

Oraux Analyse du Magistère de Mathématiques de Rennes

Killian Le Milbeau

22 février 2024

Disclaimer. Ce PDF est amené à changer au cours du temps. En effet, je prend les énoncés sur le site BEOS et aussi ceux qu'on me donne lorsque je discute avec des camarades. Donc je vais sûrement le mettre à jour tous les ans.

Il y aura 4 documents de la sorte :

1. Oraux d'Algèbre du Magistère de Mathématiques de Rennes
2. Oraux d'Analyse du Magistère de Mathématiques de Rennes
3. Corrigé des oraux d'Algèbre
4. Corrigé des oraux d'Analyse

J'ai fais ce choix pour que vous puissiez travailler les exercices sans zyeuter ma correction. Certains exercices sont (extrêmement) difficiles. J'ai parfois passer un jour entier pour trouver la solution. Si jamais vous avez un exercice comme ça, on attend pas de vous que vous détruisez l'exercice en 20 minutes top chrono. On attend de vous que vous montriez que vous savez raisonner. C'est toute la fourberie et en même temps toute la cohérence de ce genre d'épreuve : vous ne savez pas si l'exercice que vous êtes en train de faire est dur pour vous ou dur tout court. C'est pour ça qu'il faut que vous exposiez vos pistes de recherche.

Les examinateurs sont bienveillant, alors ne vous inquiétez pas, ça va bien se passer.

Biensûr, si vous trouvez une erreur je vous demande de me le dire par mail : killian.le-milbeau@ens-rennes.fr . De même si vous ne comprenez pas une correction, ou juste une étape. Parfois de choses sont évidentes pour une personne et pas pour une autre, c'est propre à la façon dont on raisonne et à notre vision de la mathématique. (Et oui, pour ceux qui ne savent pas, on dit LA mathématique, voilà je le dis parce que moi je ne le savais pas pendant longtemps mdr).

Vous allez voir que je note les exercices "Exercice *année*.*numéro de l'exo dans la rubrique de l'année*". Comme ça vous allez vous y retrouver facilement dans les corrections.Parfois j'ai rajouté un "(C)" quand l'exercice est, à mon sens, classique.

P.S.1 : Certains exercices sont tombés sur plusieurs années, donc tous les exercices ici sont susceptibles d'arriver sous vos yeux le jour J.

P.S.2 : Il y a certains exercices que je n'ai pas corrigés. Si vous vous dites que je suis un flemmard, sachez que c'est exactement le cas. Je le ferais plus tard, quand j'aurais un peu moins la flemme. Ensuite, je pense avoir corrigé un nombre suffisant d'exercices. Si vous avez fait un exercice que je n'ai pas corrigé, sachez aussi que si vous me l'envoyez, il y a 99 pourcent de chances que je sois la personne que vous ayez rendu la plus heureuse dans votre vie.

Les exercices à la fin ne constitue pas une liste exhaustive d'exercices à savoir faire.

TABLE DES MATIÈRES

1 Oraux de 2014	3
2 Oraux de 2015	4
3 Oraux de 2016	5
4 Oraux de 2017	6
5 Oraux de 2018	7
6 Oraux de 2019	9
7 Oraux de 2020	11
8 Oraux de 2021	12
9 Oraux de 2022	13
10 Exercices de ma sélection	15

CHAPITRE 1

ORAUX DE 2014

*Exercice 2014.1 : (**)*

- 1) On définit la fonction H par : $t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{e^u - 1} du$. Étudier ses propriétés analytiques.
- 2) Montrer que H est la somme d'une série. On pourra commencer par écrire $\frac{1}{e^u - 1}$ comme la somme d'une série.
- 3) En déduire $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t)$.

CHAPITRE 2

ORAUX DE 2015

Exercice 2015.1 (**)

Soit h une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , continue et intégrable sur \mathbf{R} .

On considère l'équation différentielle $v' - v = h$ (1).

1) Donner l'ensemble des solutions de (1).

2) Montrer qu'il existe une unique solution bornée g de cette équation. Donner les limites de g en $\pm\infty$.

3) Montrer que g est intégrable sur \mathbf{R} .

4) Quelle relation y a-t-il entre $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$? On pourra utiliser l'équation différentielle vérifiée par g .

Exercice 2015.2 (***)

On considère l'équation différentielle dans \mathbf{R} : $y'' + |y| = 0$ (1)

On considère p et q deux fonctions de classe C^2 de \mathbf{R} dans \mathbf{R} vérifiant l'équation (1), et la fonction $r = p - q$.

