

Oraux d'Algèbre du Magistère de Mathématiques de Rennes

Killian Le Milbeau

22 février 2024

Disclaimer. Ce PDF est ammené à changer au cours du temps. En effet, je prend les énoncés sur le site BEOS et aussi ceux qu'on me donne lorsque je discute avec des camarades. Donc je vais surement le mettre à jour tous les ans.

Il y aura 4 documents de la sorte :

1. Oraux d'Algèbre du Magistère de Mathématiques de Rennes
2. Oraux d'Analyse du Magistère de Mathématiques de Rennes
3. Corrigé des oraux d'Algèbre
4. Corrigé des oraux d'Analyse

J'ai fais ce choix pour que vous puissiez travailler les exercices sans zyeuter ma correction. Certains exercices sont difficiles. J'ai parfois passer un jour entier pour trouver la solution. Si jamais vous avez un exercice comme ça, on attend pas de vous que vous détruisez l'exercice en 20 minutes top chrono. On attend de vous que vous montriez que vous savez raisonner. C'est toute la fourberie et en même temps toute la cohérence de ce genre d'épreuve : vous ne savez pas si l'exercice que vous êtes en train de faire est dur pour vous ou dur tout court. C'est pour ça qu'il faut que vous exposiez vos pistes de recherche. Les examinateurs sont bienveillants, alors ne vous inquiétez pas, ça va bien se passer.

Biensûr, si vous trouvez une erreur je vous demande de me le dire par mail : killian.le-milbeau@ens-rennes.fr . De même si vous ne comprenez pas une correction, ou juste une étape. Parfois de choses sont évidentes pour une personne et pas pour une autre, c'est propre à la façon dont on raisonne et à notre vision de la mathématique. (Et oui, pour ceux qui ne savent pas, on dit LA mathématique, voilà je le dis parce que moi je ne le savais pas pendant longtemps mdr).

Vous allez voir que je note les exercices "Exercice *année*. *numéro de l'exo dans la rubrique de l'année*". Comme ça vous allez vous y retrouver facilement dans les corrections. Parfois j'ai rajouté un "(C)" quand l'exercice est, à mon sens, classique.

P.S.1 : Je n'avais pas beaucoup d'exercices de 2013 à 2016. Ensuite par contre vous allez avoir de quoi faire. Certains exercices sont tombés sur plusieurs années, donc tous les exercices ici sont susceptibles d'arriver sous vos yeux le jour J.

P.S.2 : Il y a certains exercices que je n'ai pas corrigés. Si vous vous dites que je suis un flemmard, sachez que c'est exactement le cas. Je le ferais plus tard, quand j'aurais un peu moins la flemme. Ensuite, je pense avoir corrigé un nombre suffisant d'exercices. Si vous avez fait un exercice que je n'ai pas corrigé, sachez aussi que si vous me l'envoyez, il y a 99 pourcent de chances que je sois la personne que vous ayez rendu la plus heureuse dans votre vie.

Les exercices à la fin ne constitue pas une liste exhaustive d'exercices à savoir faire.

TABLE DES MATIÈRES

1 Oraux de 2013	3
2 Oraux de 2015	4
3 Oraux de 2016	5
4 Oraux de 2017	6
5 Oraux de 2018	8
6 Oraux de 2019	10
7 Oraux de 2020	12
8 Oraux de 2021	13
9 Oraux de 2022	14
10 Exercices de ma sélection	15

CHAPITRE 1

ORAUX DE 2013

Exercice 2013.1 :

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de matrices diagonales ?

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Désolé, mais je n'en ai pas d'autres pour l'année 2013 et je n'ai rien pour l'année 2014...

CHAPITRE 2

ORAUX DE 2015

Exercice 2015.1 :(**)

On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall n \geq 1, (f(u))_n = \frac{\sum_{k=1}^n k \cdot u_k}{n^2}$.
Trouver les valeurs propres de f .

Exercice 2015.2 :(*) (C)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables, ie, qu'il existe une base de trigonalisation commune à A et B .

