

C'est dans ce cadre que Arne Beurling, en 1949 a réussi à décrire l'entièreté des sous-espaces invariants fermés de l'opérateur, avec ce que l'on appelle des fonctions "intérieures" :

Théorème 1.0.2 (de Beurling)**.** *$\mathcal{M}$ est un sous-espace de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ non-trivial invariant par l'opérateur shift si et seulement si, il existe Θ intérieure telle que $\mathcal{M} = \Theta\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.*

Le mathématicien Peter Lax y apportera sa contribution en proposant une preuve différente permettant de considérer le cas des fonctions à valeurs vectorielles (c'est-à-dire dans l'espace de Hardy à valeurs vectorielles, et dans tout le demi-plan complexe supérieur).

Ainsi, l'objectif de ce stage sera de s'approprier les notions suivantes des espaces de Hardy :

- L'identification entre $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ et un sous-espace particulier de $L^2(\mathbb{T})$ que l'on notera $H^2(\mathbb{T})$, où $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
- Le théorème de Beurling.
- Les limites radiales et non-tangentielles.
- Le théorème de Fatou sur l'existence des limites non-tangentielles de fonctions de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.
- Les théorèmes de factorisation (intérieur-extérieur) : fonction extérieure, produit de Blaschke, fonction intérieure singulière.

Si le théorème de Beurling permet de décrire rapidement les sous-espaces invariants de l'opérateur shift dans le cadre de $H^2(\mathbb{T})$, les résultats sur les limites radiales et non-tangentielles ainsi que les théorèmes de factorisation permettent de mieux comprendre la structure de ces sous-espaces invariants.

2 Propriétés élémentaires de l'espace de Hardy

Ici nous parlerons seulement de l'espace de Hardy sur $\mathbb{D}$ et $\mathbb{T}$, mais il est bon de savoir que l'espace de Hardy peut aussi être défini sur d'autres régions du plan complexe, comme par exemple sur le demi-plan supérieur $\mathbb{C}^+$.

2.1 L'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$

On rappelle la définition de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, déjà énoncé dans l'introduction.

Définition 2.1.1 (Espace de Hardy sur le disque unité)**.** On appelle $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ l'espace

$$\left\{ f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \;\middle|\; \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < +\infty \right\}$$

des fonctions holomorphes sur le disque unité qui possède un développement en série entière dont les coefficients complexes sont de carré sommable.

Exemple 2.1. La fonction $z \mapsto \log(1-z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. En effet, elle est clairement holomorphe sur le disque unité et, de plus, par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$, elle est dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

Nous allons d'abord justifier que les fonctions de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ sont réellement holomorphes sur le disque unité.

Lemme 2.1.1. *On considère $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 0$ et telle que $|a_n|^2 < +\infty$. Alors, $R \geq 1$.*

Démonstration : Comme $\sum |a_n|^2 < +\infty$, on sait que $|a_n| \to 0$. Donc par définition, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \geq N$, $|a_n| \leq 1$.
Si bien que, par la formule de Cauchy-Hadamard :

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \geq 1$$

Ainsi, les fonctions de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ sont analytiques/holomorphes sur le disque unité.

Nous allons maintenant montrer que $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert, en montrant qu'il est - en tant qu'espace vectoriel normé, d'une norme qu'on définira - isométriquement isomorphe à $l^2(\mathbb{N})$.

Théorème 2.1.1. $l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ *est un espace de Hilbert munit de son produit scalaire canonique :*

$$< x, y >_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \overline{y_k}$$

C'est un Banach munit de la norme induite par le produit scalaire :

$$||x||_2 = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2}$$

<u>*Démonstration :*</u> Il est clair que l^2 est bien un espace-vectoriel et que $< .,. >_2$ définit bien un produit scalaire. Montrons donc la complétude.
Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tous $k, j \in \mathbb{N}$, on a $|x_n^k - x_n^j| \leq ||x^k - x^j||_2$. Donc, la suite $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet, si bien qu'elle converge.
On note $x_n^\infty = \lim\limits_{k\to+\infty} x_n^k$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Montrons que $x^\infty \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et que $||x^k - x^\infty||_2 \to 0$.
Soit $\epsilon > 0$, $k_0 = k_0(\epsilon)$ fourni par l'hypothèse de Cauchy et $j, k > k_0(\epsilon)$,
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n^j|^2 < \epsilon^2$.
En prenant l'asymptotique $[j \to +\infty]$, et par le lemme de Fatou,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n^\infty|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \liminf_{j\to+\infty} |x_n^k - x_n^j|^2 \leq \liminf_{j\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n^j|^2 < \epsilon^2$$

Si bien que, comme l^2 est un espace vectoriel, $x^\infty \in l^2$ et $x^k \to x^\infty$.

Finalement, $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est un Hilbert.

Lemme 2.1.2. *On pose ϕ l'application suivante :*

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & l^2(\mathbb{N}) & \to & \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \\ & & (a_n) & \mapsto & f \end{array}$$

Alors, ϕ est un isomorphisme.

<u>*Démonstration :*</u> ϕ est évidemment un morphisme par linéarité de la somme d'une série. De plus, c'est une bijection notamment par unicité du développement en série entière.
ϕ est donc bien un isomorphisme de $l^2(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

Il faut maintenant définir un produit scalaire sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

Lemme 2.1.3. *Soit ϕ l'isomorphisme introduit précédemment. Posons :*

$$\begin{array}{cccc} (.|.)_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} & : & \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \times \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) & \to & \mathbb{C} \\ & & f, g & \mapsto & < \phi^{-1}(f) | \phi^{-1}(g) >_2 \end{array}$$

Alors, $(.|.)_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

Avec les notations introduites, on peut expliciter ce produit scalaire :

$$(f|g)_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \overline{b_k}$$

Corollaire 2.1.1. *L'isomorphisme ϕ est une isométrie.*

Théorème 2.1.2. *L'espace $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ muni du produit scalaire $(.|.)_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration : Par l'application ϕ, $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ est isométriquement isomorphe (en tant qu'espace vectoriel normé) à $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ qui est un espace de Hilbert pour son produit scalaire canonique. Si bien que $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert pour $(.|.)_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}$.

Au produit scalaire $(.|.)_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}$, on peut associer une norme :

$$||f||_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \sqrt{(f|f)_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2}$$

Une conséquence du fait que $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ soit isométriquement isomorphe à l^2 est que l'espace des polynômes à coefficients complexes $\mathbb{C}[X]$ est dense dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

En effet, soit $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et soit (S_N) la suite des sommes partielles de f. Alors :

$$||f - S_N||_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \sqrt{\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2} \longrightarrow_{N \to +\infty} 0$$

car, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$.

Cependant, on peut aller plus loin. L'espace $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur le disque unité.

Définition 2.1.2. Soit X un ensemble non-vide et H un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes sur X. On dit que H est à noyau reproduisant si, pour tout $x \in X$, la forme linéaire d'évaluation

$$\begin{array}{cccc} L_x & : & H & \to & \mathbb{C} \\ & & f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est continue.

On remarque directement que, par le théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert, si on considère H un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur l'ensemble X,

$$\forall x \in X,\ \exists K_x \in H \mid f(x) = < f, K_x >$$

La fonction $K : (x, y) \in X \times X \mapsto K_y(x) \in \mathbb{C}$ est appelé noyau reproduisant de H. Elle introduit une asymétrie venant de la conjugaison :

$$K_y(x) = < K_y, K_x > = \overline{< K_x, K_y >} = \overline{K_x(y)}$$

Exemple 2.2. $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel est un espace de Hilbert à noyau reproduisant. En effet, soit $X = \{1, ..., n\}$, et $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors, C^n peut-être vu comme l'ensemble des applications

$$\begin{array}{cccc} f & : & X & \to & \mathbb{C} \\ & & j & \mapsto & f(j) := x_j \end{array}$$

De plus, $\dim(\mathbb{C}^n) = n < +\infty$ donc toutes les applications linéaires sont continues : CQFD.

Exemple 2.3. Plus dans l'esprit de ce stage, soit X un ensemble dénombrable quelconque non-vide $l^2(X)$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant.
En effet, $l^2(X) = \left\{ f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C}) \mid \sum_{x \in X} |f(x)|^2 < +\infty \right\}$. Si bien que, pour tout $x \in X$ et tout $f \in l^2(X)$, $|f(x)| \leq ||f||_2$.

Proposition 2.1.1. *L'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ est à noyau reproduisant sur $\mathbb{D}$*

<u>*Démonstration :*</u> Soit $x \in \mathbb{D}$. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Shwarz,

$$|f(x)| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (|w|^2)^n} \leq \sqrt{\frac{1}{1 - |w|^2}} ||f||_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}$$

Ainsi, la fonction d'évaluation en x est borné. $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ est donc bien à noyau reproduisant.
La question qui reste est, quel est le noyau reproduisant de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$?

$$(f|K_x)_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n | \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x}^n z^n)_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = (f|\frac{1}{1 - z\overline{x}})_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}$$

Si bien que, le noyau reproduisant de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ est $K_x(z) = \dfrac{1}{1 - z\overline{x}}$.

K_x est appelé noyau de Szegö.

2.2 Les classes de Hardy

On peut exprimer la norme sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ de manière équivalente, par le sup d'une intégrale. On en déduira ainsi une définition équivalente de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.
Ici, f sera une fonction holomorphe sur le disque unité. Donc une fonction développable en série entière de rayon de convergence $R \geq 1$.

Définition 2.2.1. La classe de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ est l'ensemble suivant :

$$\left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \;\middle|\; \sup_{r \in]0,1[} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < +\infty \right\}$$

Ainsi, on définit la norme sur la classe de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ par :

$$||f||_{H^2(\mathbb{D})} = \sup_{r\in]0,1[} \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta}$$

Proposition 2.2.1. *La classe de Hardy $(H^2(\mathbb{D}), ||.||_{H^2(\mathbb{D})})$ est un espace vectoriel normé. C'est-à-dire que, $H^2(\mathbb{D})$ est un espace vectoriel et que $||.||_{H^2(\mathbb{D})}$ est bien une norme sur $H^2(\mathbb{D})$.*

Démonstration : Conséquence directe de l'inégalité de Minkowski pour les intégrales.

Posons, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

f étant holormophe et donc analytique sur $\mathbb{D}$, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right)$ converge uniformément sur tout compact contenu dans $\mathbb{D}$.
Ainsi, prenons $r \in]0,1[$ fixé. On se place sur $\overline{B} = \overline{B}(0,r)$. Par convergence uniforme, on peut intervertir limite et intégrale :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}|^2 d\theta && (1)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{in\theta} \overline{\sum_{m=0}^{N} a_m r^m e^{im\theta}} d\theta && (2)\\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} a_n \overline{a_m} r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta && (3)
\end{aligned}$$

Or, on a $\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi, \text{ si n=m} \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$.

Si bien que,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

Maintenant, d'une part en appliquant le théorème de Beppo-Levi pour la mesure de comptage (on considère des sommes, c'est donc naturel),

$$\lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

D'autre part, en remarquant la convergence en croissance, on peut remplacer la limite par le sup pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = \sup_{r\in]0,1[} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

Pour résumer,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2 = \sup_{r\in]0,1[}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta$$

Si bien que, $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D})$ et $||.||_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = ||.||_{H^2(\mathbb{D})}$.