1)a) Montrer que pour tout x dans \mathbf{R} , on a $|r''(x)| \leq |r(x)|$.

b) Soit $x > 0$, on pose $M = \sup_{[0; x]} |r(t)|$. Montrer par récurrence que, pour tout $t \in [0; x]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|r(x)| \leq \frac{Mt^{2n}}{(2n)!}$. On pourra démontrer une égalité analogue pour $r'(t)$.

c) En déduire que r est nulle sur \mathbb{R}_+^* , puis sur \mathbb{R} .

2) Construire une solution y de (1) telle que $y(0) = -1$ et $y'(0) = b$ où $|b| \leq -1$.

Exercice 2015.3 (**)

Soit $g(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{z_n}{n-t}$ où $(z_n)_{n \geq 1}$ est une suite de complexes de carré sommable.

1) Trouver le domaine de définition.

2) Soit $t \in]-1; 1[$. Montrer que $g(t) = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} \frac{z_n t^m}{n^{m+1}} = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{z_n}{n^{m+1}} \right) t^m$. Que dire de g ?

3) Montrer que si $g(t) = 0$ pour $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ alors $g(t) = 0$ pour $t \in]-1, 1[$. Montrer que $z_1 = 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n = 0$.

CHAPITRE 3

ORAUX DE 2016

Exercice 2016.1 (**)

1) Résoudre sur $I := \mathbb{R}^*$ l'équation différentielle $(E) : y'' + y = \frac{1}{x}$.

On introduira $C : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ et $S : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

2) Exprimer la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

3) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

CHAPITRE 4

ORAUX DE 2017

Exercice 2017.1 (**)

Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(0) = 0$ et $u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x$ pour $x \in]0, 1]$.

- 1) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- 2) Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
- 3) En déduire que $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 2017.2 (**)

On définit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$.

- 1) Montrer que f et g sont \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et vérifient : $y'' + y = \frac{1}{x}$.
- 2) Montrer que f et g sont continues en 0.
- 3) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2017.3 (**)

On note $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{e^t - 1} dt$.

- a) Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} .
- b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Trouver des réels a, b tels que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{b+n^2}$.
- c) Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers l'infini.

Exercice 2017.4 (**)

1. Soit $a, b > 0$. Montrer que : $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nb+a}$.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

CHAPITRE 5

ORAUX DE 2018

Exercice 2018.1 (***)

Soit g une fonction $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à support compact. Soit $(E) : y'' - y = g$.

- 1) Une solution de E est-elle nécessairement à support compact ?
- 2) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$.
- 3) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que y soit à support compact.

Une fonction à support compact est une fonction pour laquelle il existe I un intervalle fermé borné tel que cette fonction est nulle sur $\mathbb{R} \setminus I$.

Exercice 2018.2 (**)

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$.

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.
- 2) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. On note f la fonction associée.
- 3) Donner une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f . Donner une expression de f .

Exercice 2018.3 (**)

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2 x^2}$.

- a) Donner le domaine de définition de S .
- b) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.
- c) Montrer que S est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et calculer $\int_0^{+\infty} S(t) dt$.

Redémontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, ce n'est pas au programme.

Exercice 2018.4 (**)

Soit S définie par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 n^2}$. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- 1) Donner l'ensemble de définition de S .
- 2) Donner un équivalent de S en $+\infty$.
- 3) Montrer que S est intégrable sur \mathbb{R}_+ et calculer $\int_{\mathbb{R}_+} S(t) dt$.

Exercice 2018.5 (**)

On définit pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.

1) On définit la série entière $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$. Calculer son rayon de convergence.

2) Prouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ln 2$.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

CHAPITRE 6

ORAUX DE 2019

Exercice 2019.1 (**)

1. Calculer l'intégrale de Wallis $I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On s'appuiera sur l'identité $2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$.

2. On considère l'équation différentielle $(x^3 - x)y'' + (3x^2 - 1)y' + xy = 0$. Montrer qu'il existe une unique fonction f développable en série entière au voisinage de 0, solution de cette équation sur $J =]-1, 1[$, et vérifiant $f(0) = 1$.

3. À l'aide de développements en série entière usuels, montrer que :

$$\forall x \in J, f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}$$

Exercice 2019.2 (**)

On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = f(1) = 0\}$, $F = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = 0, f(1) = 1\}$ et pour $f \in F$, $I(f) = \int_0^1 e^s (f^2(s) + f'^2(s)) \, ds$.

1) Soient $u \in E$ et $f \in F$. Calculer la dérivée en zéro de $t \mapsto I(f + tu)$.

2) Montrer que I atteint un minimum global en f ssi $\forall u \in E$, $\int_0^1 e^s (f(s)u(s) + f'(s)u'(s)) \, ds = 0$ (\star).

3) Montrer que (\star) \Leftrightarrow ($\star\star$) : $f'' + f' - f = 0$.

4) En déduire le minimum de I .