Exercice 2015.3 :(**) (C)

Posons $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui, à une fonction $u \in E$ associe $f(u)$ telle que, $f(u) : x \mapsto \int_0^1 \min(x, t)u(t)dt$. Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres de f ?
Redémontrer la démonstration du théorème suivant : Toutes matrices de $M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire.

Exercice 2015.4 : Déterminant de Gram (**) (C)

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^p)^n$ (en gros, on a n vecteurs colonnes de tailles p).

On note $G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{(i,j) \in [1; n]^2}$.

1) Montrer que $rg(G(x_1, \dots, x_n)) = rg(x_1, \dots, x_n)$.

2) Si $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $x \in \mathbb{R}^p$, montrer que : $d(x, F)^2 = \frac{\det(G(x_1, \dots, x_n, x))}{\det(G(x_1, \dots, x_n))}$.

($G(x_1, \dots, x_n, x)$ est bien une matrice carrée, mais de taille $(n+1) \times (n+1)$, on peut prendre son déterminant).

Pour plus d'informations sur ce déterminant, voir Maths A 2022 MP.

CHAPITRE 3

ORAUX DE 2016

Exercice 2016.1 :(**)(Cours)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si, tout espace stable par A admet un supplémentaire stable par A .

Exercice 2016.1 :(***)

Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices nilpotentes qui commutent deux à deux entre elles. Montrer que $A_1 \times \dots \times A_n = 0$.

C'est l'exercice que j'ai eu en premier à l'oral d'Algèbre.

CHAPITRE 4

ORAUX DE 2017

Exercice 2017.1 :(***)

Montrer que l'ensemble des matrices carrées de trace nulle est égal à celui engendré par les matrices nilpotentes.

Exercice 2017.2 : Crochet de Lie (*)

On considère A, B deux matrices telles que $AB - BA = A$.

- 1) Calculer $A^n B - BA^n$ pour $n \geq 1$.
- 2) Montrer que, A est nilpotente.

Pour information, la quantité introduite dans l'énoncé est appelé crochet de Lie des matrices A et B , et se note $[A; B] = AB - BA$. On peut montrer que c'est une loi de composition interne.

Exercice 2017.3 :(*)

Déterminer l'ordre maximal d'une permutation de \mathcal{S}_{10} .

Exercice 2017.4 :(**)

Soit $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} un corps et $M \in \mathcal{M}_n(K)$. On suppose que, $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M^2) = \dots = \text{Tr}(M^n) = 0$. Montrer que, $M^n = 0$.

Exercice 2017.5 :(**)

Soit $P \in K[X]$. Montrer que $P - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 2017.6 :(**)

Résoudre l'équation matricielle $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2017.7 :(*)

Montrer que le polynôme $P = X^5 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irrationnelle.

Exercice 2017.8 :(**)

Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 3\}$

- 1) Décrire géométriquement X .
- 2) Démontrer que $X \cap \mathbb{Q}^2 = \emptyset$. On pourra étudier les solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$.

Exercice 2017.9 :(*)

On prend $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ où p est un nombre premier. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que :
 M est diagonalisable $\iff M^p = M$.

Exercice 2017.10 : Nombre de Fermat (**)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 2^k + 1$ soit premier. On note r l'ordre de la classe de 2 dans \mathbb{F}_p .

- 1) Montrer que $r > k$.
- 2) Montrer que r divise $2k$.
- 3) Montrer que r est une puissance de 2.

Exercice 2017.11 :(***)

On pose $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\phi : f \mapsto [g : t \mapsto f'(t) + tf(t)]$.

- 1) Quelles sont les valeurs propres de ϕ ?
- 2) Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres de $\phi \circ \phi$?
- 3) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0$.