L'interêt de tout cela est que maintenant, il n'est pas nécessaire de calculer les coefficients du développement en série entière de f pour avoir le produit scalaire et la norme sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.
En effet, il suffit d'intégrer sur le cercle pour les obtenir.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) &= \left\{f(z)=\sum_{n\geq 0}a_nz^n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \;\middle|\; \sum_{n\geq 0}|a_n|^2 < +\infty\right\} \quad (4)\\ &= \left\{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \;\middle|\; \sup_{r\in]0,1[}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta < +\infty\right\} \quad (5)\end{aligned}$$

D'où, une nouvelle expression de la norme et du produit scalaire :

Corollaire 2.2.1. *Soit $f, g \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, alors*

$$||f||^2_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta$$

et,

$$(f|g)_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}d\theta$$

Démonstration : En ce qui concerne la norme, on l'a déjà explicité.
Pour le produit scalaire, il faut utiliser la seconde formule de polarisation :

$$(f|g)_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \frac{1}{4}(||f+g||^2_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} - ||f-g||^2_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} - i||f+ig||^2_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} + i||f-ig||^2_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})})$$

et d'expliciter le tout via la formule de la norme.

2.3 Identification à un sous-espace de $L^2(\mathbb{T})$

Dans cette section, nous allons voir une autre façon de caractériser l'espace $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.
On rappelle que $L^2(\mathbb{T})$ est l'espace des fonctions de carré intégrable sur le cercle unité $\mathbb{T}$ pour la mesure de Lebesgue normalisée sur $[0, 2\pi[$.
On peut identifier $[0, 2\pi[$ à $\mathbb{T}$ via une exponentielle complexe.

Dans le cours d'intégration de Lebesgue, on peut voir que l'on a une norme et un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{T})$:

Proposition 2.3.1. *Soit $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, alors*

$$(f|g)_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}d\theta$$

et,

$$||f||_{L^2(\mathbb{T})} = \sqrt{(f|f)_{L^2(\mathbb{T})}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta}$$

Théorème 2.3.1. *(de Riesz-Fischer) L'espace $L^2(\mathbb{T})$ est complet pour la norme $||.||_{L^2(\mathbb{T})}$.*

Posons maintenant,

$$\begin{array}{rcccc} e_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & \theta & \mapsto & e^{in\theta} \end{array}$$

Proposition 2.3.2. *$\mathcal{B} = \left\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.*

<u>*Démonstration :*</u> Il s'agit clairement d'une famille orthonormée.
Il nous suffit donc de montrer que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ pour la norme $||.||_{L^2(\mathbb{T})}$.
Pour cela, on va appliquer le théorème de Féjer.
Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $\epsilon > 0$. Par densité de $L^2(\mathbb{T})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, il existe $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ telle que $||f - g||_{L^2(\mathbb{T})} < \frac{\epsilon}{2}$.
Par le théorème de Féjer, il existe P un polynôme trigonométrique, tel que $||g - P||_\infty < \frac{\epsilon}{2}$.
Si bien que, $||f - P||_{L^2(\mathbb{T})} < \epsilon$.
CQFD.

Dans la suite, on notera $F_N = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left\{e_n \mid -N \leq n \leq N\right\}$.

Corollaire 2.3.1. *On considère l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ ainsi que sa base hilbertienne $\mathcal{B}$. Alors : Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$,*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f|e_n)_{L^2(\mathbb{T})} e_n$$

De plus, cette série est commutativement convergente dans $(L^2(\mathbb{T}), ||.||_{L^2(\mathbb{T})})$.

<u>*Démonstration :*</u> Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$,

$$\left|\left|f - \sum_{n=-N}^{N} (f|e_n)_{L^2(\mathbb{T})} e_n\right|\right|_{L^2(\mathbb{T})} = \mathrm{dist}(f, F_N) \longrightarrow 0$$

Ainsi, la série $\sum (f|e_n)_{L^2(\mathbb{T})} e_n$ converge dans l'espace vectoriel normé $L^2(\mathbb{T})$ et sa somme vaut f.

Pour montrer la convergence commutative, prenons $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection.
Alors, si $\left\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ est une base hilbertienne, $\left\{e_{\sigma(n)} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ l'est aussi.
On réecrit ce que l'on a démontré juste avant avec cette base hilbertienne et c'est fini. CQFD.

On pose $c_n(f) = (f|e_n)_{L^2(\mathbb{T})}$ les coefficients de Fourier de f. Par l'égalité de Parseval, on sait que ces coefficients de Fourier sont de carrés sommables car $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Dans la suite, on notera

$$H^2(\mathbb{T}) = \left\{f \in L^2(\mathbb{T}) \;\middle|\; \forall n < 0,\ c_n(f) = 0\right\}$$

C'est-à-dire, l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{T})$ de coefficients de Fourier nuls pour des indices négatifs.

Théorème 2.3.2. $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ *est isométriquement isomorphe au sous-espace vectoriel* $H^2(\mathbb{T})$ *de* $L^2(\mathbb{T})$

Démonstration : Posons l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) & \to & H^2(\mathbb{T}) \\ & & f & \mapsto & \tilde{f} \end{array}$$

où, $\left\{\begin{array}{l} f \ : \ z \ \mapsto \ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \ \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \\ \tilde{f} \ : \ z \ \mapsto \ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n \end{array}\right.$

Comme $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, on a par définition que c'est équivalent à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$.
Si bien que, par l'égalité de Parseval, c'est équivalent à $\tilde{f} \in H^2(\mathbb{T})$.
Ainsi, Φ est bien un isomorphisme.
De plus, c'est une isométrie car,

$$|||\Phi(f)||_{L^2(\mathbb{T})}^2 = ||\tilde{f}||_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = ||f||_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}$$

Une conséquence de ce théorème est que $H^2(\mathbb{T})$ est fermé dans $L^2(\mathbb{T})$. En effet, c'est l'image d'une isométrie par $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ qui est un Hilbert.

Il sera utile de se rappeler de la définition de l'isomorphisme Φ dans la suite de la lecture du rapport. On y fera sous référence.

3 Le théorème de Beurling pour $H^2(\mathbb{T})$

3.1 L'opérateur de décalage à droite shift

Définition 3.1.1. On note S l'opérateur de décalage à droite shift sur $l^2(\mathbb{N})$ que l'on décrit comme suit

$$\begin{array}{cccc} S & : & l^2 & \to & l^2 \\ & & x = (x_0, x_1, ...) & \mapsto & (0, x_0, x_1, ...) \end{array}$$

On note $\mathcal{E} = (e_0, e_1, ...)$ une base orthonormée de $l^2(\mathbb{N})$, où pour tout i, e_i est un vecteur de la forme $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ avec le 1 en i-ième place.
Alors, l'opérateur shift agit de la façon suivante :

$$Se_i = e_{i+1}$$

On voit que cet opérateur possède ce que l'on pourrait appeler un caractère unilatéral. On pourrait définir sur $l^2(\mathbb{Z})$ un opérateur shift que l'on qualifierait de bilatéral, ce n'est pas le sujet de ce mémoire, cependant cet opérateur est également étudié dans la littérature.

Dans la suite, on notera $\sigma_p(T)$ le spectre ponctuel d'un opérateur linéaire borné T, ensemble constitué des valeurs propres de l'opérateur T. On notera $\sigma(T)$ le spectre de l'opérateur borné T, constitué des valeurs λ telles que $(T - \lambda Id)$ n'est pas bijective (ou inversible).

En algèbre linéaire, le spectre est simplement l'ensemble des valeurs propres de la matrice associées à l'endomorphisme que l'on veut étudier.
Aussi, on sait que une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est normale, ie $A^*A = AA^*$, si et seulement s'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ uniquement constitué de vecteurs propres de A. Par exemple, les matrices auto-adjointes ou unitaires sont normales.

Dans un espace de Hilbert de dimension infinie, comme $l^2(\mathbb{N})$ muni de son produit scalaire canonique, un opérateur linéaire bornée comme S n'a pas forcément de valeurs propres, et son caractère borné assure un spectre non-vide.

On peut maintenant se poser la question de l'adjoint de S,

Proposition 3.1.1. *L'adjoint S^* de S est l'opérateur shift de décalage à gauche.*

__Démonstration :__ Soit $x, y \in l^2(\mathbb{N})$,

$$< S^*x, y >=< x, Sy >= \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n+1}\overline{y_n}$$

D'où,

$$S^*(x_0, x_1, ...) = (x_1, x_2, ...)$$

Commençons par étudier le spectre ponctuel de S.

Pour cela, supposons que l'on dispose d'une valeur propre λ, dont un vecteur propre associé est noté $x \neq 0$. Dans ce cas,

$$Sx = \lambda x$$

Donc,

$$(0, x_0, ...) = (\lambda x_0, \lambda x_1, ...)$$

La solution du système sous-jacent est $x = 0$. Cependant, cela est impossible car x est un vecteur propre, donc non-nul par définition.
Ainsi,

$$\sigma_p(S) = \emptyset$$

Si bien que, l'opérateur shift ne possède pas de valeur propre et est donc toujours injectif.

On peut maintenant étudier le spectre de S. Pour cela, on a juste à examiner quand est-ce que $(S - \lambda Id)$ est inversible. On prend donc un λ tel que c'est le cas.

$$(S - \lambda I)^{-1} = -(\lambda Id - S)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\Big(Id - \frac{S}{\lambda}\Big)^{-1} = \frac{-1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{S}{\lambda}\Big)^n$$

C'est une série géométrique, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{S}{\lambda}\Big)^n < +\infty$ si $\Big|\Big|\frac{S}{\lambda}\Big|\Big| = \frac{||S||}{|\lambda|} < 1$.
Or, $||S|| = 1$ de manière assez évidente. Donc, la série converge si $|\lambda| > 1$.

Ainsi, $\sigma(S) \subseteq \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\Big|\; |\lambda| \leq 1\Big\} = \mathbb{D}$. On veut montrer l'égalité.

On notera E^- l'adhérence de E et $\overline{E}$ le conjugué de E.

Pour cela, on peut déjà remarquer que pour un opérateur linéaire borné T, $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

Ainsi, pour montrer l'égalité, il faut raisonner sur S^*, en montrant que tout $\lambda \in \mathbb{D}$ est valeur propre de S^*. Ce que l'on fait ci-dessous lors de l'étude de S^*.

On peut alors conclure que,

$$\mathbb{D} = \overline{\mathbb{D}} \subseteq \sigma(S^*) = \overline{\sigma(S)} \subseteq \overline{\mathbb{D}^-}$$

Comme le spectre est fermé :

$$\sigma(S) = \mathbb{D}$$

On continue de la même manière avec S^*, l'adjoint de S.

On reforme $S^*x = \lambda x$, et on obtient le système $(x_1, x_2, ...) = (\lambda x_0, \lambda x_1, ...) = (\lambda x_0, \lambda^2 x_0, ...)$. Quitte à normaliser, on peut supposer que $x_0 = 1$. Si bien que les vecteurs propres sont de la forme $x = (1, \lambda, \lambda^2, ...)$.

Or, comme $x \in l^2(\mathbb{N})$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda^n|^2 < +\infty$$

C'est une série géométrique, la condition est vérifiée pour $|\lambda| < 1$.
Si bien que,

$$\sigma_p(S^*) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| < 1 \right\}$$

Par symétrie avec le spectre de S, il vient que

$$\sigma(S^*) = \sigma(S) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| \leq 1 \right\}$$

3.2 Démonstration du théorème de Beurling dans $H^2(\mathbb{T})$

Commençons par établir le théorème dans $H^2(\mathbb{T})$.

On rappelle que par sous-espace invariant par S, on entend sous-espace vectoriel fermé $\mathcal{M}$ de $H^2(\mathbb{T})$ tel que $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.

Ici, $Sf(e^{it}) = e^{it}f(e^{it})$, autrement dit, si $f = \sum_{n\geq 0} a_n e_n$ alors $Sf = \sum_{n\geq 0} a_n e_{n+1} = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} e_n$.

La démonstration du théorème de Beurling ne nécessite pas de propriétés extrêmements poussées sur les objets que l'on va manipuler tout au long de l'étude. Nous avons juste besoin de la définition suivante :

Définition 3.2.1. (Fonctions intérieures) On dit qu'une fonction Θ est intérieure si $\Theta \in H^2(\mathbb{T})$ et si $|\Theta| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$.