Exercice 2019.3 Démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss(***)

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. On pose, pour $r \in \mathbb{R}_+$ convenable, $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{it})re^{it}}{P(re^{it})} \, dt$

1) Montrer qu'il existe $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $r > r_0$, $I(r)$ est définie.

2) Calculer la limite de $I(r)$ lorsque $r \rightarrow +\infty$.

3) Soit $[a, b]$ un segment réel ne contenant aucun module d'une racine de P . Montrer que I est constante sur $[a, b]$, sans utiliser le fait que P est scindé (c'est la prochaine question).

4) En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.

Exercice 2019.4 (**)

Montrer que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t} dt.$$

Exercice 2019.5 (***)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la suite de terme général $u_n = \int_0^a \sin t^n dt$.

Convergence et limite de la suite selon la valeur de a (on pourra exprimer le résultat en fonction d'intégrales particulières).

CHAPITRE 7

ORAUX DE 2020

Exercice 2020.1 Fonction de Bessel (**)

Soit $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta$.

- 1) Montrer que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
- 2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$(E) : xy'' + y' + xy = 0$$

- 3) Montrer que f est développable en série entière en 0, avec un rayon de convergence infini.
- 4) Déterminer ce développement en série entière.

Exercice 2020.2 (*)

Montrer, de 3 manières différentes, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{n+1-i}} \geq n$$

CHAPITRE 8

ORAUX DE 2021

Exercice 2021.1 (***)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et a, b des réels tels que $a \leq b$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t) |\sin(nt)| dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt$$

Exercice 2021.2 (***)

Soit $r \in]0, 1[$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - r^k x)$.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. La limite est-elle continue ?

Exercice 2021.2 (**)

Justifier l'existence et calculer

$$\int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt dx$$

On peut aussi le faire avec :

$$\int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt dx$$

CHAPITRE 9

ORAUX DE 2022

Exercice 2022.1 (**)

1) Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum b_n$ diverge et $z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ soit de rayon 1. Montrer que,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$$

2) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $(\frac{a_n}{b_n})_n$, définie à partir d'un certain rang, possède une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que,

$$\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ell$$

Exercice 2022.2 (**)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nulle en dehors d'un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Montrer que,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f'(t)| dt$$

Exercice 2022.3 (**)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$. Discuter le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.

Exercice 2022.4 (*)

Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C \sqrt{|x - y|}$.

Exercice 2022.5 (***)

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} bornée par M . Pour $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ fixés, on définit :

$$\text{osc}_f(r, x) = \sup_{[x-r, x+r]} f - \inf_{[x-r, x+r]} f$$

et la fonction :

$$\begin{aligned} \text{osc}(f) : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ r &\mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} \text{osc}_f(r, x) \end{aligned}$$

- 1) Justifier l'existence de $\text{osc}_f(r, x)$ et $\text{osc}(f)$. Montrer que $\text{osc}(f)$ est bornée par $2M$.
- 2) On suppose qu'il existe $\kappa \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall r \in]0, 1], \text{osc}(f)\left(\frac{r}{2}\right) \leq \kappa \text{osc}(f)(r)$$

On pose $\alpha = \frac{\ln(\frac{1}{\kappa})}{\ln 2}$

- a) Montrer que f est α -höldérienne, c'est-à-dire :

$$\exists C > 0 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

- b) Que dire si $\kappa < \frac{1}{2}$?
- c) Que dire si la propriété est vraie pour tout $r > 0$?

Exercice 2022.6 (**)

Déterminer l'ensemble des $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour toute $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et tout $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(t+h) + bf(t) + cf(t-h)}{h^2} = f''(t).$$

Exercice 2022.7 (***)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1}\right)$.

Exercice 2022.8 Coefficients de Fourier (**)

Pour une fonction continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on définit :

$$c_k(g) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} g(x) dx$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ et 2π -périodique.

- 1) Justifier que $(c_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k(f') = ikc_k(f)$.
- 3) Montrer que la série de terme général $(c_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ converge absolument et que pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=N}^{+\infty} |c_k(f)| \leq \frac{C}{NM}$$

Exercice 2022.9 (*)

Soit $\alpha > 0$. Notons $R > 0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, où $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $z \in \mathbb{C}$.

Que vaut le rayon de convergence de $\sum a_n^\alpha z^n$?

Exercice 2022.10 (***)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions K -lipschitziennes de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , convergeant simplement vers une fonction u . Montrer que la convergence est uniforme.

CHAPITRE 10

EXERCICES DE MA SÉLECTION

Exercice 1 Lemme de Riemann-Lebesgue (**)

Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} .