CHAPITRE 5

ORAUX DE 2018

Exercice 2018.1 : Une histoire de poids.. (***)

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et p premier. Soit $\Pi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mapsto (a_{i,j}[p])$ le morphisme de réduction modulo p . Montrer que $\text{rg}(M) \geq \text{rg}(\Pi(M))$.
- 2) Soient $x_1, \dots, x_{2n+1} \in \mathbb{R}$ tels que, si on en enlève un quelconque, on peut former avec les $2n$ restants deux groupes de n nombres tels que leur somme soient égales. Montrer alors que tous les x_i sont égaux. *Ce problème connaît de nombreuses formulations, par exemple on peut le formuler avec des vaches de poids x_i (voir sur Internet ou dans les Cassinis).*

Exercice 2018.2 : Opérateur Shift (**)

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- 1) On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| < 1$ et $u_{n+1} - \alpha u_n \rightarrow 0$. Montrer que, $u_n \rightarrow 0$.
- 2) On considère $\sigma : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d . Exprimer $[P(\sigma)(u)]_n$ en fonction des u_k .
- 3) Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a l'équivalence suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, (P(\lambda) = 0 \Rightarrow |\lambda| < 1) \iff \forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, ([P(\sigma)(u)]_n \rightarrow 0 \Rightarrow u_n \rightarrow 0)$$

Exercice 2018.3 : (*)

Soit G un groupe. Montrer que :

$$G \text{ est fini} \iff G \text{ possède un nombre fini de sous-groupes}$$

C'était mn deuxième exercice d'oral!

On peut aussi l'écrire comme ça : Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

Exercice 2018.4 : (***)

Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^p \rightarrow 0$.

Ici normalement, on a très envie d'utiliser la réduction de Jordan sur M mais ce n'est pas au programme de prépa. Si vous l'utilisez, il faudra le démontrer et je ne le vous conseil pas en 20 minutes.

Exercice 2018.5 : Indicatrice d'Euler (**)

- 1) Soient $n_1, \dots, n_k \geq 2$ des entiers deux à deux distincts. Montrer que, $\prod_{i=1}^k (1 - \frac{1}{n_i}) \geq \frac{1}{k+1}$.
- 2) Montrer que, $\phi(n) \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(n) + \ln(2)}$.

Exercice 2018.6 :(**)

Soit E un espace euclidien. Déterminer les endomorphismes $u \in E$ vérifiant que, pour tout sous-espace vectoriel F de E , $u(F^\perp) \subseteq (u(F))^\perp$.

CHAPITRE 6

ORAUX DE 2019

*Exercice 2019.1 : (***)*

Soit $I =]a, b[\subset \mathbf{R}$, et w une fonction de I dans \mathbf{R}_+^* vérifiant $\forall n \in \mathbf{N} \int_I |x^n| w(x) dx < +\infty$. Pour P, Q dans $\mathbf{R}[X]$ on définit le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_I P(x)Q(x)w(x)dx$.

- 1) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}[X]$ échelonnée en degré.
- 2) Pour n dans \mathbf{N} , montrer qu'un peut trouver une suite $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ (éventuellement vide) telle que P_n soit de signe constant sur les intervalles $]a, \alpha_1], [\alpha_1, \alpha_2], \dots, [\alpha_k, b[$ et change de signe entre deux intervalles consécutifs.
- 3) Soit $Q = \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)$. En supposant $k < n$, calculer $\langle P_n, Q \rangle$. En conclure que P_n est simplement scindé sur I .

Exercice 2019.2 : ()*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- 1) Montrer que le rang vérifie l'inégalité triangulaire.
- 2) Soit u, v dans $\mathcal{L}(E)$, tels que $u+v$ appartienne à $\text{GL}(E)$ et $u \circ v = 0$. Montrer $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = \text{rg}(u+v)$, et $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v)$.

*Exercice 2019.3 : (**)*

On s'intéresse à l'équation $X^2 + X + I = A$, avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ fixée. La résoudre.

On pourra d'abord s'intéresser aux cas particuliers suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

*Exercice 2019.4 : (**)*

Soient n un entier naturel, $A \in \mathbb{R}[X]$ quelconque, $B \in \mathbb{R}[X]$ de degré $(n+1)$ scindé à racines simples tels que $\text{pgcd}(A, B) = 1$. Soit $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe le reste de la division euclidienne de AP par B .