Théorème 3.2.1. *(Théorème de Beurling) Un sous-espace $\mathcal{M}$ de $H^2(\mathbb{T})$ non-trivial est S-invariant si et seulement si il existe une fonction intérieure Θ telle que $\mathcal{M} = \Theta H^2(\mathbb{T})$, où Θ est unique à une constante unimodulaire multiplicative près.*

<u>*Démonstration :*</u> **[2]**, **[4]**.

Le sens indirect est immédiat, car il est évident que les sous-espaces ainsi défini sont shift-invariants.

Attaquons-nous maintenant au sens direct. Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace de $H^2(\mathbb{T})$ non-trivial shift-invariant. Montrons qu'il est de la forme désirée.

Tout d'abord, on remarque que $S\mathcal{M} \neq \mathcal{M}$.

En effet, supposons que $S\mathcal{M} = \mathcal{M}$, alors pour tout $f \in \mathcal{M}$, il existe une fonction $g \in \mathcal{M}$ telle que $f = zg$. Ainsi, en itérant le procédé, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $g_k \in \mathcal{M}$ telle que $f = z^k g_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n) e_n$.

Soit n_0 le plus petit n tel que $\hat{f}(n) \neq 0$ et $\hat{f}(k) = 0$ pour $k < n_0$, alors comme $g_k \in \mathcal{M} \subseteq H^2(\mathbb{T})$, si $k > n_0$, $z^{-k}f(z) = g_k(z)$ et $f(e^{it}) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}$, on a $g_k = a_{n_0} e^{i(n_0-k)t} + ...$ avec $n_0 - k < 0$. C'est absurde car $g_k \in H^2(\mathbb{T})$.

On dit alors que $\mathcal{M}$ est 1-invariant si $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ et $S\mathcal{M} \neq \mathcal{M}$.

Maintenant, comme $S\mathcal{M} \neq \mathcal{M}$ et comme $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, on a que $(S\mathcal{M})^{\perp} \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$.

Donc, il existe un élément $\theta \in (S\mathcal{M})^{\perp} \cap \mathcal{M}$ et $\theta \neq \{0\}$. Etudions un tel élément.

On va d'abord montrer que $|\theta| = \textit{constante}$ presque partout sur $\mathbb{T}$.

En effet, en notant m la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ alors pour $n \geq 1$

$$< \theta, S^n\theta >= \int_{\mathbb{T}} \theta \overline{S^n \theta} dm = \int_{\mathbb{T}} e^{-int} \theta \bar{\theta} dm$$

Si bien que,

$$< \theta, S^n\theta >= \int_{\mathbb{T}} e^{-int} |\theta|^2 dm$$

(C'est aussi vrai pour $n=0$ mais alors on n'a plus l'orthogonalité ; En revanche, S n'est pas inversible et donc on ne peut choisir $n<0$)
Mais, on a d'une part $\theta \in \mathcal{M}$, et donc $S^n\theta \in S\mathcal{M}$ et d'autre part, $\theta \in (S\mathcal{M})^{\perp}$.
D'où,

$$< \theta, S^n\theta >= 0 = \int_{\mathbb{T}} e^{-int}|\theta|^2 dm$$

Et en conjuguant, comme $|\theta|^2$ est réel

$$\int_{\mathbb{T}} e^{int}|\theta|^2 dm = 0$$

Cette égalité vaut pour tout $n \geq 1$, mais comme $\overline{z} = z^{-1}$ sur $\mathbb{T}$, elle vaut aussi pour tout $n \leq -1$.
Et, $\theta \in \mathcal{M}$ donc, $\theta \in L^2(\mathbb{T})$. Donc $|\theta|^2 \in L^1(\mathbb{T})$.
Ainsi, tous les coefficients de Fourier de $|\theta|^2$ sont nuls, sauf en $n=0$, car on a $\theta \neq 0$. Ce qui prouve que $|\theta| = c$ presque partout sur $\mathbb{T}$.
Maintenant, en normalisant on obtient une fonction intérieure :

$$\Theta = \frac{\theta}{||\theta||_2}$$

On a donc l'existence d'une fonction unimodulaire Θ, telle que $\Theta \in (S\mathcal{M})^{\perp} \cap \mathcal{M}$.

Montrons que $\mathcal{M} = \Theta H^2(\mathbb{T})$.
Pour cela, on va montrer que $\Theta H^2(\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{M}$ puis que $\mathcal{M} \cap (\Theta H^2(\mathbb{T}))^{\perp} = \{0\}$.

Considérons l'inclusion. Il est clair que $|\Theta|^2 = \textit{constante}$ presque partout. Comme $||\Theta||_2 = 1$, on a forcément $|\Theta|^2 = 1$ presque partout ou encore $|\Theta| = 1$ presque partout.
D'autre part, on a $H^2(\mathbb{T}) = \overline{\mathrm{Vect}\{e_n | n \in \mathbb{N}\}}$ et $\{e_n\Theta | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}$ car $\Theta \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ est S-invariant.
D'où, $\Theta H^2(\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{M}$.

Concernant l'intersection, prenons $g \in \mathcal{M} \cap (\Theta H^2(\mathbb{T}))^{\perp}$ et montrons qu'alors, $g = 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$.
Alors, comme $g \in \mathcal{M}$, pour tout $n \geq 1$, $z^n g \in z\mathcal{M}$. Comme $\Theta \in (z\mathcal{M})^{\perp}$, il vient que

$$\int_{\mathbb{T}} z^n g\overline{\Theta} dm = 0$$

De même, comme $g \in (\Theta H^2(\mathbb{T}))^{\perp}$ et que $\overline{z} = z^{-1}$ sur $\mathbb{T}$, pour tout $n \leq 0$,

$$\int_{\mathbb{T}} g\overline{z^n\Theta} dm = \int_{\mathbb{T}} z^n g\overline{\Theta} dm = 0$$

Si bien que, $g\overline{\Theta} = 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$ en tant que fonction de $L^2(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier s'annulent.

Comme Θ est unimodulaire, $g = 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$.
Ainsi, $g = 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$.
D'où, $\mathcal{M} \cap (\Theta H^2(\mathbb{T}))^\perp = \{0\}$.

On a bien montré l'existence d'une fonction intérieure Θ telle que, $\mathcal{M} = \Theta H^2(\mathbb{T})$.

Concernant l'unicité, prenons Θ_1 et Θ_2 deux fonctions intérieures telles que

$$\Theta_1 H^2(\mathbb{T}) = \Theta_2 H^2(\mathbb{T})$$

Alors clairement, $\overline{\Theta_2}\Theta_1, \overline{\Theta_1}\Theta_2 \in H^2(\mathbb{T})$.
Posons $h = \overline{\Theta_2}\Theta_1$ alors $h \in H^2(\mathbb{T})$ et, d'après ce que l'on vient de voir $\overline{h} \in H^2(\mathbb{T})$.
Or, $H^2(\mathbb{T}) \cap \overline{H^2(\mathbb{T})} = \mathbb{C}$ donc $h = cste$.
Si bien que, comme h est unimodulaire : $|cste| = 1$.

On a donc démontré le théorème de Beurling dans $H^2(\mathbb{T})$.

Remarque 3.1. Dans cette démonstration nous avons établi en particulier que nous ne disposons pas de $\mathcal{M}$ tel que $S\mathcal{M} = \mathcal{M}$ dans $H^2(\mathbb{T})$. Cependant, il est a noter qu'il est possible d'étudier ces espaces dans $L^2(\mathbb{T})$, mais nous ne les étudierons pas dans le cadre de ce rapport.

4 Etude des fonctions intérieures et factorisation

Comme on a pu le voir ci-dessus, on peut définir une classe de fonctions dites intérieures. Dans $H^2(\mathbb{T})$ ce sont les fonctions Θ telles que $|\Theta| = 1$ presque partout (donc sur $\mathbb{T}$). On pourrait alors définir les fonctions intérieures sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ comme les fonctions $\theta \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ telles que $|\Phi(\theta)| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$. Cela n'est pas totalement satisfaisant car on ne comprend pas bien comment sont articulées les valeurs de θ dans $\mathbb{D}$ avec celles de $\Phi(\theta)$ sur $\mathbb{T}$.

Ainsi, l'objectif des deux premières sections ci-dessous sera de mieux comprendre le lien entre f est $\Phi(f)$. Nous allons en particulier voir que $\Phi(f)$ peut être vue comme une limite naturelle (en différents sens) sur $\mathbb{T}$ de f définie sur $\mathbb{D}$. On verra en particulier les limites simples radiales et non-tangentielles ainsi que la limite en norme L^2.
Nous allons d'abord rappeler les noyaux de Szegö, Cauchy et Poisson avant de nous attaquer aux limites radiales et en norme.

4.1 Noyau de Szegö, de Cauchy et de Poisson

On note ici trois quantités que l'on pourra utiliser par la suite, dont un rappel.
On a déjà noté que le noyau de Szegö était le noyau reproduisant de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$:

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}$$

En effet, soit $f, g \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ avec $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$.

Nous allons aussi identifier f et g sur $\mathbb{T}$ par $\Phi(f)$ et $\Phi(g)$ (afin de pouvoir intégrer sur $\mathbb{T}$).

$$< f, g >_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{f(e^{it})}dt = \sum_{n\geq 0} a_n \overline{b_n}$$

Si bien que, pour $g(z) = k_\lambda(z) = \sum_{n\geq 0} \overline{\lambda}^n z^n$,

$$< f, k_\lambda > = \sum_{n\geq 0} a_n \lambda^n = f(\lambda)$$

Or, cette expression permet de lier le noyau reproduisant de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ avec la formule de Cauchy :

$$< f, k_\lambda > = f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{1 - \lambda e^{-it}} dt$$

Par le changement de variables $\zeta = e^{it}$, il vient que $d\zeta = ie^{it}dt$, et donc si $f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \lambda} d\zeta$$

Comme les fonctions $f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ sont denses dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, cette formule s'étend naturellement à tout l'espace.

Maintenant, comme $k_\lambda \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, $fk_\lambda \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ et donc d'une part :

$$< fk_\lambda, k_\lambda >= f(\lambda)k_\lambda(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{1-|\lambda|^2}$$

D'autre part,

$$< fk_\lambda, k_\lambda >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{|1-\overline{\lambda}e^{it}|^2}dt$$

Si bien que,

$$\frac{f(\lambda)}{1-|\lambda|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{|1-\overline{\lambda}e^{it}|^2}dt$$

Finalement,

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\overline{\lambda}e^{it}|^2} f(e^{it})dt$$

Ainsi on définit le noyau de Poisson :

$$P_r(t) = P(re^{it}) = \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2} = \frac{1-r^2}{|e^{it}-r|^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int}$$

Notons que pour $r \in [0,1[$

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1$$

La question que l'on alors peut se poser c'est d'où vient la nécessité d'introduire une telle quantité ici ?

On voit que son obtention est assez "naturelle", mais d'où vient-elle en pratique ?

Il se trouve que cette formule vient du problème d'un Dirichlet. Soit f une fonction intégrable, on cherche à résoudre

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ sur } \mathbb{D} \\ u = f, \text{ sur } \mathbb{T} \end{cases}$$

dont la solution est

$$u(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} f(e^{it})dt$$

Voir **[1]**.

4.2 Limites radiales, limites non-tangentielles et théorème de Fatou

Si on prend une fonction f holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$, la question est de savoir si f admet une "extension" en tant que fonction sur le cercle unité $\mathbb{T}$. Par le biais des notions que l'on va présenter par la suite, on pourra mieux comprendre le lien entre $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ et $\Phi(f) \in H^2(\mathbb{T})$.

