Conjecture de Schanuel et Algèbre différentielle

Killian Le Milbeau, Thibault Brasseur

10 avril 2023

Table des matières

1 Préliminaires

A mesure que l'on avance dans l'histoire, différents nombres s'ajoute à notre catalogue : les nombres entiers, rationnels, irrationnels, constructibles, algébriques et transcendants. Ces deux derniers nous intéressent tout particulièrement. *Est transcendant un nombre qui n'est annulé par aucun polynôme à coefficient dans* $\mathbb{Z}$. Le premier nombre transcendant fut la constante de Liouville qu'il démontrera ne pas être algébrique. Cependant, Vérifier qu'un nombre est ou non transcendant n'est pas chose aisée. On sait tout juste que e et π le sont, mais rien sur leur produit par exemple. A cela s'ajoute aussi la notion de familles algébriquement indépendantes qui mettent en jeu quelques résultats. Les théorèmes sur ces notions sont peu nombreux et très difficile à démontrer, mais il existe une conjecture, la **conjecture de Schanuel**.

Stephen Schanuel est un mathématicien Américain né le 14 Juillet 1933 dans le Missouri, il travaillera sur l'algèbre, la théorie des catégories, la théorie des nombres et la théorie de la mesure. Il posera également une conjecture sur les nombres transcendant portant son nom, la **conjecture de Schanuel**, et qui permet de répondre à la quasi-totalité des conjectures sur les nombres transcendants.

James Ax est un mathématicien Américain né le 10 Janvier 1937. Il travaillera sur l'algèbre, la théorie des modèles, les équations diophantiennes et publiera vers 1970 *On Schanuel's Conjecture*, traitant sur des résultats sur la Conjecture de Schanuel, notamment sur une autre conjecture qu'il a prouvé être équivalente . C'est le sujet de notre rapport.

Pour y répondre, nous allons tout d'abord rappeler des notions essentielles et démontrer les plus délicates et les plus importantes. Puis nous présenterons la conjecture de Schanuel et ses multiples conséquences avant de présenter les différents résultats de James Ax. Ensuite, nous démontrerons le théorème principal de ce travail.

2 Définitions essentielles

2.1 Extension de corps

Commençons par quelques rappels de définitions sur les corps et extension de corps.

Définition 1 (Corps)**.** On dit qu'un anneau $(A, +, .)$ est un corps si et seulement si $(A, +)$ et $(A\backslash\{0\}, .)$ sont des groupes.
Essentiellement, un corps est un ensemble sur lequel on peut effectuer toutes les opérations usuelles.

Définition 2 (Corps algébriquement clos)**.** Un corps $\mathbb{K}$ est dit algébriquement clos si tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{K}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{K}$.

Exemple 1. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Définition 3 (Extension de corps)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps. On dit que $\mathbb{L}$ est une extension du corps $\mathbb{K}$ si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ et si $\mathbb{L}$ est un corps.
On notation résumant cette idée est $\mathbb{L}/\mathbb{K}$.

Exemple 2. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$...

Remarque 1. Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de corps. Alors, $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 4 (Degré d'une extension)**.** Le degré d'une extension de corps $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est la dimension de $\mathbb{L}$ en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Le degré de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est noté $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.

Exemple 3. $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est une extension de corps. De plus, $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$. Ainsi, $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.

Remarque 2. Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{L}$ une suite d'extension de corps. $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ est finie si et seulement si $[\mathbb{L} : \mathbb{F}]$ et $[\mathbb{F} : \mathbb{K}]$ le sont. Dès lors $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = [\mathbb{L} : \mathbb{F}][\mathbb{F} : \mathbb{K}]$

Définition 5 (Extensions algébriques)**.** On considère l'extension de corps $\mathbb{L}/\mathbb{K}$. Alors, un élément de $\mathbb{L}$ est algébrique dans $\mathbb{K}$ s'il est racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Une extension de corps $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est algébrique si tous les éléments de $\mathbb{L}$ sont algébriques dans $\mathbb{K}$.

Exemple 4. $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est une extension algébrique.
En effet, soit z dans $\mathbb{C}$; comme $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, la famille $(z^n)_{n\geq 0}$ est liée, donc on dispose d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(z) = 0$.

Remarque 3. Si $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est une extension finie, alors elle est algébrique.