- 1) Montrer que Φ est linéaire.

2) Étudier la diagonalisabilité de Φ .

Exercice 2019.5 :(**)

Soit k un corps de cardinal infini et E un k -espace vectoriel de dimension finie. On considère $P_1, \dots, P_d \in k[X]$, $v_1, \dots, v_d \in E$. On pose $f(t) = \sum_{i=1}^d P_i(t)v_i$ pour $t \in k$.

1) Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E . Montrer que : $\forall t \in k, f(t) \in F$ ou bien il existe $X \subset k$ un ensemble fini tel que $\forall t \in k \setminus X, f(t) \notin F$.

2) Soient F_1, \dots, F_k des sous-espaces vectoriels stricts de E . Montrer que leur union ne peut être égale à E .

Exercice 2019.6 :(**)

Soit $n \geq 1$. On note \mathfrak{S}_n le groupe symétrique. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On pose

$$M_\sigma : \begin{cases} \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}). \end{cases}$$

Déterminer son spectre (on pourra d'abord étudier les cycles). Trouver les sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^n stables par toutes les applications M_σ .

Exercice 2019.7 :(**)

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel qu'il y ait une infinité d'entier n vérifiant $P(n) \in \mathbb{Q}$. Montrer que P est à coefficients rationnels.

2) Soit P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ avec $Q \neq 0$ et $\deg Q \leq \deg P$. On pose $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Q(\alpha) \neq 0$, on a $\frac{F(X)-F(\alpha)}{X-\alpha} = \frac{P_1}{Q}$ avec $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(P_1) \leq \deg P$.

3) Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ tel qu'il y ait une infinité d'entier n tel que $F(n) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $F = \frac{P}{Q}$ avec P et Q polynômes à coefficients rationnels.

Exercice 2019.8 : Décomposition décimale (**)

Soient $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \wedge b = 1$ et $b \wedge 10 = 1$. On définit les suites d'entiers $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par division euclidienne de la manière suivante :

$$\begin{cases} a = bd_0 + r_0, 0 \leq r_0 < b \\ \forall n \geq 1, 10r_{n-1} = bd_n + r_n \text{ avec } 0 \leq r_n < b \text{ et } 0 \leq d_n \leq 9 \end{cases}$$

1) Montrer que $\frac{a}{b} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n}$.

2) Montrer que ce développement est ultimement périodique, c'est-à-dire qu'il existe $N \geq 1$ et $T \geq 1$ tels que $\forall n \geq N, d_{n+T} = d_n$. Que dire de N et T ?

Exercice 2019.9 :(**)

Soit f un morphisme de groupe continu de (\mathbb{U}, \times) dans (\mathbb{C}^*, \times) .

1) Montrer que $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence d'un entier k_n tel que $f\left(\exp\left(\frac{2i\pi}{2^n}\right)\right) = \exp\left(\frac{2ik_n\pi}{2^n}\right)$.

3) Montrer que $k_n = o(2^n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

4) Montrer que la suite (k_n) converge.

5) Conclure qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $f(z) = z^k$.

CHAPITRE 7

ORAUX DE 2020

Exercice 2020.1 : (**)

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$. Si A est diagonalisable, que dire de B ?
 B est-elle tout le temps diagonalisable ?

Exercice 2020.2 : Théorème de Courant-Fischer (***) (C)

On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n et $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On note, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de A .

1) Montrer que,

$$\lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2}$$

. 2) Montrer que,

$$\forall k < n, \lambda_k = \max_{H \text{ sev}, \dim(H)=k} \left(\min_{x \in H \setminus \{0\}} \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2} \right)$$

C'est un théorème de "minimax". Pour ceux qui veulent en savoir plus, je vous invite à aller voir le théorème du Minimax de Von-Neumann. C'est un théorème important de la Théorie des jeux. J'ai fais mon TIPE de 3/2 la dessus donc j'ai des ressources si jamais.