Définition 4.2.1. (Limite radiale) Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$, on dit que f admet une limite radiale L en un point $\omega \in \mathbb{T}$ si

$$\lim_{r \to 1^-} f(r\omega) = L$$

On notera bf la limite radiale de f, c'est-à-dire,

$$bf(\omega) = \lim_{r \to 1^-} f(r\omega)$$

pour chaque $\omega \in \mathbb{T}$ où la limite existe (qu'elle soit finie ou infinie).

Remarque 4.1. La fonction bf est aussi appelé limite radiale au bord de f, ou dans certaines références *boundary limit function*.

Nous allons commencer par la convergence en norme. On définira $f_r(e^{it}) = f(re^{it})$ pour $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

Proposition 4.2.1. *Si $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ alors $bf = \Phi(f)$ existe au sens de la norme $L^2(\mathbb{T})$, c'est-à-dire $\lim_{r\to 1} f_r = bf$, et $bf \in H^2(\mathbb{T})$.*

Démonstration : Montrons que $\lim\limits_{r\to 1} ||f_r - bf||_2 = 0$ car on voit directement que $bf \in H^2(\mathbb{T})$.

D'une part, on a $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ donc $f_r(e^{it}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}$.

D'autre part, $bf(e^{it}) = \Phi(f)(e^{it}) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n e^{int}$.

Si bien que, $||f_r - bf||_2^2 = \sum\limits_{n\geq 0} |\widehat{(f_r - bf)}(n)|^2 = \sum\limits_{n\geq 0} |(\widehat{f_r} - \widehat{bf})(n)|^2$

Or, $\widehat{f_r}(n) = (\widehat{bf * P_r})(n) = \widehat{bf}(n) \times \widehat{P_r}(n) = \begin{cases} 0, \ n < 0 \\ a_n r^n, \ n \geq 0 \end{cases}$

D'où, $\widehat{(f_r - bf)}(n) = a_n(r^n - 1)$.

Donc, $||f_r - bf||_2^2 = \sum\limits_{n\geq 0} |a_n|^2(1-r^n)^2$. Reste à savoir si $\lim\limits_{r\to 1} \sum\limits_{n\geq 0} |a_n|^2(1-r^n)^2 = 0$.

Pour cela, on découpe la somme en deux parties. Soit $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n\geq 0} |a_n|^2(1-r^n)^2 = \sum_{n\leq N} |a_n|^2(1-r^n)^2 + \sum_{N+1\leq n\leq 0} |a_n|^2(1-r^n)^2$$

Alors soit $\epsilon > 0$. D'une part

$$\sum_{n\leq N} |a_n|^2(1-r^n)^2 \leq \sum_{n\leq N} |a_n|^2 < \frac{\epsilon}{2}$$

Et d'autre part, pour r assez proche de 1 et en posant $a = \max_{k\geq 0} |a_k|$ (comme a_n est fixé et converge vers 0, a est bien défini)

$$(1-r^n)^2 < \frac{\epsilon}{2a}, \quad \forall 0 \leq n \leq N$$

D'où le résultat.

Définition 4.2.2. (Angle de Stolz) Soit $\xi \in \mathbb{T}$. On appelle angle de Stolz en ξ, que l'on note S_ξ, tout secteur angulaire centré en ξ, de bissectrice $[0, \xi]$ et d'angle $\theta < \pi$

Remarque 4.2. Cette définition nous donne une définition géométrique de l'angle de Stolz, mais on peut avoir des difficultés à imaginer comment l'utiliser lors de raisonnements en pratique. C'est pour celà qu'on peut introduire d'autre définitions :

$$S_\xi = \mathrm{Conv}\big(\xi, \mathrm{D}(0, \frac{1}{2})\big)$$

C'est-à-dire, le plus petit convexe contenant ξ et $\mathrm{D}(0, \frac{1}{2})$,
Ou encore,

$$S_\xi = \Big\{ z \in \mathbb{D} \;\big|\; |z-\xi| \leq c(1-|z|),\ c > 1 \Big\}$$

Définition 4.2.3. (Limite non-tangentielle) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, on dit que f admet une limite non-tangentielle L en $\xi \in \mathbb{T}$ si

$$\lim_{z \to \xi, z \in S_\xi} f(z) = L$$

C'est-à-dire que f tend vers une valeur L en $\xi \in \mathbb{T}$ en restant dans l'angle de Stolz centré en ξ.

Définition 4.2.4. (Mesure borélienne) On dit qu'une mesure μ est borélienne si c'est une mesure définie sur la tribu borélienne d'un espace topologique.

Soit μ une mesure borélienne à valeurs complexes sur $\mathbb{T}$. Par le théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue, soit $d\mu = hdm + d\mu_s$, $h \in L^2(m)$, sa décomposition de Lebesgue par rapport à la mesure de Lebesgue m. Alors, m-presque partout sur $\mathbb{T}$, on a

$$\lim_{\Delta \to \xi, \xi \in \Delta} \frac{\mu\Delta}{m\Delta} = \frac{d\mu}{dm}(\xi) = h(\xi)$$

où Δ est un arc symétrique centré sur ξ et de longueur δ, qui tend vers $\xi \in \mathbb{T}$. Un tel point $\xi \in \mathbb{T}$ est appelé *point de Lebesgue pour μ*.
ξ est un point de Lebesgue de μ si c'est un point de Lebesgue de hdm.

$$\frac{\mu(\Delta)}{m(\Delta)} = \frac{1}{m(\Delta)} \int_\Delta hdm \to_{\delta \to 0} h(\xi)$$

où $\Delta \sim B(\xi, \delta) \cap \mathbb{T}$. D'où,

$$\frac{1}{m(\Delta)} \int_\Delta \big(h(\zeta) - h(\xi)\big) dm(\zeta) \to_{\delta \to 0} 0, \ m\text{-presque partout}$$

Ainsi, dans la littérature, on pourra trouver une définition équivalente d'un point de Lebesgue. On dit que ξ est un point de Lebesgue de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si :

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{B(\xi,r)} \frac{|f(t) - f(\xi)|}{m(B(\xi,r))} dm(t) = 0$$

C'est-à-dire lorsque les moyennes des applications $t \mapsto |f(t) - f(\xi)|$ sur les boules centrées sur ξ sont très petites.

L'intérêt d'introduire cette notion est de passer de la notion de presque partout à un ensemble de mesure pleine où tout se passe comme on le souhaite.

Théorème 4.2.1. *(de Fatou) Soit μ une mesure (finie) borélienne à valeurs complexes et $\xi \in \mathbb{T}$ un point de Lebesgue pour cette mesure. Alors, l'intégrale de Poisson de μ*

$$f(z) = P * \mu(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} d\mu(\xi)$$

admet une limite non-tangentielle en ξ.
Cette limite non-tangentielle coïncide avec la dérivée de μ par rapport à m en ξ, c'est-à-dire que

$$\lim_{z \to \xi, z \in S_\xi} f(z) = \frac{d\mu}{dm}(\xi), \text{ presque partout sur } \mathbb{T}$$

En particulier,

$$\lim_{r \to 1^-} f(r\xi) = bf(\xi) = \frac{d\mu}{dm}(\xi)$$

Insistons sur le fait que μ est une mesure complexe et donc pas nécessairement positive.

Démonstration : **[2]**.
Quitte à remplacer μ par $\mu - cm$, on peut supposer que $\mu(\mathbb{T}) = 0$.
De plus, quitte à faire une rotation, on peut supposer que $\xi = 1$.
Comme μ est finie, il existe une fonction F continue à gauche sur $[-\pi, \pi]$ de variations bornées, telle que $\mu[e^{i\alpha}, e^{i\beta}[= F(\beta) - F(\alpha)$ et $F(-\pi) = F(\pi)$.
Pour voir que F est de variations bornées, on utilise le fait que μ est finie, et donc

$$\forall n, \forall \{t_1, ..., t_n\}, \sum_{k=1}^{n-1} |F(t_{k+1}) - F(t_k)| \leq M$$

où on choisit les t_i dans $\mathbb{T}$, ordonnés par exemple dans le sens trigonométrique.
Vérifions la continuité à gauche. Comme $\mu[e^{i\alpha}, e^{i\beta}[= F(\beta) - F(\alpha)$, prenons $e^{i\beta}$ un point de $\mathbb{T}$ formant un angle $\delta > 0$ par rapport à 1 et un point $e^{i\beta_0}$ formant un angle $\delta_0 < \delta$.
Comme on considère $[e^{i\beta}, e^{i\beta_0}[$ qui est ouvert à droite, lorsque $\beta \to \beta_0$, l'intervalle "tend" vers $\{\beta_0\}$. Donc,

$$F(\beta) = \mu[e^{i\alpha}, e^{i\beta}[+F(\alpha) \longrightarrow_{\beta \to \beta_0^-} \mu[e^{i\alpha}, e^{i\beta_0}[+F(\alpha) = F(\beta_0)$$

De plus, comme $\mu(\mathbb{T}) = 0$, $F(-\pi) = F(\pi)$.
Si bien que, F est bien telle que voulue.
Comme cette fonction est reliée à μ par ces relations, pour $z \in \mathbb{D}$:

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} P(ze^{-it})dF(t)$$

Rappelons que

$$P(ze^{-it}) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\tau-t)}|^2} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\tau-t)}$$

Donc

$$\frac{dP(ze^{-it})}{dt} = \frac{(1-r^2)2r\sin(\tau-t)}{(1+r^2-2r\cos(\tau-t))^2}$$

Notons aussi que

$$\Big|\frac{dP(ze^{-it})}{dt}\Big| \leq \frac{C}{1-r}$$

Par une intégration par partie :

$$(*) \quad f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dP(ze^{-it})}{dt} F(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(t\frac{dP(ze^{-it})}{dt}\Big) 2\pi \frac{F(t)-F(-t)}{2t}\frac{dt}{2\pi}$$

Posons, pour $z \in S_\xi = S_1$ (angle de Stolz) :

$$k_z(t) = t\frac{dP(ze^{-it})}{dt}$$

La démonstration du théorème va reposer sur 3 propriétés que $(k_z)_{S_1}$ vérifie, que l'on notera $(1), (2), (3)$.

Premièrement, soit $z = re^{i\tau}$, tel que $0 \leq r < 1$ et $|\tau| \leq \pi$, alors,

$$||k_z||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|t\frac{dP(ze^{-it})}{dt}\Big|dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\tau-\pi}^{\tau+\pi}(|\tau|+|s|)\Big|\frac{dP(re^{-is})}{ds}\Big|ds$$

Par le changement de variable affine (donc licite) $s = t - \tau$, donnant $ds = dt$ et $ze^{-it} = re^{i\tau}e^{-it} = re^{i(\tau-t)} = re^{-is}$ ainsi que l'inégalité triangulaire.
D'où par linéarité,

$$||k_z||_1 \leq \frac{|\tau|\times C}{1-r} + C + \frac{1}{2\pi}\int_{\tau-\pi}^{\tau+\pi}\Big|s\frac{dP(re^{-is})}{ds}\Big|ds = \frac{|\tau|\times C}{1-r} + C - \frac{1}{2\pi}\int_{\tau-\pi}^{\tau+\pi} s\frac{dP(re^{-is})}{ds}ds$$

Si bien que, par une intégration par parties

$$||k_z||_1 \leq \frac{|\tau|\times C}{1-r} + C - \frac{1}{2\pi}\Big(\Big[sP(re^{-is})\Big]_{\tau-\pi}^{\tau+\pi} + \int_{\tau-\pi}^{\tau+\pi} P(re^{-is})ds\Big)$$

Comme $P(re^{-is})$ est 2π-périodique en s et comme on a déjà vu que l'intégrale du noyau de Poisson vaut 1, la dernière intégrale vaut 1.