Remarque 4. Si $S \subset \mathbb{L}$ est une partie finie de $\mathbb{L}$ d'élément algébrique sur $\mathbb{K}$ alors $\mathbb{K}(S)/\mathbb{K}$ est une extension algébrique et finie.

Définition 6 (Polynôme minimal)**.** Soient $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de corps et $x \in \mathbb{L}$. On considère l'application $\phi_x : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{L}$ qui à $P \in \mathbb{K}[X]$ associe $P(x)$. D'après ce qui précède, x est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\mathrm{K}er(\phi_x) \neq \{0\}$. De cette façon, on définit l'unique polynôme unitaire de degré minimal P_x tel que $P_x(x) = 0$.

Remarque 5. De plus, si $car(\mathbb{K}) = 0$ alors $P'_x(x) \neq 0$.

Proposition 1. *Soit* $\mathbb{K} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{L}$ *une suite d'extension de corps, on a l'equivalence suivante :*

i $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *est une extension algébrique.*

ii $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ *sont des extensions algébriques.*

Démonstration : Le sens direct est immédiat. En effet, si $\mathbb{L}$ est une extension algébrique de $\mathbb{K}$, alors comme tout élément de $\mathbb{F}$ est dans $\mathbb{L}$, il vient que $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ est algébrique. De plus, $\mathbb{F}$ contient tous les éléments de $\mathbb{K}$ donc $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ est algébrique.

Supposons que les extensions $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ soient algébriques. Soit $x \in \mathbb{L}$, on dispose de $a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$ tels que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

On pose $C = \mathbb{K}(a_0, \cdots, a_{n-1})$. On a alors $[C : \mathbb{K}]$ fini, de même $[C(x) : C]$ est fini à son tour. Par conséquent $[C(x) : \mathbb{K}]$ est fini. Alors comme $\mathbb{K}(x) \subset C(x)$ il suit que $[\mathbb{K}(x) : \mathbb{K}]$ est fini ce qui conclut x algébrique sur $\mathbb{K}$.

Définition 7 (Clôture algébrique)**.** La clôture algébrique d'un corps $\mathbb{K}$ est une extension de $\mathbb{K}$ qui est algébriquement close.

Exemple 5. $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$.

Définition 8 (Fermeture Algébrique)**.** Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de corps. La fermeture algébrique de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{L}$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{L}$ algébrique dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2. *Si on note l'ensemble* $\mathbb{F}$*, alors c'est est un sous-corp de* $\mathbb{L}$*. En effet, pour* $x, y \in \mathbb{F}$*, on a* $\mathbb{K}(x, y)$ *une extension algébrique de* $\mathbb{K}$ *donc* $x + y$ *et* xy *sont algébrique dans* $\mathbb{K}$*, et si* $x \neq 0$*, on a* $x^{-1} \in \mathbb{K}$ *aussi ce qui conclut.*

Définition 9 (Algébriquement fermé)**.** Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de corps. $\mathbb{K}$ est algébriquement fermé dans $\mathbb{L}$ si $\mathbb{K}$ est sa propre fermeture algébrique dans $\mathbb{L}$

2.2 Base et degré de transcendance

Définition 10 (Sous-corps engendré par une partie)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps et $S \subseteq \mathbb{K}$ une partie de $\mathbb{K}$. On appelle sous-corps engendré par S le plus plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$ contenant S, et on note

$$< S >= \bigcap_{S \subseteq V \text{ sous-corps de } \mathbb{K}} V$$

Définition 11 (Extension et sous-corps engendré)**.** Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de corps et soit S une partie de $\mathbb{L}$.
L'ensemble des sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant S et $\mathbb{K}$ est non-vide. Ainsi, l'intersection de tout ces sous-corps est un sous-corps de $\mathbb{L}$ qu'on appelle sous-corps engendré par S sur $\mathbb{K}$.
On le note $\mathbb{K}(S)$ et si $S = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, on a $\mathbb{K}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Définition 12 (Extension de type fini)**.** L'extension $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est dites de type fini si $\mathbb{L}$ est engendré, comme sur-corps de $\mathbb{K}$, par un nombre fini d'éléments. C'est-à-dire, s'il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{L}$ tels que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Définition 13 (Indépendance algébrique sur un corps)**.** Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une etxtension de type fini. On dit que $x_1, ..., x_n$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{K}$ si le morphisme

$$\phi \ : \ \mathbb{K}[X_1, ..., X_n] \to \mathbb{L}, \quad P \ \mapsto \ P(x_1, ..., x_n)$$

est injectif.
Dans ce cas, ϕ se prolonge en un isomorphisme de $\mathbb{K}(X_1, ..., X_n)$ sur le sous-corps de $\mathbb{L}$ engendré par les x_i.
En particulier, chaque x_i est transcendant sur $\mathbb{K}$.