Exercice 2020.2 : Equivalence de normes (**)(C)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) | f(0) = f'(0) = 0\}$.

On pose, \mathcal{N}_∞ la norme infinie sur E et, $\mathcal{N}(f) = \sup\{|f''(t) + 2f'(t) + f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$.

1) Montrer que \mathcal{N} est une norme sur E .

2) Montrer que, $\exists a \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathcal{N}_\infty \leq a\mathcal{N}$. Donner la constante optimale.

3) Les deux normes sont-elles équivalentes ?

CHAPITRE 8

ORAUX DE 2021

Exercice 2021.1 :(*)

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $\phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire vérifiant $\phi(AB) = \phi(BA)$, pour tous $A, B \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que ϕ est proportionnelle à la trace.

C'est une équivalence. On a aussi le résultat sur \mathbb{R} .

Exercice 2021.2 :(**)

Déterminer les réels α, β, γ tels que $\int_0^1 (\ln t - \alpha - \beta t - \gamma t^2)^2 dt$ soit minimale.

Exercice 2021.3 :(***)

1) Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ d'ordre fini, c'est à dire telle qu'il existe $k \geq 1$ tel que $M^k = I_n$. Montrer que M est diagonalisable, telle que $|\text{Tr } M| \leq n$ et que $\text{Tr } M = n \iff M = I_n$.

2) Soit $p \geq 3$ premier. On note π_p le morphisme : $\pi_p : \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ qui a une matrice de déterminant 1 associe la matrice avec les coefficients de départ modulo p . Soit $M \in \text{Ker}(\pi_p) \setminus \{I_2\}$, montrer que M est d'ordre infini.

3) Soit G un sous-groupe fini de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que, $|G| \leq 24$.

4) Plus généralement, montrer qu'il existe $c(n)$ vérifiant $|G| \leq c(n)$ pour tout sous-groupe fini de $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$.

CHAPITRE 9

ORAUX DE 2022

Exercice 2022.1 :(**)

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité $\omega(\lambda)$ telle que $\omega(\lambda) > \frac{\deg(P)}{2}$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Exercice 2022.2 :(***)

Soit n un entier naturel et E l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n . On note D et T les endomorphismes de E dérivation et translation : $D : P \mapsto P'$ et $T : P \mapsto P(X + 1)$.

- 1) Donner les polynômes caractéristiques et minimaux de D et de T .
- 2) Montrer $T \in \mathbb{R}[D]$.

Exercice 2022.3 :(*)

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ? connexe par arcs ?

Possible question : Quelles sont les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2022.2 :(**)

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que, $\exists k \geq 1, A^k = I_n$. Montrer qu'il existe un produit scalaire sur \mathbb{R}^n tel que A soit la matrice d'une famille orthonormée pour ce produit scalaire.

CHAPITRE 10

EXERCICES DE MA SÉLECTION

Exercice 1 : (**)

On rappelle que $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Pourquoi $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un espace-vectoriel ? Montrer que c'est un groupe.

Déterminer le cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ puis celui de $SL_n(\mathbb{F}_p)$.

Il est vraiment bon de se rappeler que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel et qu'on ne peut donc pas parler de sa dimension par exemple. Aussi, comme \mathbb{F}_p est un corps fini, le cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ est fini, ce qui n'est pas le cas de $GL_n(\mathbb{R})$. Il faut donc faire attention aux mots que l'on utilise.

Maintenant, soit E un espace-vectoriel sur un corps fini F_q . Que dire de $|GL(E)|$?

Exercice 2 : Lemme d'Hadamard (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Posons :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, R_i = \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |a_{i,j}|$$

Montrer que,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > R_i \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{C})$$

Les matrices vérifiant la propriété à gauche de l'implication sont appelées "Matrice à diagonale strictement dominantes". Le lemme d'Hadamard se traduit alors comme suit : Toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible (dans \mathbb{C}).