Concernant les $P(re^{-is})$ en $\tau - t$ et $\tau + t$: z étant dans l'angle de Stolz S_1, on a τ qui est proche de 0 lorsque r est proche de 1 et ainsi $re^{-is} = re^{-\tau \pm \pi}$ est proche de $re^{-i\pi}$ de sorte que $|1 - re^{-is}|$ est loin de 0. Ainsi, $|sP(re^{-is})|$ est contrôlé par une constante.
De plus, comme $\frac{|\tau|}{1-r}$ est uniformément borné dans S_1, on conclut

$$||k_z||_1 \leq C^{te} \quad (1)$$

Deuxièmement, par intégration par partie et linéarité de la limite,

$$\lim_{z \to 1, z \in S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_z(t)dt = \lim_{z \to 1, z \in S_1} (1 - P(-re^{i\tau})) = 1 \quad (2)$$

Troisièmement,

$$k_z(t) = t\frac{dP(ze^{-it})}{dt} = 2rt\frac{\sin(\tau - t)}{1 - 2r\cos(\tau - t) + r^2} P(re^{i(\tau - t)})$$

Si bien que,

$$\lim_{z \to 1} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi, \delta \geq 0} k_z(t) = 0 \quad (3)$$

Les propriétés $(1) - (3)$ sont caractéristiques de ce que l'on appelle une unité approchée.

Maintenant que l'on a toutes les propriétés, on rappelle que par (*)

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(t\frac{dP(ze^{-it})}{dt}\Big) 2\pi \frac{F(t) - F(-t)}{2t} \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} k_z(t) 2\pi \frac{F(t) - F(-t)}{2t} \frac{dt}{2\pi}$$

Et donc, pour tout $\delta > 0$ fixé, quand $z \to 1, z \in S_1$, en utilisant (2),

$$f(z) = \frac{d\mu}{dm}(1) + \int_{-\pi}^{\pi} k_z(t) \Big(2\pi \frac{F(t) - F(-t)}{2t} - \frac{d\mu}{dm}(1)\Big) \frac{dt}{2\pi} + o(1)$$

D'où, par la relation de Chasles,

$$f(z) = \frac{d\mu}{dm}(1) + \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} + o(1)$$

La deuxième intégrale est petite quand δ est petit (par (1) et car $\Delta(t) = 2\pi \frac{F(t) - F(-t)}{2t} - \frac{d\mu}{dm}(1) = o(1)$ quand $z \to 1$).
La première et dernière intégrale tendent vers 0 quand $z \to 1, z \in S_1$ pour tout $\delta > 0$ (par (3) et le fait que Δ soit borné).

$$\lim_{z \to 1, z \in S_1} f(z) = \frac{d\mu}{dm}(1)$$

CQFD.

Corollaire 4.2.1. *Si $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, alors f admet des limites non-tangentielles presque partout sur $\mathbb{T}$, et on a*

$$\lim_{z \to \xi, z \in S_\xi} f(z) = bf(\xi)), \textit{ presque partout sur } \mathbb{T}$$

La fonction au bord $\xi \mapsto f(\xi)$ est dans $L^2(\mathbb{T})$ et $f(\xi) = bf(\xi) = \Phi(f)(\xi)$ presque partout sur $\mathbb{T}$

<u>*Démonstration :*</u> Il suffit d'appliquer le théorème de Fatou à la mesure $d\mu = bfdm$, car $bf \in H^2(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ et

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} f(e^{it}) dt$$

On peut ainsi trouver une autre façon d'identifier les fonctions de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ avec leurs valeurs au bord.

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{T})$$

Il est à noter que l'on peut cependant trouver des fonctions f holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$, admettant des limites non-tangentielles presque partout sur $\mathbb{T}$ et dans $L^2(\mathbb{T})$ (voir même bornées), mais telles que $f \notin \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

Par exemple,

$$f(z) = \exp\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

où, $\dfrac{1+z}{1-z}$ est le noyau de Schwarz-Herglotz en $\zeta = 1$.
Alors, $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}\backslash\{1\})$ et admet des limites (non-tangentielles ou pas) partout sur $\mathbb{T}\backslash\{1\}$.
En effet,
Soit $\xi \in \mathbb{T}$ et $z = r\xi$,

$$|f(r\xi)| = \exp\left(\mathrm{Re}\frac{1+z}{1-z}\right) = \exp\left(\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right) = \exp\left(\frac{1-r^2}{|\xi - r|^2}\right)$$

Si bien que,

$$|f(r\xi)| \to \begin{cases} 1, \ \xi \neq 1 \\ +\infty, \ \xi = 1 \end{cases}$$

Or, $f \notin \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

En effet, si $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on aurait

$$|f(\lambda)| = | < f, k_\lambda > | \leq \frac{||f||}{\sqrt{1 - |\lambda|^2}}$$

Pour $r \in [0, 1[$,

$$|e^{\frac{1+r}{1-r}}| = e^{\frac{1-r^2}{|1-r|^2}} >> \frac{1}{\sqrt{1-r}}$$

Si bien que, $f \notin \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

f est l'inverse d'une fonction intérieure, sans zéros dans $\mathbb{D}$.

Dans la suite, on pourra étudier la fonction $\theta(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ qui est ce que l'on appelle une fonction intérieure singulière.

Maintenant que nous comprenons mieux le lien entre $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ et ses valeurs au bord, nous pouvons donner un sens aux fonctions intérieures rencontrées dans le section 3.2. Désormais nous allons appeler une fonction $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ intérieure si ses limites (non-tangentielles) sur $\mathbb{T}$ sont de module 1 presque partout sur $\mathbb{T}$.
Dans les sections suivantes nous allons expliquer la structure riche de ces fonctions intérieures qui sont produits de produits de Blaschke et de ce que l'on appelle fonctions intérieures singulières.

4.3 Topologie faible-* et théorème d'Alaoglu

Afin de comprendre le deuxième type de fonctions intérieures - à côté des produits de Blaschke - nous devons d'abord introduire quelques outils de l'analyse fonctionnelle.

Dans un espace de Hilbert H, donc munit d'un produit scalaire $< .|. >$, on sait qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers f si,

$$\forall g \in H, < f_n, g > \to < f, g >$$

On arrive donc facilement à voir ce qu'il se passe via le produit scalaire, cette limite est unique et l'étude de la topologie faible dans un Hilbert se fait avec des outils "élémentaires".

Cependant, qu'en est-il dans un espace de Banach ?
Pour faire "comme si" on disposait d'un produit scalaire, le seul moyen est de passer par l'espace dual :

Soit X un espace de Banach, on dit qu'une suite (x_n) converge faiblement vers x si,

$$\forall \varphi \in X^*, \ \varphi(x_n) \to \varphi(x)$$

Donc, dans la topologie faible, on décrit la convergence faiblement (ou non) des éléments d'un espace X de Banach par les éléments de son dual X^*.

Naturellement, on peut se demander si l'on peut décrire la convergence faiblement (au sens du dual) des éléments de X^* via les éléments de X.
C'est ce qu'on appelle la convergence faible-*.

On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement-* vers φ dans X^* si,

$$\forall x \in X, \ \varphi_n(x) \to \varphi(x)$$

C'est, à peu près, similaire à la convergence faible à ceci près que cela fait intervenir la notion de prédual.

Finalement, on se rend compte que plus généralement, la topologie faible d'un espace topologique X est une topologie définie sur X par son dual topologique X^*.
A contrario, on définit une topologie faiblement sur le dual X^* au moyen de son prédual (l'espace de base) X. C'est cette topologie qui nous intéresse par la suite.

Il est à noter que l'on peut aisément voir que si l'espace de Banach que l'on considère est réflexif (égal à son bidual), alors la topologie faible et faible-* coïncident.

Le théorème suivant permet entre autre de pallier à un manque de compacité en dimension infinie et il justifie aussi la définition de la topologie faible-*.
En effet, la topologie faible-* étant moins fine, elle contient moins d'ouverts et il est donc plus aisé d'y établir la compacité car il y a moins de recouvrements ouverts.

Avant de passer à l'énoncé du théorème, on rappelle l'énoncé du théorème de Tychonov :

Théorème 4.3.1. *(de Tychonov) Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)$ une famille d'espaces topologiques compacts, alors le produit $(X = \prod X_i, \bigotimes \mathcal{T}_i)$ est compact.*

Le théorème de Tychonov dit donc que n'importe quel produit cartésien de compacts est compact pour la topologie produit ie, la topologie la moins fine qui rend continue toutes les projections sur l'une des composantes du produit.

Théorème 4.3.2. *(de Alaoglu) Soit E un espace de Banach réel. Alors la boule unité fermé de E^* est faiblement-* compacte, ie, compacte pour la topologie faible-*.*

Démonstration : Pour la démonstration de ce théorème central d'analyse fonctionnelle, on va donc devoir utiliser le théorème de Tychonov.
On pose $X_i = \mathbb{R}$ pour tout $i \in E$. Alors, $X = \prod_{i \in E} \mathbb{R} = \mathbb{R}^E$.
On peut identifier $\mathbb{R}^E$ à $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ via la bijection

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathcal{F}(E,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^E \\ & & f & \mapsto & \big(f(x)\big)_{x \in E} \end{array}$$

Notons $\omega = (\omega_x)_{x \in E}$ les éléments de $\mathbb{R}^E$.
Pour tout $y \in E$, notons p_y les projections canoniques

$$\begin{array}{ccccc} p_y & : & \mathbb{R}^E & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \omega_y \end{array}$$

On remarque que comme $\mathbb{R}^E$ est munit de sa topologie produit, ces projections canoniques sont continues.
On définit ainsi ψ la bijection réciproque de ϕ restreinte à $\phi(E^*)$ comme suit

$$\begin{array}{ccccc} \psi & : & \phi(E^*) \subseteq \mathbb{R}^E & \to & \mathcal{F}(E,\mathbb{R}) \\ & & \omega & \mapsto & f \mid \forall y \in E,\ f(y) = \omega_y \end{array}$$

Il faut maintenant montrer que ψ est continue de $\phi(E^*)$ munit de la topologie produit de $\mathbb{R}^E$ dans E^* munit de la topologie faible-*.

Pour cela, il suffit de vérifier que pour tout $y \in E$,

$$\begin{array}{cccc} \Lambda_y & : & \phi(E^*) & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \psi(\omega)(y) \end{array}$$

est continue.
On remarque alors qu'en fait :

$$\forall f \in E^*,\ \Lambda_y(\phi(f)) = f(y) = p_y(\phi(f))$$

Si bien que

$$\Lambda_y = (p_y)_{|\phi(E^*)}$$

La projection canonique étant continue via la topologie produit, on obtient directement la continuité de Λ_y.

Ainsi, pour démontrer le théorème d'Alaoglu, il suffit de montrer que la boule unité fermée de E^*, $\mathcal{B}_{E^*}$, est l'image d'un compact K de $\mathbb{R}^E$ par ψ.

Pour cela, posons :

$$K := \left\{\omega \in \mathbb{R}^E \mid \forall x \in E,\ |\omega_x| \leq ||x||_E\right\}$$

Alors, par le théorème de Tychonov, K est compact car :

$$K = \prod_{x \in E} D(0, ||x||_E)$$

De plus, posons :

$$F := \left\{\omega \in \mathbb{R}^E \mid \forall (x,y) \in E \times E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \omega_{\lambda x + \mu y} = \lambda \omega_x + \mu \omega_y\right\}$$

L'application

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_{x,y}^{\lambda,\mu} & : & \mathbb{R}^E & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \omega_{\lambda x + \mu y} - \lambda \omega_x - \mu \omega_y \end{array}$$

est continue car les projections sont continues.
Ainsi, $(\Lambda_{x,y}^{\lambda,\mu})^{-1}(\{0\})$ est un fermé et,

$$F = \bigcap_{(x,y) \in E^2, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2} (\Lambda_{x,y}^{\lambda,\mu})^{-1}(\{0\})$$

Donc, F est fermé.
Si bien que $K \cap F$ est compact.
Or,

$$\mathcal{B}_{E^*} = \psi(K \cap F)$$

CQFD.