Remarque 6. On a donc l'implication x_i algébriquement indépendants sur $\mathbb{K} \Rightarrow x_i$ transcendants sur $\mathbb{K}$. Cependant, l'implication réciproque n'est pas vraie.
Par exemple, soit $\mathbb{L}$ le corps des fractions de $\mathbb{K}[x, y]$, avec $x^2 = y^3$. Alors, x et y sont transcendants sur $\mathbb{K}$ mais la relation précédente nous dit qu'ils ne sont pas algébriquement indépendants sur $\mathbb{K}$.

Définition 14 (Base de transcendance)**.** On dit qu'une partie $\mathcal{B}$ de $\mathbb{L}$ est une base de transcendance de $\mathbb{K}$ si :

(i) Tout élément de $\mathcal{B}$ est algébriquement indépendants sur $\mathbb{K}$;

(ii) Le corps $\mathbb{L}$ est une extension algébrique du sous-corps $\mathbb{K}(\mathcal{B})$.

C'est-à-dire, si $\mathcal{B}$ est une partie algébriquement indépendante maximale.

Remarque 7. Toute extension de corps $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ dispose d'une base de transcendance par le lemme de Zorn. De plus, toutes parties B algébriquement indépendant peut être étendu en une base de transcendance. De même, elle peut être étendue par une partie d'une base de transcendace déjà connue.

Proposition 3 (Degré de transcendance)**.** *Soit* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *une extension de corps de type fini. Alors, toutes les bases de transcendance de* $\mathbb{L}$ *ont le même cardinal, appelé degré de transcendance de* $\mathbb{L}$ *sur* $\mathbb{K}$ *et noté* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$*.*

Ceci est un résultat essentiel que nous allons démontrer ici.

Démonstration : On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de transcendance de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$. Montrons que $|\mathcal{B}| \geq |\mathcal{B}'|$. Cela se fait en deux parties, selon si $\mathcal{B}$ est finie ou infinie.

Si $\mathcal{B}$ est finie, on montre l'inégalité par récurrence sur son cardinal noté n. Si $n = 0$, alors $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est une extension algébrique et donc $\mathcal{B}'$ ne peut être autre ensemble que $\varnothing$.

Supposons que pour tout $k < n$, on a l'hypothèse vrai. On considère $x \in \mathcal{B}'$, par conséquent, on peut étendre $\{x\}$ par des éléments de $\mathcal{B}$, on note $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces éléments. Ainsi, $\mathcal{C} \cup \{x\}$ est une base de transcendance de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$ et $|\mathcal{C}| < n$. On pose $\mathbb{F} = \mathbb{K}(x)$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{B}' \setminus \{x\}$. Montrons alors que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des bases de transcendance de $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ pour appliquer l'hypothèse de récurrence.

On a $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ algébriquement indépendant sur $\mathbb{F}$. De plus, comme $\mathbb{F}(\mathcal{C}) = \mathbb{K}(\mathcal{C} \cup \{x\})$, on a $\mathbb{L}$ qui y est algébrique. De même pour $\mathbb{F}(\mathcal{C}') = \mathbb{K}(\mathcal{B}')$. Par définition, il vient que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des bases de transcendance de $\mathbb{L}/\mathbb{F}$, ainsi, par hypothèse de récurrence, on a $|\mathcal{C}| \geq |\mathcal{C}'|$. On en déduit l'inégalité.

Bien entendue, il se peut qu'une base de trancedance soit infinie. Supposons que $\mathcal{B}$ est de cardinal infini. Pour $x \in \mathcal{B}$, on dispose d'une partie finie $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{B}'$ telle que x soit algébrique sur $\mathbb{K}(\mathcal{S}_x)$. On pose $\mathcal{S} = \cup_{x \in \mathcal{B}} \mathcal{S}_x$. Or ici $\mathcal{B}$ est infinie, par conséquent on a $|\mathcal{S}| \leq |\mathcal{B}|$. De plus, $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}'$. Par ailleurs, on a pour tout $x \in \mathcal{B}$ algébrique dans $\mathbb{K}(\mathcal{S})$. Ainsi, $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ est algébrique sur $\mathbb{K}(\mathcal{S})$; par hypothèse $\mathbb{L}$ l'est sur $\mathbb{K}(\mathcal{B})$. Donc $\mathcal{S}$ est une base de transcendance de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$. Il suit alors que $\mathcal{S} = \mathcal{B}'$. En effet, on ne doit pas pouvoir étendre $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}'$, sinon, ce premier ne serait plus une base de transcendance. On en conclut l'inégalité et le résultat avec.