Exercice 3 : Disques de Gershgorin (**)

Posons $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On appelle i -ème disque de Gershgorin la quantité : $D_i = \{x \in K \mid |a_{i,i} - x| < R_i\}$, avec R_i défini dans l'exercice précédent.

Montrer que,

$$\text{Sp}(A) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} D_i$$

Avec ce théorème, on a une méthode d'approximation des valeurs propres d'une matrice. C'est quand même assez pratique surtout quand les matrices sont difficiles à étudier. Par extension via une matrice compagnon et son polynôme caractéristique, on peut approximer les racines d'un polynôme unitaire quelconque.

Exercice 3.5 :(**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > R_i$. Montrer que :

$$|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^n (|a_{i,i}| - R_i)$$

Exercice 4 : Décomposition de Dunford ou Jordan-Chevalley(*)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, avec K algébriquement clos. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $\exists!(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2 \mid$

- d diagonalisable,
- n nilpotent,
- $dn = nd$,
- $u = d + n$.

Elle n'est pas au programme des CPGE pourtant elle est plus qu'utile. Il existe aussi une version portant sur les endomorphismes "semi-simples" mais on s'éloigne très clairement du programme.

Exercice 5 : Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ (**)

Caractériser les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 6 : Théorème de Lagrange (**)

Soit G un groupe de cardinal fini et H un sous-groupe de G . Montrer que le cardinal de H divise celui de G .

On rappelle qu'on parle pareillement de cardinal ou d'ordre d'un groupe.

Exercice 7 :(*)

Soit K un corps fini (et donc commutatif par le théorème de Wedderburn). Calculer $\prod_{x \in K} x$.

Exercice 8 : Codiagonalisabilité (**)

Soit A et B deux matrices diagonalisables qui commutent. Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation de A et B .

Exercice 9 :(**)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Exercice 10 :(*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que : $\text{Tr}(\exp(A)) = \exp(\det(A))$.

Exercice 11 : Théorème de projection sur un convexe fermé d'un préhilbertien réel(****)

Soit E un espace préhilbertien réel et C une partie convexe fermée de E . Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que :

$$d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = \|x - y\|$$

On note $y = p_C(x)$, montrer que y est caractérisé par : $\forall z \in C, (y - x, y - z) \leq 0$.

Exercice 12 :(**)

Montrer que,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{A}{n}\right)^n = \exp(A)$$

Exercice 13 : Une démonstration peu commune du théorème de Cayley-Hamilton (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer, pour r assez grand,

$$\int_0^{2\pi} r e^{i\theta} \det(r e^{i\theta} I_n - A) (r e^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta$$

de deux manières différentes. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Donner une démonstration classique (celle via la matrice compagnon) du théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 14 : Hyperplans de matrices (***)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ rencontre $\mathrm{GL}_n(K)$.

C'est-à-dire que, pour tout hyperplan \mathcal{H} de $\mathcal{M}_n(K)$, $\mathcal{H} \cap \mathrm{GL}_n(K) \neq \emptyset$.

Exercice 15 : De la densité (**)

Montrer que, $\mathrm{GL}_n(K)$ est dense dans $\mathcal{M}_n(K)$.

Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 16 : (*)

Montrer que, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compacte.

Exercice 17 : Théorème de Gauss-Lucas (***)

Soit P un polynôme complexe non-constant. Montrer que les racines de P' sont contenues dans l'enveloppe convexe des racines de P .

Exercice 18 : Inverse (*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\|A\| < 1$. Déterminer $(I_n - A)^{-1}$.

Exercice 19 : Formule de Legendre (**)

Rappeler la définition de la valuation p-adique d'un entier.

Montrer que, $v_p(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$, pour $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Que donne cette formule? La somme est-elle finie? Si oui, pourquoi?

Cette formule était à démontrer dans les préliminaires de Maths A 2021.

Exercice 20 : ENS Ulm (***)

Que dire d'un groupe G dont le groupe des Automorphismes est trivial?

