

Justification de
la solution
approchée de
l'équation linéaire

Axel Mauroy et
Killian Le
Milbeau

Lemmes
préliminaires

Lemme de Grönwall
Lemme d'estimation

Analyse de
l'équation linéaire
- Suite

Rappels

Justification à l'ordre
1 en norme L^2/L^∞

Justification à l'ordre
 k en norme L^2/L^∞

Justification de la solution approchée de l'équation linéaire

Axel Mauroy et Killian Le Milbeau

ENS Rennes

29/11/2023

Table des matières

Justification de
la solution
approchée de
l'équation linéaire

Axel Mauroy et
Killian Le
Milbeau

Lemmes
préliminaires

Lemme de Grönwall
Lemme d'estimation

Analyse de
l'équation linéaire
- Suite

Rappels

Justification à l'ordre
1 en norme L^2/L^∞

Justification à l'ordre
 k en norme L^2/L^∞

1 Lemmes préliminaires

- Lemme de Grönwall
- Lemme d'estimation

2 Analyse de l'équation linéaire - Suite

- Rappels
- Justification à l'ordre 1 en norme L^2/L^∞
- Justification à l'ordre k en norme L^2/L^∞

Lemmes préliminaires - Grönwall

Justification de
la solution
approchée de
l'équation linéaire

Axel Mauroy et
Killian Le
Milbeau

Lemmes
préliminaires

Lemme de Grönwall
Lemme d'estimation

Analyse de
l'équation linéaire
- Suite

Rappels

Justification à l'ordre
1 en norme L^2/L^∞

Justification à l'ordre
 k en norme L^2/L^∞

Lemme (de Gronwall)

Soient $u, a, b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues telles que

$$\forall t \in [0, T], u(t) \leq u(0) + \int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau + \int_0^t b(\tau)d\tau$$

Alors en posant $A(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$, on a

$$\forall t \in [0, T], u(t) \leq u(0)e^{A(t)} + \int_0^t b(s)e^{A(t)-A(s)}ds$$

Lemmes préliminaires - Grönwall

Justification de
la solution
approchée de
l'équation linéaire

Axel Mauroy et
Killian Le
Milbeau

Lemmes
préliminaires

Lemme de Grönwall

Lemme d'estimation

Analyse de
l'équation linéaire
- Suite

Rappels

Justification à l'ordre
1 en norme L^2/L^∞

Justification à l'ordre
 k en norme L^2/L^∞

Lemme (Argument de continuité)

Soient $u, b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues telles que

$$\forall t \in [0, T], u(t) \leq u(0) + \int_0^t f(u(\tau))u(\tau)d\tau + \int_0^t b(\tau)d\tau$$

Alors en posant $M = \sup_{v \in [0, 2\pi u(0)]} f(v)$,

$$\exists \underline{t} \in]0, T] \mid \forall t \in [0, \underline{t}], u(t) \leq u(0)e^{Mt} + \int_0^t b(s)e^{M(t-s)}ds$$

Lemmes préliminaires - Énergie

Justification de
la solution
approchée de
l'équation linéaire

Axel Mauroy et
Killian Le
Milbeau

Lemmes
préliminaires

Lemme de Grönwall

Lemme d'estimation

Analyse de
l'équation linéaire
- Suite

Rappels

Justification à l'ordre
1 en norme L^2/L^∞

Justification à l'ordre
 k en norme L^2/L^∞

Lemme (Estimation de l'énergie de base)

Pour $\epsilon > 0$ et u^ϵ solution de

$$i\epsilon \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \frac{\epsilon^2}{2} \Delta u^\epsilon = F^\epsilon u^\epsilon + R^\epsilon; \quad u^\epsilon|_{t=0} = u_0^\epsilon$$

Supposons que $F^\epsilon = F^\epsilon(t, x)$ est à valeurs réelles.