Proposition 4. *Soient* $\mathbb{K} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{L}$ *une suite d'extension de corps avec* $\mathcal{B}$ *une base de transcendance de* $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ *et* $\mathcal{C}$ *une base de transcendance de* $\mathbb{F}/\mathbb{K}$. *Alors* $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \varnothing$ *et* $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ *est une base de transcendance de* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$.

Remarque 8. Il s'en suit que $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F} + \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{L}$.

2.3 Algèbre générale

Définition 15 (Algèbre)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps (commutatif). On dit que A est une $\mathbb{K}$-algèbre, notée $(A, +, \times, .)$, si :

(i) $(A, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,

(ii) $(A, \times, +)$ est un anneau, son élément neutre pour $\times$ est l'unité de l'algèbre,

(iii) L'application $(u, v) \mapsto u \times v$ est bilinéaire.

Remarque 9. Le corps $(\mathbb{K}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Dans ce cas, $\times$ et . sont les mêmes lois.

Exemple 6. L'ensemble $(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre et son unité est le polynôme $P = 1$. L'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, son unité est la matrice identité I_n.

Définition 16 (Module sur un anneau)**.** Soit A un anneau (unitaire). Alors, un A-module $(M, +, .)$ est la donnée d'un ensemble M, d'une loi de composition interne $+$ sur M qui fait de $(M, +)$ un groupe abélien et d'une loi de composition externe $. \ : \ A \times M \to M$ telle que :

(i) $\forall a \in A,\ \forall (x,y) \in M,\ a.(x+y) = a.x + a.y,$

(ii) $\forall (a,b) \in A,\ \forall x \in M,\ (a+b).x = a.x + b.y,$

(iii) $\forall x \in M,\ 1.x = x.$

Remarque 10. Un module est à un anneau ce qu'un espace vectoriel est à un corps. Pour un espace vectoriel, l'ensemble des scalaires forme un corps tandis que pour un module, cet ensemble est seulement muni d'une structure d'anneau.

Définition 17 (Module à gauche et à droite)**.** Un A-module à gauche est un A-module tel que : $(a.b).x = a.(b.x)$.
Un A-module à droite est un A-module tel que : $(a.b).x = b.(a.x)$.

Remarque 11. Si l'anneau A est commutatif, les A-modules à gauche sont exactement les A-modules à droite. On parle alors juste de A-modules.

Remarque 12. Tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module pour la loi externe définie par :

(i) $\forall n > 0,\ n.x = x + ... + x$, n fois,

(ii) $O.n = 0,$

(iii) $\forall n < 0,\ n.x = -((-n).x).$

Il y a donc équivalence entre la notion de groupe abélien et de $\mathbb{Z}$-module.

2.4 Algèbre différentielle

Définition 18 (Dérivation)**.** Soit B un anneau et $A \subseteq B$ un sous-anneau de B. On appelle dérivation de A dans B, une application $\partial : A \rightarrow B$ telle que, pour tout $x, y \in A$,

$$\partial(x+y) \ = \ \partial(x) \ + \ \partial(y) \text{ et } \partial(x.y) = \partial(x).y \ + \ x.\partial(y)$$

On note $\mathrm{D}er(A,B)$ l'ensemble des dérivations de A dans B et $\mathrm{D}er(A)$ l'ensemble des dérivation sur A.

Proposition 5. *On dispose alors des formules suivantes :*

(i) $\forall x, y \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},$

$$\partial^n(x.y) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} y^{(n-k)}$$

(ii) Si $n \neq 0,$

$$\partial(x^n) = n.x^{n-1}\partial(x)$$

(iii) Si x est inversible,

$$\partial(x^{-1}) = -\partial(x).x^{-2}$$

Définition 19 (Anneau différentiel)**.** Un anneau différentiel est la donnée d'un anneau A et d'une dérivation ∂ sur A.

Exemple 7. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ muni de la dérivation usuelle est un anneau différentiel.