Corollaire 4.3.1. *Si X est un espace vectoriel normé reflexif, alors la boule unité fermée de X est compacte pour la topologie faible.*

4.4 Produit de Blaschke

Lemme 4.4.1. *(Formule de Jensen) Soit $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ avec $f(0) \neq 0$ et soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des zéros de f sur $\mathbb{D}$ comptés avec leur multiplicité.*
Alors, si en plus f est analytique sur un disque $\mathbb{D}_{1+\epsilon} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1+\epsilon\}$ où $\epsilon > 0$, on a

$$\log|f(0)| + \sum_{n\geq 1} \log\frac{1}{|\lambda_n|} = \int_{\mathbb{T}} \log|f|dm$$

<u>*Démonstration :*</u> **[2]**.
Prenons $f \in Hol(\mathbb{D}_{1+\epsilon})$ telle que f n'admet aucun zéro sur le cercle unité $\mathbb{T}$. Alors, les zéros de f sur $\mathbb{D}$ est nécessairement fini ($\mathbb{D}$ est contenu dans un compact, on conclut avec le principe des zéros isolés).
Posons $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{D}$ les zéros de f dans $\mathbb{D}$ où $m \geq 1$.
Posons :

$$B(z) = \prod_{i=1}^{m} \frac{|\lambda_i|}{\lambda_i} \frac{\lambda_i - z}{1 - \overline{\lambda_i} z}$$

D'une part, sur $\mathbb{T}$ on a $|B(z)| = 1$. En effet, comme $|z| = 1$

$$|B(z)| = \prod_{i=1}^{m} \left|\frac{|\lambda_i|}{\lambda_i} \frac{\lambda_i - z}{1 - \overline{\lambda_i} z}\right| = \prod_{i=1}^{m} \frac{|\lambda_i - z|}{|1 - \overline{\lambda_i} z|} = \prod_{i=1}^{m} \frac{|\lambda_i - z|}{|z.\overline{z} - \overline{\lambda_i} z|} = \prod_{i=1}^{m} \frac{|\lambda_i - z|}{|\overline{z - \lambda_i}|} = 1$$

D'autre part, il existe $\delta > 0$, tel que $\dfrac{f}{B}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}_{1+\delta}$ et sans zéro dans cet espace.
Si bien que $\log|\dfrac{f}{B}|$ est harmonique.
Par la propriété de la moyenne pour une fonction harmonique :

$$\log\left|\left(\frac{f}{B}\right)(0)\right| = \int_{\mathbb{T}} \log\left|\frac{f}{B}\right|dm = \int_{\mathbb{T}} \log|f|dm$$

Or,

$$\log\left|\left(\frac{f}{B}\right)(0)\right| = \log|f(0)| + \sum_{i=1}^{m} \log\frac{1}{|\lambda_i|}$$

D'où,

$$\log|f(0)| + \sum_{i=1}^{m} \log\frac{1}{|\lambda_i|} = \int_{\mathbb{T}} \log|f|dm$$

Définition 4.4.1. (Noyau de Poisson) Le noyau de Poisson est défini par la quantité suivante :

$$P_r(t) = P(re^{it}) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{it}|^2} = \frac{1 - r^2}{|e^{it} - r|^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int}$$

où $0 \leq r < 1$.

Dans la suite, on notera $f_r = f * P_r$

Lemme 4.4.2. *(Condition de Blaschke) Soit $f \in Hol(\mathbb{D})$ et soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des zéros de f sur $\mathbb{D}$ comptés avec leur multiplicité. Supposons que $\liminf_{r\to 1} \int_{\mathbb{T}} \log |f_r|^2 dm < +\infty$.*
Alors,

$$\sum_{n\geq 1}(1-\lambda_n) < +\infty$$

<u>*Démonstration :*</u> On peut supposer que $f(0) \neq 0$. On veut montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \log \frac{1}{|\lambda_n|} = \liminf_{r\to 1} \sum_{|\lambda_n|<r} \log \frac{r}{|\lambda_n|} < +\infty$$

Traitons l'égalité car $\liminf_{r\to 1} \sum_{|\lambda_n|<r} \log \frac{r}{|\lambda_n|} < +\infty$ provient de la formule de Jensen.
On raisonne par double inégalité.
Clairement,

$$\sum_{|\lambda_n|<r} \log \left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right) \leq \sum_{n\geq 1} \log \frac{1}{|\lambda_n|}$$

Concernant le sens réciproque,

$$\sum_{n\geq 1} \log \frac{1}{|\lambda_n|} = \sum_{n\geq 1} \liminf_{r\to 1} \log \left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right)$$

Par le lemme de Fatou pour les intégrales (mesure de comptage),

$$\sum_{n\geq 1} \liminf_{r\to 1} \log \left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right) \leq \liminf_{r\to 1} \sum_{n\geq 1} \log \left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right)$$

$$\sum_{|\lambda_n|<r} \log \frac{r}{|\lambda_n|} < 0$$

Donc,

$$\sum_{n\geq 1} \log \frac{1}{|\lambda_n|} \leq \liminf_{r\to 1} \sum_{n\geq 1} \log \left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right)$$

Comme $|\lambda_n| \to 1$, on a que $\log \frac{1}{|\lambda_n|} \sim 1 - |\lambda_n|$, la conclusion en découle.

On remarque que la condition de Blaschke est vérifiée pour toute les fonctions de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ par l'approximation $\log x \leq C_2 x^2$, ce qui nous sera très utile par la suite.

Remarque 4.3. Il est équivalent d'avoir la condition $\liminf_{r\to 1} \int_{\mathbb{T}} \log |f_r|^2 dm < +\infty$ et $\liminf_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$.

Théorème 4.4.1. *(Convergence du produit de Blaschke) Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{D}$ vérifiant la condition de Blaschke. Alors le produit de Blaschke associé à (λ_n)*

$$B(z) = \prod_{n\geq 1} \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n} \frac{\lambda_n - z}{1 - \overline{\lambda_n} z} = \lim_{r\to 1} \prod_{|\lambda_n|<r} \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n} \frac{\lambda_n - z}{1 - \overline{\lambda_n} z}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$.
De plus, $|B| \leq 1$ sur $\mathbb{D}$, $|B| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et les zéros de B sont exactement les λ_n comptés avec leur multiplicité.

<u>*Démonstration :*</u> **[2]**.
Tout d'abord, posons

$$B^r = \prod_{|\lambda_n|<r} \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n} \frac{\lambda_n - z}{1 - \overline{\lambda_n} z}$$

Soit R tel que $0 \leq r < R < 1$. Alors,

$$||B^R - B^r||_2^2 = 2 - 2\mathrm{Re} < B^R, B^r >= 2 - 2\mathrm{Re}\Big(\int_{\mathbb{T}} B^R \overline{B^r} dm\Big) = 2 - 2\mathrm{Re}\Big(\int_{\mathbb{T}} \frac{B^R}{B^r} dm\Big)$$

Comme la partie réelle $\mathrm{Re}\Big(\dfrac{B^R}{B^r}\Big)$ est harmonique, par la propriété de la moyenne :

$$||B^R - B^r||_2^2 = 2 - 2\mathrm{Re}\Big(\int_{\mathbb{T}} \frac{B^R}{B^r} dm\Big) = 2 - 2\mathrm{Re}\Big(\frac{B^R}{B^r}\Big)(0) = 2 - 2 \prod_{r\leq|\lambda_n<R} |\lambda_n|$$

Soit $N \geq 1$,

$$\prod_{n=1}^{N} |\lambda_n| = \exp\big(\sum_{n=1}^{N} \log|\lambda_n|\big)$$

Comme, $\lambda_n \in \mathbb{D}$ et que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) < +\infty$, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \log\frac{1}{|\lambda_n|} < +\infty$ et donc le produit $\displaystyle\prod_{n\geq 1} |\lambda_n|$ converge.
D'où,

$$\forall \epsilon > 0, \exists r \in]0,1[\mid \forall R, \prod_{r\leq|\lambda_n|<R} |\lambda_n| > 1 - \epsilon$$

Ce qui donne,

$$\forall \epsilon > 0, \exists r \in]0,1[\mid \lim_{R\to+\infty} \prod_{r\leq|\lambda_n|<R} |\lambda_n| > 1 - \epsilon$$

Si bien que, la suite $(B^r)_r$ est de Cauchy dans $H^2(\mathbb{T}) \subset L^2$, pour tout $r = r_k \to 1$.
Ainsi, il existe B tel que $B = \lim_{r\to 1} B^r \in H^2(\mathbb{T})$.
De plus, comme $B^{r_k} \to B$ dans L^2 alors $B^{r_{k_n}} \to B$ presque partout.
Or, $|B^{r_{k_n}}| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et donc $|B| = 1$ presque partout. Par

continuité de la fonction d'évaluation en un point sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, on a que la limite $B(\lambda) = \lim\limits_{r\to 1} B^r(\lambda)$ existe uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ et donc pour $\lambda \in \mathbb{D}$, $|B(\lambda)| \leq 1$.
Comme $\dfrac{B}{B^r} \to 1$ dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, par isométrie entre $H^2(\mathbb{T})$ et $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ ce même ratio tend vers 1 sur tout compact de $\mathbb{D}$ quand $r \to 1$.
Ce qui nous donne que $B(\lambda) = 0, |\lambda| < 1$ si et seulement si $\exists n \geq 1 \mid \lambda = \lambda_n$.
CQFD.

Corollaire 4.4.1. *Soit $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ et $(\lambda_n)_n$ la suite des zéros de f. Soit B le produit de Blaschke associé à $(\lambda_n)_n$. Alors, il existe $g \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ avec $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ tel que*

$$f = B.g$$

et,

$$||f||_2 = ||g||_2$$

<u>*Démonstration :*</u> **[2]**.
Prenons pour $r \in]0,1[$

$$B^r = \prod_{|\lambda_n|<r} \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n} \frac{\lambda_n - z}{1 - \overline{\lambda_n} z}$$

Alors, $\dfrac{f}{B^r} \in Hol(\mathbb{D})$ et on a $|B^r(\rho\xi)| \to 1$ uniformément sur $\mathbb{T}$ lorsque $\rho \to 1$.

$$\Big|\Big|\frac{f}{B^r}\Big|\Big|_2^2 = \lim_{\rho\to 1} \Big(\int_{\mathbb{T}} \Big|\frac{f}{B^r}(\rho\xi)\Big|^2 dm\Big)^{\frac{1}{2}} = ||f||_2$$

D'où,

$$\Big(\int_{\mathbb{T}} \Big|\frac{f}{B^r}(\rho\xi)\Big|^2 dm\Big)^{\frac{1}{2}} \leq ||f||_2,\ \forall \rho \in [0,1[\text{ et } r \in]0,1[$$

Fixons ρ et posons $g = \dfrac{f}{B}$. En faisant $r \to 1$, comme $B^r \to B$ uniformément sur le compact $\{|z| < \rho\}$, par ce qui précède, on a :

$$\Big(\int_{\mathbb{T}} \big|g(\rho\xi)\big|^2 dm\Big)^{\frac{1}{2}} \leq ||f||_2$$

Ceci étant vrai pour tout $\rho \in [0,1[$, on a

$$||g||_2 \leq ||f||_2$$

De plus, comme $|B| \leq 1$ dans $\mathbb{D}$

$$\Big(\int_{\mathbb{T}} \big|g(\rho\xi)\big|^2 dm\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \Big(\int_{\mathbb{T}} \big|f(\rho\xi)\big|^2 dm\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, par passage à la limite $\rho \to 1$

$$||f||_2 \leq ||g||_2$$

Si bien que,

$$||g||_2 = ||f||_2$$

Les produits de Blaschke sont donc des fonctions intérieures, et d'après le théorème de Beurling et l'identification entre $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{T})$, on s'aperçoit qu'une catégorie de sous-espaces invariants du shift est

$$\mathcal{M} = B.H^2$$

où B est un produit de Blaschke.
Cela est très naturel : ces sous-espaces sont donc déterminés par les zéros et leur multiplicité. Ainsi, si $f \in \mathcal{M}$ alors f s'annule dans les zéros de B (à l'ordre donnépar les multiplicités dans ces zéros), et multiplier par z (appliquer l'opérateur shift) ne change pas ceci.