1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$$

Puis que,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(px) dx = 0$$

2) Supposons maintenant que f est continue par morceaux. Montrer que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$$

Exercice 2 Lemme de Dini (***)

Soit $I = [a, b]$, un intervalle de \mathbb{R} avec $a < b$. Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction continue f . Montrer que,

1) Si chaque fonction f_n est croissante, alors la convergence est uniforme.

2) Si la suite de fonction (f_n) est croissante, alors la convergence est uniforme.

Attention, il y a bien une différence entre les deux résultats..

Exercice 3 Théorème de Riesz (***)

Montrer que la boule unité fermé d'un espace vectoriel E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Normalement, ce théorème est très facile à montrer avec la caractérisation de la compacité par Borel-Lebesgue, mais vous n'avez que Bolzano-Weierstrass donc là c'est dur.

Exercice 4 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^∞ , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} | f^{(n)}(x) = 0$$

Montrer que f est polynômiale.

Exercice 5 Intégrale de Dirichlet (**)

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Exercice 6 Suite de Cauchy (*)

Montrer qu'une suite réelle est de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

Exercice 7 Théorème de Baire (***)

Pour tout X espace métrique complet, montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est dense dans X .

Vous avez l'habitude de travailler avec des espaces vectoriels normés et ici on a un espace métrique.. Bon la seule chose qui change c'est qu'on perd la notion d'espace vectoriel et qu'on ne considère plus un couple $(E, \|\cdot\|)$ mais un couple (X, d) . Il faut bien voir qu'à toute norme on peut associer une distance, mais qu'on ne peut pas associer une norme à toute distance (Cf : distance trivial).

Exercice 8 Théorème des compacts emboîtés (***)

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non-vides d'un espace vectoriel normé.

Montrer que, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Exercice 9 Equation différentielle non-linéaire (***)

Existe-t-il une solution définie sur \mathbb{R} à l'équation différentielle $y' + \cos(y) = 0$ avec la condition $y(\pi) = 0$? Si oui, en expliciter une.

Exercice 10 Lemme de Cesaro (*)

Soit $(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ convergente vers une limite $x \in \mathbb{C}$.

Montrer que,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

Exercice 11 Transformation d'Abel (*)

Soit $(a_n), (b_n)$ deux suites. Pour tout $m, N \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n b_n, \quad B_m = \sum_{k=0}^m b_k$$

Montrer que,

$$S_N = a_N B_N - \sum_{k=0}^{N-1} B_k (a_{k+1} - a_k)$$

Exercice 11 Produit Eulérien de ζ (**)

Montrer que,

$$\forall s > 1, \zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Exercice 12 Développement asymptotique de la série harmonique (**)

Déterminer un développement asymptotique de la suite $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ en $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 13 Injection continue (**)

Existe-t-il une injection continue de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} pour $n \geq 2$.

Exercice 14 C^∞ mais pas DSE (**)

On considère la fonction suivante : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & , \text{ si } x = 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & , \text{ sinon } \end{cases}$.

Montrer que f est de classe C^∞ mais qu'elle n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 15 Formule de Cauchy et Lemme de Liouville (**)

Soit f une série entière complexe, de rayon de convergence $R > 0$ et soit $r \in]0, R[$.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

En déduire que si $R = +\infty$ et si f est bornée sur \mathbb{C} , alors f est constante (Lemme de Liouville).

Exercice 16 Série des inverses des premiers (***)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série suivante :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^\alpha}$$

Exercice 17 Théorème de réarrangement de Riemann (****)

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ soit semi-convergente. Montrer que,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijective} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$$

En gros, si une série est semi-convergente, en permutant les termes de la somme, ie en changeant l'ordre de sommation, on peut la faire être égale à tout ce que l'on veut. C'est un résultat extrêmement beau et contre-intuitif.

Exercice 18(*)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n f(t) dt = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 19 Différentielle des puissances (*)

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la différentielle de l'application suivante :

$$f : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K) \\ M \mapsto M^k \end{array}$$

Exercice 20 Différentielle de l'inverse (**)

Calculer la différentielle de l'application suivante :

$$f : \begin{array}{l} \text{GL}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K) \\ M \mapsto M^{-1} \end{array}$$

Exercice 21 Différentielle du déterminant (**)

Calculer la différentielle de l'application suivante :

$$\det : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto \det(M) \end{array}$$

Exercice 22 Suite récurrente (**)

Etudier la suite définie par

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sin(a_n) \\ a_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

Exercice 23 Equation différentielle aléatoire (**)

On considère 3 entiers $a, b, c \in \mathbb{N}$ choisis au hasard et de manière indépendante, suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

- 1) Quelle est la probabilité que les solutions soient périodiques ?
- 2) On note $p(\lambda)$ la probabilité que les solutions s'annulent une infinité de fois. Calculer la limite de p lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.