Remarque 13. Tout anneau peut être munit de la dérivation triviale qui envoit tout élément de l'anneau sur 0.

Définition 20 (Corps différentiel)**.** Un corps différentiel est la donnée d'un corps $\mathbb{K}$ et d'une dérivation d sur $\mathbb{K}$

Exemple 8. Le corps $\mathbb{C}(X)$ munit de la dérivée usuelle est un corps différentiel.

Remarque 14. Pour toute dérivée d, on a $d(1) = 0$. En effet, $d(1) = d(1\cdot 1) = 1\cdot d(1)+d(1)\cdot 1 = 2d(1)$ d'où $d(1) = 0$.

Définition 21 (Corps des constantes)**.** Soit $(\mathbb{K}, d)$ un corps différentiel, on note $C = \mathrm{K}er(d)$ le corps des constantes relativement à la dérivation d.

Remarque 15. C est bien un sous-corps de $\mathbb{K}$. On a $1 \in C$. De plus $(C, +)$ est bien un sous-groupe de $(\mathbb{K}, +)$. Soit $x, y \in C$ on a $d(xy) = xd(y)+yd(x) = 0$, et $d(x^{-1}) = -d(x)\cdot x^{-2} = 0$ ce qui conclut.

Exemple 9. $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(X)$ est le corps des constantes relativement à la dérivée usuelle.

Définition 22 (Morphisme de corps différentiel)**.** Soit $\mathbb{L}$ et $\mathbb{K}$ deux corps différentiels. On appelle morphisme de corps différentiels, un morphisme de corps $\Phi : \mathbb{L} \to \mathbb{K}$ qui commute avec la dérivation.

Définition 23. Soient $(\mathbb{K}, d)$ et $(\mathbb{L}, \Delta)$ deux corps différentiels, avec $\mathbb{L}$ une extension de corps de $\mathbb{K}$. Si $\Delta_{|\mathbb{K}} = d$, alors on dira que $(\mathbb{L}, \Delta)$ est une extension différentielle de $(\mathbb{K}, d)$.

Définition 24 ($\mathbb{K}$-dérivation)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbb{K} \subseteq A \subseteq B$ deux anneaux. On notera que A induit une $\mathbb{K}$-algèbre et B un A-module. On dit que $\partial \in \mathrm{D}er(A, B)$ est une $\mathbb{K}$-dérivation de A dans B si $\mathbb{K} \subseteq \mathrm{K}er(\partial)$.
On note $\mathrm{D}er_{\mathbb{K}}(A, B)$ l'ensemble des $\mathbb{K}$-dérivation de A dans B.

Remarque 16. Toute application $\partial \in \mathrm{D}er_{\mathbb{K}}(A, B)$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire de A dans B.

Proposition 6. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, A une $\mathbb{K}$-algèbre et M un A-module. Soit I un ensemble, si on note $A = \mathbb{K}[t_i, i \in I]$, c'est-à-dire que $(t_i)_{i\in I}$ engendre A. Alors pour $(x_i)_{i\in I}$ une famille de M, Il existe une unique $\mathbb{K}$-dérivation $d : A \to M$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $d(t_i) = x_i$.*

Remarque 17. Comme l'application est définie sur une partie qui engendre A, on a bien l'unicité ; l'existence est donné par

$$d(P) = \sum_{i\in I} \frac{\partial P}{\partial t_i} x_i$$

Où $P \in \mathbb{K}[t_i, i \in I]$.

Définition 25 (Logarithme et exponentielle)**.** On considère $(\mathbb{K}, d)$ un corp différentiel et $t \in \mathbb{K}$ et $s \in \mathbb{K}^\times$. On dit que t est un logarithme de s si $d(t) = d(s)/s$. On dit que s est une exponentielle de t si $d(s) = sd(t)$.

Remarque 18. Pour le cas du logarithme, on a les propriétés suivantes.

- Pour $t, s \in \mathbb{K}$, on a $d(t)/t + d(s)/s = (sd(t) + td(s))/ts = d(ts)/ts$.
- Pour $n \geq 0$, $n(d(t)/t) = d(t^n)/t^n$.
- Si on note $\mathfrak{L} = \{d(x)/x, x \in \mathbb{K}\times\}$, alors $\mathfrak{L}$ induit un $\mathbb{Z}$-module dans $\mathbb{K}$.