Exercice 21 : Base de fractions rationnelles (**)

Trouver une base de $\mathbb{R}(X)$ et de $\mathbb{C}(X)$.

En prépa on a l'existence d'une base en dimension finie. Plus tard, via l'axiome du choix, on aura aussi l'existence d'une base en dimension infinie. (Cf : Gourdon)

Exercice 22 : (**)

Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 23 : Simplicité de $\mathcal{M}_n(K)$ (**)

Soit I un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(K)$. Montrer que, soit $I = \{0\}$ soit $I = \mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 24 : (**)

A quelle condition sur le corps K peut-on assurer que toute matrice carrée est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique ?

Exercice 25 : (*)

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice antisymétrique non-nulle ?

Exercice 26 : Décomposition de polynômes (**)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$. Montrer que, $\exists A, B \in \mathbb{R}[X] \mid P = A^2 + B^2$.

Exercice 27 : Polynômes cyclotomiques (***)

Soit $n \geq 1$. On note \mathbb{U}_n , l'ensemble des racines n -ième de l'unité dans \mathbb{C} .

On dit qu'une racine n -ième z est primitive si, pour tout d tel que $1 \leq d \leq n$, $z^d \neq 1$. Notons \mathbb{P}_n l'ensemble des racines primitives n -ième de l'unité.

On note le m -ième polynôme cyclotomique, $m \geq 1$,

$$\Phi_m(X) = \prod_{z \in \mathbb{P}_m} (X - z) \in \mathbb{C}[X]$$

- 1) Déterminer Φ_m lorsque $m \in \mathcal{P}$.
- 2) Montrer que,

$$\forall n \geq 1, X^n - 1 = \prod_{d > 0, d|n} \Phi_d$$

- 3) Montrer que, pour tout n , $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.
- 4) Supposons que $\text{pgcd}(n, m) = 1$. Comparer Φ_{nm} et $\Phi_n \Phi_m$.

Exercice 28 : Théorème de Kronecker (***)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. On suppose que les racines de P sont complexes de modules $d \leq 1$ et que 0 n'est pas une racine.

Montrer que les racines de P sont alors des racines de l'unité.

Application : Montrer alors que, si $P \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire et irréductible, avec toutes ses racines de module ≤ 1 , alors soit $P = X$ soit P est un polynôme cyclotomique.

Exercice 29 : Fonction de Möbius et formule d'inversion (**)

Soit $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ défini comme suit :

$$\mu : n \mapsto \begin{cases} 1 & , \text{ si } n = 1 \\ 0 & , \text{ si } n \text{ a un facteur carré} \\ (-1)^r & , \text{ si } n = p_1 \dots p_r \end{cases}$$

- 1) Montrer que, si $\text{pgcd}(n, m) = 1$, $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$. On dit que μ est une fonction arithmétique multiplicative.
- 2) Montrer que,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } n = 1 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

3) Soit $(G, +)$ un groupé abélien et soient $f, g : \mathbb{N}^* \rightarrow G$.
Montrer la formule d'inversion suivante :

$$\text{Si } \forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) = \sum_{d|n} f(d), \text{ alors, } f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)$$

4) Réciproquement, montrer que si $f : \mathbb{N}^* \rightarrow G$ est telle que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)$, alors,

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Exercice 30 : Une expression de l'indicatrice d'Euler (***)

On reprend l'énoncé de l'exercice 27 sur les polynômes cyclotomiques. On a que,

$$\Phi_m(X) = \prod_{z \in \mathbb{P}_m} (X - z) \in \mathbb{C}[X]$$

et que,

$$\forall n \geq 1, X^n - 1 = \prod_{d>0, d|n} \Phi_d$$

1) Quel est le degré de Φ_m ?

2) Montrer que, $n = \sum_{d|n} \phi(d)$. Où ϕ est l'indicatrice d'Euler.

3) En déduire une expression explicite de l'indicatrice d'Euler par inversion de Möbius.