Soit I un intervalle temporel contenant 0. Alors on a

$$\sup_{t \in I} \|u^\epsilon\|_{L^2} \leq \|u_0^\epsilon\|_{L^2} + \frac{1}{\epsilon} \int_I \|R^\epsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau$$

Analyse de l'équation linéaire - Suite

Justification de
la solution
approchée de
l'équation linéaire

Axel Mauroy et
Killian Le
Milbeau

Lemmes
préliminaires

Lemme de Grönwall
Lemme d'estimation

Analyse de
l'équation linéaire
- Suite

Rappels

Justification à l'ordre
1 en norme L^2/L^∞

Justification à l'ordre
 k en norme L^2/L^∞

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = Vu^\varepsilon$$

$$\partial_t \phi_{\text{eik}} + \frac{1}{2}|\nabla \phi_{\text{eik}}|^2 + V = 0 \quad (\text{eikonal})$$

$$v_1^\varepsilon(t) = a(t, x) e^{\frac{i}{\varepsilon} \phi_{\text{eik}}(x, t)}$$

$$\partial_t a + \nabla \phi_{\text{eik}} \cdot \nabla a + \frac{1}{2} a \Delta \phi_{\text{eik}} = 0 \quad (\text{transport})$$

Théorème (d'inclusion continue de Sobolev)

Notons $\mathcal{C}_{\rightarrow 0}^k(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R}^d qui tendent vers 0 à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre $\leq k$. Alors, si $s > \frac{d}{2} + k$,

$$H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{C}_{\rightarrow 0}^k(\mathbb{R}^d)$$

Ainsi sous ces conditions, $H^s(\mathbb{R}^d) \subseteq L^\infty$.

Analyse de l'équation linéaire - Suite

Justification de
la solution
approchée de
l'équation linéaire

Axel Mauroy et
Killian Le
Milbeau

Lemmes
préliminaires

Lemme de Grönwall
Lemme d'estimation

Analyse de
l'équation linéaire
- Suite

Rappels

Justification à l'ordre
1 en norme L^2/L^∞

Justification à l'ordre
 k en norme L^2/L^∞

Rappels du dernier exposé :

Proposition (Hypothèse géométrique)

Dès que $|\alpha| \geq 2$,

$$V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \text{ et } \partial_x^\alpha V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^d))$$

$$\phi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ et } \partial^\alpha \phi_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Proposition (Existence)

Sous ces hypothèses, il existe $T > 0$ et une unique solution $\phi_{eik} \in \mathcal{C}([-T, T], \mathbb{R}^d)$ à l'équation eikonal permettant d'annuler le terme en ϵ^0 .

De plus, dès que $|\alpha| \geq 2$, $\partial_x^\alpha \phi_{eik} \in L^\infty([-T, T] \times \mathbb{R}^d)$.

Analyse de l'équation linéaire - Suite

Justification de
la solution
approchée de
l'équation linéaire

Axel Mauroy et
Killian Le
Milbeau

Lemmes
préliminaires

Lemme de Grönwall
Lemme d'estimation

Analyse de
l'équation linéaire
- Suite

Rappels

Justification à l'ordre
1 en norme L^2/L^∞

Justification à l'ordre
 k en norme L^2/L^∞

Proposition (Justification à l'ordre 1 en norme L^2/L^∞)

Soit $s \geq 2$ et $a_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Supposons que l'on soit sous l'hypothèse géométrique.

Supposons aussi que pour un certain $\beta > 0$

$$\|a_0^\varepsilon - a_0\|_{H^{s-2}} = \mathcal{O}(\varepsilon^\beta)$$

Alors, il existe $C > 0$ indépendante de $\varepsilon \in]0, 1]$ telle que

$$\sup_{t \in [-T, T]} \|u^\varepsilon(t) - v_1^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{\min(1, \beta)}$$

où T est donné par la proposition d'existence précédente.