Proposition 7. *Soit $\mathbb{K} \subseteq A$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Il existe un A-module Ω_A et $\partial_A \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, \Omega_A)$ tels que pour tout A-module B, l'application*

$$\phi \in Hom_{\mathbb{L}}(\Omega_A, B) \mapsto \phi \circ \partial_A \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, B)$$

soit bijective.

Remarque 19. En particulier, si $B = A$ et si on note $\widehat{\Omega}_A = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega_A, A)$, alors on dispose d'une bijection entre $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ et $\widehat{\Omega}_A$. Cela revient à dire que toute $\mathbb{K}$-dérivation sur A peut être ramenée à la $\mathbb{K}$-dérivation ∂_A à un morphisme dans $\widehat{\Omega}_A$ près.

Construction : Pour construire le couple $(\partial, \Omega_{A/\mathbb{K}})$, on considère $A = \mathbb{K}[t_i, i \in I]$. On pose $\Omega_{A/\mathbb{K}} = A^{(I)}$ et la famille canonique $(x_i)_{i\in I}$ associée. On a bien $\Omega_{A/\mathbb{K}}$ un A-module. Ensuite on pose $\partial : A \to \Omega_{A/\mathbb{K}}$ l'unique $\mathbb{K}$-dérivation telle que pour $i \in I$, $\partial(t_i) = x_i$. Le couple vérifie bien la propriété attendue.

En effet, soit M un A-module et $d \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, M)$. Alors on pose l'unique application A-linéaire $\phi : \Omega_{A/\mathbb{K}} \to M$, tel que pour $i \in I$, $\phi(x_i) = d(t_i)$. De cette façon, on a bien $\phi \circ \partial = d$. Enfin elle est bien unique. En effet, si $\psi : \Omega_{A/\mathbb{K}} \to M$ vérifie $\psi \circ \partial = d$, alors comme $\Omega_{A/\mathbb{K}}$ est engendré par ∂t_i il suit l'unicité de ψ.

Définition 26 (Extension d'action de la dérivée)**.** Soit $\mathbb{L}$ une corps et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$ et $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ le $\mathbb{L}$ espace vectoriel définie en amont. Pour $d \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\mathbb{L}$ une dérivée sur $\mathbb{K}$, on considère son extension sur $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ l'application $\mathbb{K}$-linéaire noté $\overline{d} : \Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} \to \Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ vérifiant pour $x, y \in \mathbb{L}$:

$$\overline{d}(x\partial y) = dx\partial y + x\partial(dy) \in \Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}.$$

Remarque 20. A noter que $\overline{d}$ n'est pas une dérivation car $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ est n'est pas un algèbre. Le produit n'y est pas définie. On remarque par ailleurs que $\overline{d}(\partial x) = \partial(dx)$

Construction : On a bien $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. il est engendré par les éléments de la forme $x\partial y$ pour $x, y \in \mathbb{L}$ donc on a unicité de l'extension. Si de plus, on note $(x_i)_{i\in I}$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(y_j)_{j\in J}$ tel que $\mathbb{L} = \mathbb{K}[y_j, j \in J]$, alors on peut supposer que $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$, comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel, est engendré par $(x_i\partial y_j)_{i\in I, j\in J}$. Alors on obtient l'existence et l'unicité.

Vérifions alors la relation, pour $n \geq 0$ et $x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ et $\partial y = \sum_{l=1}^{m} b_l \partial y_l$ avec pour $l = 1, \cdots, m$, on a $\partial y_l \in \{y_j, j \in J\}$. Supposons dans un premier temps que $y \in \{y_j, j \in J\}$:

$$\overline{d}(x\partial y) = \overline{d}\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Big)\partial y\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{d}(x_k \partial y)$$

De là, on applique la formule

$$\overline{d}(x\partial y) = \sum_{k=1}^{n} a_k (dx_k \partial y + x_k \partial(dy)) = dx\partial y + x\partial(dy)$$

Ici, on a $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$. On a bien la formule. A présent vérifions que pour $y \in \mathbb{L}$, on a $\overline{d}(\partial y) = \partial(dy)$, pour cela, on économise notre temps en remarquant que $y \in \mathbb{K}[y_j, j \in J]$, On ne s'intéresse alors qu'au cas du monôme et le reste découlera de la linéarité. On note $y = \prod_{k=1}^{n} y_k$.