Nous allons voir ensuite qu'il y a une autre catégorie de sous-espaces invariants. Ceux définis par des fonctions intérieures singulières.

Tout espace invariant sera donc défini par ces deux catégories.

4.5 Factorisation canonique de Riesz-Smirnov

Le théorème de Riesz-Smirnov est l'aboutissement de tout ce que l'on a fait jusqu'à maintenant. C'est sûrement un des théorèmes les plus importants de la théorie des espaces de Hardy.
Ce théorème est une factorisation des éléments de l'espace de Hardy en 3 facteurs : un produit de Blaschke que l'on connait bien, une fonction intérieure singulière et une fonction extérieure maximale.
Ces deux derniers facteurs sont exprimés à partir d'exponentielle d'intégrale dépendant du noyau holomorphe de Schwarz-Herglotz, dont la partie réelle n'est rien d'autre que le noyau de Poisson que l'on a étudié précédemment.

Les fonctions intérieures singulières sont une classe de fonctions qui ne sont pas des produits de Blaschke et qui sont très utiles pour mieux comprendre les fonctions intérieures, dans le sens qu'elles interviennent dans leur factorisation.
Ce sont des fonctions intérieures qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$.

Définition 4.5.1. (Variations d'une mesure) Soit μ une mesure borélienne (complexe) sur un ensemble E et soit $(E_i)_{i\in I}$ une partition d'ensembles mesurables de E. Alors,

$$\mathrm{Var}(\mu) = \sup_{E=\cup E_i} \sum_{i=1}^{n-1} |\mu(E_i)|$$

Théorème 4.5.1. *$\mathcal{C}(\mathbb{T})^* = \mathcal{M}(\mathbb{T})$, pour $< f, \mu >= \int_{\mathbb{T}} f d\mu$.*

<u>*Démonstration :*</u> Admis. (Voir **[5]**)

Théorème 4.5.2. *(de Herglotz) Soit u une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$, $u \geq 0$.*
Alors, il existe une unique mesure de Borel positive μ telle que $u = P * \mu$.

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2} d\mu(\xi), \quad z \in \mathbb{D}$$

Démonstration : **[2]**.
Soit $z \in \mathbb{D}$, on a $u_r(z) = u(rz)$ pour $0 \leq r < 1$.
Soit

$$\phi_\lambda(z) = \frac{\lambda - z}{1 - \overline{\lambda} z}$$

Observons que u_r est harmonique, donc $u_r = \mathrm{Re} f$ pour une fonction holomorphe f et donc

$$u_r \circ \phi_\lambda = \mathrm{Re}(f \circ \phi_\lambda)$$

est harmonique.
Ainsi, d'après le théorème de la moyenne

$$u_r(z) = (u_r \circ \phi_z)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} (u_r \circ \phi_z)(\xi) |d\xi|$$

On fait le changement de variable $\zeta = \phi_z(\xi)$.
Comme ϕ_z est une involution, on a $\xi =_p hi_z(\zeta)$. De plus lorsque ξ parcourt $\mathbb{T}$, ζ parcourt $\mathbb{T}$.
D'où

$$u_r(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (u_r \circ \phi_z)(\xi) |d\xi| = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} u_r(\zeta) \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} d\zeta = \int_{\mathbb{T}} u_r(\zeta) \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} dm(\zeta)$$

On a donc, en posant $d\mu_r = u_r dm$

$$u_r(z) = \int_{\mathbb{T}} u_r(\zeta) \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_r(\zeta)$$

Alors, μ_r est une mesure positive (car u l'est), et ainsi

$$\mathrm{Var}(\mu_r) = \mu_r(\mathbb{T}) = u_r(0) = u(0) < +\infty$$

Si bien que, la famille $(\mu_r)_{0 \leq r < 1}$ est uniformément bornée dans $\mathcal{M}(\mathbb{T})$.
Donc, par le théorème d'Alaoglu, il existe une sous-suite $(\mu_{r_n})_{n \geq 1}$, avec $r_n \to 1$, convergente faible-* vers $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$.
Ainsi, par le théorème admis ci-dessus, si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $f \geq 0$, alors

$$\int_{\mathbb{T}} f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{T}} f . u_{r_n} dm \geq 0$$

Si bien que, $\mu \geq 0$.
Maintenant, pour tout $z \in \mathbb{D}$ et d'après l'expression trouvé en début de preuve,

$$u(z) = \lim_{n \to +\infty} u(r_n z) = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} d\mu_{r_n}(\xi) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} d\mu(\xi)$$

Passons maintenant à l'unicité de μ,
Soit μ et ν telle que $u = P * \mu = P * \nu$,

$$P * \mu(re^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \hat{\mu}(n) e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \hat{\nu}(n) e^{int}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{\mu}(n) = \hat{\nu}(n)$.
Si bien que $\mu = \nu$. D'où l'unicité.

Théorème 4.5.3. *(Caractérisation des fonctions intérieures singulières) Soit $S \in Hol(\mathbb{D})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(1) $|S(z)| \leq 1$ *et* $|S(z)| \neq 0$ *sur* $\mathbb{D}$, $S(0) > 0$ *et* $|S(\xi)| = 1$ *presque partout sur* $\mathbb{T}$.
(2) *Il existe une unique mesure borélienne* $\mu \geq 0$ *sur* $\mathbb{T}$, *singulière par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée sur* $\mathbb{T}$, *telle que*

$$\forall z \in \mathbb{D},\ S(z) = \exp\Big(\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu\Big)$$

<u>*Démonstration :*</u> **[2]**.
Raisonnons par double implication.
L'implication réciproque est un corollaire du théorème de Fatou. (Théorème 4.3.1)
Voyons ce qu'il en est de l'implication directe.
Posons

$$u = \log\Big|\frac{1}{S}\Big|$$

Comme S est holomorphe et sans zéros dans $\mathbb{D}$, u est harmonique dans $\mathbb{D}$.
Par le théorème d'Herglotz, il existe une unique mesure de Borel positive telle que

$$\log\big|S(z)\big| = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} d\mu(\xi)$$

Maintenant, comme $|S(\xi)| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et donc $u(\xi) = 0$ presque partout, par le théorème de Fatou,

$$\frac{d\mu}{dm}(\xi) = \lim_{r \to 1} u(r\xi) = 0$$

presque partout sur $\mathbb{T}$. Donc, μ et m sont mutuellements singulières.

Définition 4.5.2. (Fonctions intérieures singulières) Une fonction holomorphe sur le disque unité vérifiant (1) ou (2) est appelée fonction intérieure singulière.

Exemple 4.1. Comme on a pu le mentionner dans la sous-partie précédente, la fonction $\theta(z) = \exp\Big(\dfrac{z+1}{z-1}\Big)$ est une fonction intérieure singulière.
En effet, par l'étude de f, on a que :

$$|\Theta(r\xi)| \to \begin{cases} 1, & \xi \neq 1 \\ 0, & \xi = 1 \end{cases}$$

Donc, $|\Theta(z)| \leq 1$ sur tout $\mathbb{D}$ et $|\Theta(z)| \neq 0$ sur $\mathbb{D}$.
De plus, $|\Theta(\xi)| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$.

Nous allons maintenant étudier la dernière classe fonctions. Cependant, avant nous avons besoin de l'inégalité de Jensen-Young pour des fonctions mesurables.

Lemme 4.5.1. *(Inégalité de Jensen-Young mesurable) Soit* (Ω, μ) *un espace mesurable, où* μ *est une mesure finie. Soit* F *une fonction mesurable sur cet espace et* ϕ *une fonction convexe sur un intervalle* I *(fini ou non) de* $\mathbb{R}$ *tel que* $F(\Omega) \subseteq I$*. Alors,*

$$\frac{\int \phi \circ F d\mu}{\int d\mu} \geq \phi\left(\frac{\int F d\mu}{\int d\mu}\right)$$

<u>*Démonstration :*</u> Posons la mesure normalisée $\nu = \dfrac{\mu}{\int d\mu}$. De plus, posons A l'ensemble de toutes les fonctions affines h telles que $h \leq \phi$.
Alors, $h\left(\int F d\nu\right) = \int h \circ F d\nu \leq \int \phi \circ F d\nu$ et comme, par définition de A, $\phi(x) = \sup\{h(x) | h \in A\}$, l'inégalité suit.

Théorème 4.5.4. *(Fonction extérieures de Schwarz-Herglotz) Soit* $f \in L^2$ *telle que* $\log|f| \in L^1$*. On définit :*

$$[f](z) := \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} \log|f(\xi)| dm(\xi)\right)$$

Alors,

1. $[f] \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ *et* $|[f]| = |f|$ *presque partout sur* $\mathbb{T}$*.*
2. *Si* $g \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ *et* $|g| \leq |f|$ *presque partout sur* $\mathbb{T}$*, alors* $|g| \leq |[f]|$ *sur* $\mathbb{D}$*.*
3. $[f \backslash g] = [f] \backslash [g]$*.*

Par définition même de $[f]$ *comme exponentielle, cette fonction ne s'annule pas dans* $\mathbb{D}$ *donc la division est bien possible.*

<u>*Démonstration :*</u> **[2]**.

(1) On a directement que $[f] \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Pour une fonction convexe F et une mesure de Borel finie μ, on a l'inégalité de Jensen-Young :

$$\frac{\int \phi \circ F d\mu}{\int d\mu} \geq \phi\left(\frac{\int F d\mu}{\int d\mu}\right)$$

Appliquons cela à la mesure $d\mu = \dfrac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} dm(\xi)$ (qui est normalisée) :

$$|[f](z)|^2 = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} \log|f(\xi)|^2 dm(\xi)\right) \leq \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|^2 \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} dm(\xi)$$

Maintenant, par le théorème de Fubini et en posant $z = re^{it}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |[f](re^{it})|^2 dt \leq \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} dt\right) dm(\xi) = ||f||_2^2$$

Donc, $[f] \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ De plus, par le théorème de Fatou,

$$\lim_{r \to 1} \log |[f](r\xi)| = \log |f(\xi)|, \text{ presque partout sur } \mathbb{T}$$

D'où le premier résultat.

(2) Par l'inégalité de Jensen généralisée,

$$\log |g(z)| = \log \left| \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|z-\xi|^2} g(\xi) dm(\xi) \right| \leq \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2} \log |g(\xi)| dm(\xi)$$

D'où

$$\log |g(z)| \leq \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2} \log |g(\xi)| dm(\xi) \leq \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2} \log |f(\xi)| dm(\xi) = \log |[f](z)|$$

(3) Directement conséquence de la définition et des propriétés du log et de l'exponentielle.

Nous avons à présent tous les outils nécessaires pour énoncer la décomposition que nous cherchons à créer depuis le début de ce rapport :

Théorème 4.5.5. *(Factorisation canonique de Riesz-Smirnov) Soit $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. Alors, il existe une unique factorisation*

$$f = \lambda B S [f]$$

où, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| = 1$, B est le produit de Blaschke associé aux zéros de la fonction f, S est une fonction intérieure singulière et $[f]$ est une fonction telle que décrite dans le théorème précédent.

Démonstration : **[2]**.