De plus, si $s > \frac{d}{2} + 2$, alors

$$\sup_{t \in [-T, T]} \|u^\varepsilon(t) - v_1^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq C\varepsilon^{\min(1, \beta)}$$

Analyse de l'équation linéaire - Suite

Justification de
la solution
approchée de
l'équation linéaire

Axel Mauroy et
Killian Le
Milbeau

Lemmes
préliminaires

Lemme de Grönwall
Lemme d'estimation

Analyse de
l'équation linéaire
- Suite

Rappels

Justification à l'ordre
1 en norme L^2/L^∞

Justification à l'ordre
 k en norme L^2/L^∞

$$\partial_t a^\varepsilon + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \phi_{eik} = i \frac{\varepsilon}{2} \Delta a^\varepsilon$$

$$\partial_t r^\varepsilon + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla r^\varepsilon + \frac{1}{2} r^\varepsilon \Delta \phi_{eik} = i \frac{\varepsilon}{2} \Delta r^\varepsilon + i \frac{\varepsilon}{2} \Delta a$$

Analyse de l'équation linéaire - Suite

Justification de
la solution
approchée de
l'équation linéaire

Axel Mauroy et
Killian Le
Milbeau

Lemmes
préliminaires

Lemme de Grönwall
Lemme d'estimation

Analyse de
l'équation linéaire
- Suite

Rappels

Justification à l'ordre
1 en norme L^2/L^∞

Justification à l'ordre
k en norme L^2/L^∞

Exemple

$$a(t, x) = \left(\frac{T_c}{T_c - t} \right)^{\frac{n}{2}} a_0 \left(\frac{T_c}{T_c - t} x \right)$$

$$\phi_0(x) = -\frac{|x|^2}{2T_c} - \frac{1}{2T_c}, \quad V(x) = 0$$

Exemple

$$a(t, x) = \prod_{j=1}^d \left(\frac{1}{\cos(\omega_j t)} \right)^{\frac{1}{2}} a_0 \left(\frac{x_1}{\cos(\omega_1 t)}, \dots, \frac{x_n}{\cos(\omega_n t)} \right)$$

$$\phi_0(x) = 0, \quad V(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \omega_j^2 x_j^2$$

Analyse de l'équation linéaire - Suite

Justification de
la solution
approchée de
l'équation linéaire

Axel Mauroy et
Killian Le
Milbeau

Lemmes
préliminaires

Lemme de Grönwall

Lemme d'estimation

Analyse de
l'équation linéaire
- Suite

Rappels

Justification à l'ordre
1 en norme L^2/L^∞

Justification à l'ordre
 k en norme L^2/L^∞

Exemple

Soit $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$, on suppose $V(x) = 0$ et $\phi_0(x) = \xi_0 \cdot x$

$$a(t, x) = a_0(x - \xi_0 t)$$

Analyse de l'équation linéaire - Suite

Justification de
la solution
approchée de
l'équation linéaire

Axel Mauroy et
Killian Le
Milbeau

Lemmes
préliminaires

Lemme de Grönwall
Lemme d'estimation

Analyse de
l'équation linéaire
- Suite

Rappels

Justification à l'ordre
1 en norme L^2/L^∞

Justification à l'ordre
 k en norme L^2/L^∞

Proposition (Justification à l'ordre k en norme L^2/L^∞)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $s > 2k + 2$. Soit $a_j \in H^{s-2j}(\mathbb{R}^d)$ et supposons être sous l'hypothèse géométrique. Supposons aussi que pour un certain $\beta > 0$

$$\|a_0^\varepsilon - a_0 - \varepsilon a_1 - \dots - \varepsilon^k a_k\|_{H^{s-2k-2}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{k+\beta})$$

Alors on peut trouver $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ avec

$$a^{(j)} \in \mathcal{C}([-T, T], H^{s-2j})$$

tels que si on pose

$$v_{k+1}^\varepsilon = (a + \varepsilon a^{(1)} + \dots + \varepsilon^k a^{(k)}) e^{\frac{i}{\varepsilon} \phi_{eik}}$$

il existe $C > 0$ indépendante de $\varepsilon \in]0, 1]$ telle que

$$\sup_{t \in [-T, T]} \|(u^\varepsilon(t) - v_{k+1}^\varepsilon(t)) e^{-\frac{i}{\varepsilon} \phi_{eik}}\|_{H^{s-2k-2}} \leq C \varepsilon^{\min(k+1, k+\beta)}$$