$$\overline{d}\Big(\partial\Big(\prod_{k=1}^{n} y_k\Big)\Big) = \overline{d}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\prod_{l=1, l\neq k} y_k\Big)\partial y_k\Big) = \sum_{k=1}^{n}\overline{d}\Big(\Big(\prod_{l=1, l\neq k} y_k\Big)\partial y_k\Big)$$

On applique ici la formule

$$\sum_{k=1}^{n} d\Big(\prod_{l=1, l\neq k} y_k\Big)\partial y_k + \Big(\prod_{l=1, l\neq k} y_k\Big)\partial dy_k$$

A présent, on calcule dans l'autre sens :

$$\partial\Big(d\Big(\prod_{k=1}^{n} y_k\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{n}\partial\Big(\prod_{l=1, l\neq k} y_k\Big)dy_k + \Big(\prod_{l=1, l\neq k} y_k\Big)\partial dy_k$$

Il s'agit alors de vérifier si

$$\sum_{k=1}^{n}\partial\Big(\prod_{l=1, l\neq k} y_k\Big)dy_k \text{ et } \sum_{k=1}^{n} d\Big(\prod_{l=1, l\neq k} y_k\Big)\partial y_k$$

sont égales. En décomposant on obtient respectivement

$$\sum_{k,l=1; k\neq l}^{n}\Big(\prod_{m=1, m\neq k,l} y_m\Big)\partial y_l dy_k \text{ et } \sum_{k,l=1; k\neq l}^{n}\Big(\prod_{m=1, m\neq k,l} y_m\Big)dy_l \partial y_k$$

L'égalité s'en suit par changement de variable.. Ainsi, à présent, considérons un cas plus général avec un facteur $x \in \mathbb{L}$. On notera aussi $\partial y = \sum_{l=1}^{n} b_l \partial y_l$ avec $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{L}$.

$$\overline{d}(x\partial y) = \overline{d}\Big(x\Big(\sum_{l=1}^{n} x b_l \partial y_l\Big)\Big) = \sum_{l=1}^{n}\overline{d}(x b_l \partial y_l)$$

On applique la formule :

$$\sum_{l=1}^{n} d(xb_l)\partial y_l + xb_l\partial(dy_l) = \sum_{l=1}^{n}(b_l dx + xdb_l)\partial y_l + xb_l\partial(dy_l)$$
$$= \sum_{l=1}^{n} dx(b_l\partial y_l) + x(db_l\partial y_l + b_l\partial(dy_l))$$

Or $db_l\partial y_l + b_l\partial(dy_l) = \overline{d}(b_l y_l)$ donc le somme donne $\overline{d}(\partial y)$ égal à $\partial(dy)$ d'après ce qui précède. Ainsi, on obtient

$$dx\partial y + x\partial(dy)$$

Ce qui conclut tous les cas par linéarité.

3 Conjecture de Schanuel

3.1 Conjecture de Schanuel et transcendance

La conjecture de Schanuel concerne la fonction exponentielle. En effet, elle contient tous les résultats et conjectures connues sur la transcendance de cette fonction.

Tous les corps considérés seront supposés de caractéristique 0.

Conjecture 1 (de Schanuel)**.** *Soit $y_1, ..., y_n \in \mathbb{C}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors,*

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1, ..., y_n, e^{y_1}, ..., e^{y_n}) \ \geq \ n$$

Dans cet énoncé, le terme $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ désigne le degré de transcendance du corps $\mathbb{L}$ sur son sous-corps $\mathbb{K}$.

Dans la suite, on pourra faire référence à cette conjecture via appellation **(S)**.

Nous parlions de résultats connus concernant la transcendance de la fonction exponentielle. En voici quelques uns :

Corollaire 1. *Les nombres e et π sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

<u>*Démonstration :*</u> On choisissant $y_1 = 1$ et $y_2 = 2i\pi$ dans **(S)**, on obtient que :
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1, y_2, e^{y_1}, e^{y_2}) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(1, 2i\pi, e, 1) \geq 2$.

De la même manière, on peut montrer que e et e^e sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ (Problème de Schneider et Waldshmidt).