Posons $g = \dfrac{f}{B}$, alors $|f| = |g|$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et $[g] = [f]$.
Maintenant, posons $c = \dfrac{g(0)}{[g](0)}$ et $\lambda = \dfrac{c}{|c|}$.
Posons ainsi $S = \dfrac{|c| g}{c[g]} = \dfrac{1}{\lambda} \dfrac{g}{[g]}$.
Montrons que S est bien singulière.
Clairement $|S| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$. On observe de plus que g n'a pas de zéros dans $\mathbb{D}$. Donc, comme $|g| \leq |[g]|$ par le théorème précédent, on a $|S| \leq 1$ dans $\mathbb{D}$. Ce qui prouve que S est bien singulière par caractérisation.
Alors, $f = gB = \lambda B S [g]$. On a donc prouvé l'existence d'une telle factorisation.
En ce qui concerne l'existence, elle est immédiate car B et $[f]$ sont définies de manière unique par rapport à f. Ainsi, le caractère unique de la factorisation en découle.

Exemple 4.2. On reprend la fonction $f(z) = \exp\left(-\dfrac{1+z}{1-z}\right)$. Alors, $B = 1$ et donc $g = f$ ($|g| = |f| = 1$ sur $\mathbb{T} \backslash \{1\}\}$), puis, $[g] = \exp\left(\displaystyle\int \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log |g| dm(\zeta)\right) = 1$ car $\log |g| = 0$. Puis, $c = \dfrac{g(0)}{[g(0)]} = \dfrac{1}{e} < 1$. D'où, $\lambda = 1$ et $S = g$. On a la factorisation.

5 Annexes

Cette section se différenciera des autres dans le sens où nous n'allons pas tout prouver, mais plutôt donner des idées de développements et d'applications. Nous allons donc, en quelque sorte, énoncer des résultats.

L'objectif de cette section sera de donner un exemple important d'un sous-espace invariant de l'opérateur shift - ou plutôt de son adjoint - que l'on rencontre en théorie du signal. Notons que nous avons déjà discuté les sous-espaces invariants donnés par un produit de Blaschke. Ici on considérera le cas d'une fonction intérieure singulière (mais donc plutôt pour un sous-espace invariant de l'adjoint du shift).

5.1 Passage au demi-plan-supérieur

Ici, nous allons survoler l'idée que nous avons énoncé en introduction. Dans tout le rapport nous avons travaillé sur l'espace de Hardy du disque unité $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, mais la question se pose sur le transfert au demi-plan supérieur $\mathbb{C}^+$.
On se restreindra au résultat important, c'est-à-dire l'isométrie permettant de passer de l'espace de Hardy du disque à celui du demi-plan supérieur.

On réintroduit l'expression de la transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{F}f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixz} dx$$

et,

$$\mathcal{F}^{-1}f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ixz} dx$$

Ce sont des isométries de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, ce sont les limites quand $s \to +\infty$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ des transformées $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-s}^{s} f(x) e^{-ixz} dx$.
On introduit maintenant les applications suivantes :

$$\begin{array}{rcccc} \gamma & : & \mathbb{D} & \to & \mathbb{C}^+ \\ & & z & \mapsto & i\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \gamma^{-1} & : & \mathbb{C}^+ & \to & \mathbb{D} \\ & & s & \mapsto & \dfrac{s-i}{s+i} \end{array}$$

Ainsi que,

$$\begin{array}{rcccc} U_2 & : & \mathrm{L}^2(\mathbb{T}) & \to & \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \\ & & f & \mapsto & \big(s \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\pi}(s+i)} f \circ \gamma^{-1}(s)\big) \end{array}$$

Comme H^2 est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{T})$, l'image $U_2 H^2$ est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$.

On obtient, en s'intéressant à cette image, une version du fameux théorème de Paley-Wiener :

Théorème 5.1.1. $U_2 H^2 = \mathcal{F}^{-1} L^2_+$

Où $L^2_+ \subseteq L^2(\mathbb{R})$ est le sous-espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ nulle presque partout sur la demi-droite réelle négative.

Le but de cette manoeuvre est de passer à $H^2(\mathbb{C}^+)$, donc on va tenter d'indentifier $U_2 H^2$ avec l'espace des valeurs aux bords d'un sous-espace de $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}^+)$.

En effet, on remarque que si $f \in H^2$, alors

$$U_2 f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(z+i)} f \circ \gamma^{-1}(z), \quad Im(z) > 0$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^+$. De plus, γ^{-1} transforme localement un angle de Stolz de $\mathbb{C}^+$, c'est-à-dire $\{z = x + iy \mid |x - r| < Cy\}$, en un angle de Stolz de $\mathbb{D}$.
Ainsi, par le théorème de Fatou, $U_2 f$ admet une limite non-tangentielle presque partout sur $\mathbb{R}$ et $b(U_2 f) = U_2(bf)$.

On définit l'espace de Hardy du demi-plan supérieur comme suit :

$$H^2(\mathbb{C}^+) = H^2_+ = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^+) \;\middle|\; ||f||_{H^2_+} = \big(\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx \big)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}$$

Théorème 5.1.2. *L'application U_2 est une isométrie surjective de H^2 dans H^2_+.*
Son inverse est donné par

$$\begin{array}{cccc} U_2^{-1} & : & H^2_+ & \to & H^2 \\ & & f & \mapsto & \big(z \mapsto \frac{2i\sqrt{\pi}}{1-z} f \circ \gamma(z) \big) \end{array}$$

Théorème 5.1.3. *(de Payley-Wiener)* $H^2_+ = \mathcal{F}^{-1} L^2_+$.

5.2 Une application : Espaces de Paley-Wiener

Un célèbre théorème de Paley-Wiener statue que les transformées de Fourier de $f \in L^2([-\pi, \pi])$ sont analytiques. L'espace ainsi obtenu est appelé, logiquement, espace de Paley-Wiener.
L'intérêt des fonctions de cet espace est qu'elles peuvent être interprétée comme des signaux (un son stationnaire audible pour l'oreille humaine - donc le spectre borné - peut par exemple être modélisé comme une fonction de l'espace de Paley-Wiener). Ainsi, leur transformée de Fourier (inverse, dans $L^2([-\pi, \pi])$) est le spectre correspondant à ce signal.
On peut noter que plus généralement, on peut remplacer l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par un intervalle compact correspondant au spectre des fréquences audibles.

Considérons maintenant l'espace $L^2([-\pi, \pi])$ l'espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$.
On a, par Fourier-Plancherel :

$$\mathcal{F} \;:\; L^2(\mathbb{R}) \;\to\; L^2(\mathbb{R})$$

Si on se retreint à l'invervalle $[-\pi,\pi]$, on obtient toujours une isométrie :

$$\mathcal{F} \ : \ L^2([-\pi,\pi]) \ \rightarrow \ L^2(\mathbb{R})$$

Théorème 5.2.1. *(de Paley-Wiener)*

$$\mathcal{F}L^2([-\pi,\pi]) = PW_\pi = \left\{ f \in Hol(\mathbb{C}) \ \middle| \ f \textit{ de type exponentiel } \pi, \textit{ et } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

L'espace PW_π est l'espace de Paley-Wiener, auquel on joint la norme $||f||_{PW_\pi} = ||f||_{L^2(\mathbb{R})}$. Dans la définition de cet espace, on parle de fonction de type exponentielle. Une fonction entière est dite de type exponentiel a si elle croit "essentiellement" au maximum comme $e^{a|z|}$ (son logarithme est dominé par $|a|z)$.

Définition 5.2.1. (Fonction de type exponentiel) Soit f une fonction entière. On pose $M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ et on suppose qu'il existe une constante σ telle que :

$$M_f(r) \leq e^{\sigma r}$$

Ainsi, on dit que la fonction f est de type exponentielle si :

$$0 < \sigma_f := \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log M_f(r)}{r} < +\infty$$

De plus, le type de cette fonction est σ_f.

On a beaucoup d'informations sur les espaces L^2, on peut donc récolter beaucoup d'informations sur les espaces de Paley-Wiener.
Par exemple, on sait que $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $L^2([-\pi,\pi])$, comment passer à l'espace de Paley-Wiener PW_π ?

Soit $\chi_{[-\pi,\pi]}$ la fonction caractéristique de $[-\pi,\pi]$,

$$\mathcal{F}(e^{int}\chi_{[-\pi,\pi]})(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-izx} dx = \frac{e^{i(n-z)\pi} - e^{-i(n-z)\pi}}{i\sqrt{2\pi}(n-z)} = \sqrt{2\pi}\text{sinc}(\pi(n-z))$$

Posons $k_n := \mathcal{F}(e^{int}\chi_{[-\pi,\pi]})$ et $F = \mathcal{F}f \in PW_\pi$. Alors,

$$< F, k_n >_{L^2(\mathbb{R})} = < f, e^{int}\chi_{[-\pi,\pi]} >_{L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{F}f(n) = F(n)$$

Ainsi, (k_n) est le noyau reproduisant de PW_π et comme (e^{int}) est une base orthonormale, (k_n) est aussi une base orthonormale mais de PW_π.

Ainsi, pour $F \in PW_\pi$:

$$||F||^2_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} | < F, k_n >_{L^2(\mathbb{R})} |^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |F(n)|^2$$

En particulier, toute fonction $f \in PW_\pi$ est uniquement déterminée par ses valeurs sur $\mathbb{Z}$ et on peut reconstruire :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) k_n(z)$$

Quel rapport avec les espaces de Hardy ? Pour établir ce lien, il faut parler d'espaces modèles.

Définition 5.2.2. (Espaces modèles) Soit Θ une fonction intérieure. On définit le complémentaire orthogonal de ΘH^2 comme étant l'espace modèle :

$$K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2 = H^2 \cap (\Theta H^2)^\perp$$

Si dans un espace de Hilbert un espace est invariant pour un opérateur borné, alors son orthogonal est invariant pour l'opérateur adjoint.

Ce sont donc les archétypes de sous-espaces invariants par l'adjoint de l'opérateur shift, que l'on a vu en première partie de ce rapport.

On sait de plus que les fonctions intérieures se factorisent en un produit :

$$\Theta = B_\Lambda S_\mu$$

où, B_Λ est le produit de Blaschke associé aux zéros de Θ et S_μ est une fonction intérieure singulière. C'est-à-dire, pour une mesure positive μ singulière par rapport à la mesure de Lebesgue m et définit sur $\mathbb{T}$, on pose :

$$S_\mu(z) = \exp\left(- \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

Ainsi, en prenant $d\mu = a\delta_1$ où δ_1 est la mesure de Dirac en 1, alors :

$$S_\mu(z) = e^{-a\frac{1+z}{1-z}}, \quad z \in \mathbb{D}$$

L'espace modèle correspondant est isométriquement isomorphe à l'espace de Paley-Wiener $PW_{a/2}$.

Si bien que, en prenant $a = 2\pi$, $B_\Lambda = 1$ et, $\Theta(z) = e^{-2\pi\frac{1+z}{1-z}}$ pour $z \in \mathbb{D}$. On a donc :

Théorème 5.2.2. *(Lien Hardy - PW) Soit $z \in \mathbb{D}$ et $\Theta(z) = e^{-2\pi\frac{1+z}{1-z}}$, alors :*

$$PW_\pi \cong K_\Theta$$

Références bibliographiques

[1] Eric Amar et Etienne Matheron, *Analyse Complexe*. Mathematics subject classification (2000). Cassini, Paris, 2004.

[2] Nikolai K. Nikolski, *Operators, functions and systems : An easy reading, Vol. 1 : Hardy, Hankel, and Toeplitz*. Mathematical surveys and monographs, Volume 92. American Mathematical Society (AMS).

[3] Nikolai K. Nikolski, *Operators, functions and systems : An easy reading, Vol. 2 : Model operator and System*. Mathematical surveys and monographs, Volume 93. American Mathematical Society (AMS).

[4] John B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*. Revisited first edition. Pure and Applied Mathematics, 96. New-York London 1981. Springer.

[5] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New-York, 1987.