Corollaire 2 (Théorème de Baker)**.** *Soit $\alpha_1, ..., \alpha_n$ algébriques non-nuls. Alors,* $\log(\alpha_1), ..., \log(\alpha_n)$ *sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ si et seulement s'ils le sont sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ (corps des nombres algébriques) du corps $\mathbb{Q}$.*

<u>*Démonstration :*</u> En prenant $y_i = \log(\alpha_i)$, alors si les y_i sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, comme $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1, ..., y_n, e^{y_1}, ..., e^{y_n}) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1, ..., y_n, \alpha_1, ..., \alpha_n) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1, ..., y_n)$,
(S) implique que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1, ..., y_n) \geq n$.
Ainsi, les y_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Corollaire 3 (Théorème de Lindemann)**.** *Soit $\alpha_1, ..., \alpha_n$ algébriques linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors, $e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_n}$ sont algébriquement indépendants.*

3.2 Variantes formelles de la conjecture

Les variantes à la conjecture de Schanuel **(S)** seront au coeur du travail qui va suivre et sont d'ailleurs, le coeur du travail de Ax. Il est donc important de les introduire avant même de les manipuler.

Voici les énoncés de ces conjectures équivalentes qui, il faut le rappeler, ne transforme en aucun cas la conjecture de Schanuel en Théorème.

(S) Soit $y_1, ..., y_n \in \mathbb{C}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1, ..., y_n, e^{y_1}, ..., e^{y_n}) \ \geq \ n$$

(SF) Soit $y_1, ..., y_n \in \mathbb{C}[[X]]$ sans termes constants et linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Alors,

$$\dim_{\mathbb{C}(t)} \mathbb{C}(t)(y_1, ..., y_n, e^{y_1}, ..., e^{y_n}) \ \geq \ n$$

(Σ)**(Ax)** Soit $y_1, ..., y_n \in \mathbb{C}[[t_1, ..., t_m]]$. Si les y_i sont linéairements indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1, ..., y_n, e^{y_1}, ..., e^{y_n}) \ \geq \ n + \mathrm{rg}\left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j}\right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

3.3 Théorèmes de Ax

Théorème 1 (**Théorème III**). *(S)* $\Longleftrightarrow$ (Σ)*(Ax)*.

Le plus gros du travail de cette lecture sera de dévelloper la preuve du **Théorème III**, pour cela, on démontrera **Théorème I** et **Théorème II**.

Théorème 2 (**Théorème I**). *Soit $\mathbb{K} \supseteq C \supseteq \mathbb{Q}$ une suite d'extension de corps et Δ un ensemble de dérivée sur $\mathbb{K}$ vérifiant $\bigcap_{D \in \Delta} \mathrm{Ker}(D) = C$; Soit $y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n \in \mathbb{K}^*$, si les propriétés **(a)** et **(b)** ou **(a)** et **(b')** sont vérifiées avec :*

(a) $\forall D \in \Delta, \forall i \in \{1, ..., n\}, D(y_i) = D(z_i)/z_i$

(b) *Aucun produit non trivial de puissance de $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est dans C*

(b') *Les $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont $\mathbb{Q}$ linéairement indépendant modulo C.*

Alors

$$\dim_C(C(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n)) \geq n + \mathrm{rg}(D(y_i))_{1 \leq i \leq n, D \in \Delta}$$

Théorème 3 (**Théorème II**). *La conjecture (Σ)**(Ax)** est vraie si les (y_i) sont sans termes constants. C'est-à-dire, si les $(y_i - y_i(0))$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

L'article traite les résultats suivant :

Théorème 4. *Soit $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K} \supseteq C \supseteq \mathbb{Q}$ une suite d'extension de corps et Δ un ensemble de dérivée sur $\mathbb{L}$ vérifiant pour tout $D \in \Delta$, $D(E) \subseteq E$ et $\cap_{D \in \Delta} \mathrm{Ker} D = C$. Soit $y_1, ..., y_n, z_1, ...z_n \in \mathbb{L}^*$ et $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$. Si on vérifie les propriétés suivantes :*

(a) $\forall D \in \Delta, \forall i \in \{1, ..., n\}, D(y_i) = D(z_i)/z_i + x_i$

(b) *Aucun produit non trivial de puissance de* $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ *n'est algébrique dans* $\mathbb{K}$

Alors

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n) \geq n$$

Théorème 5. *Soit* $C \supseteq \mathbb{Q}$ *une extension de corps, et* $y_1, ..., y_n \in C[[t]]$*. Si*

$$\mathrm{rg}_C(y_1, ..., y_n) + \mathrm{rg}_C(\exp y_1, ..., \exp y_n) \leq n$$

Alors les $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ *sont* $\mathbb{Q}$ *linéairement dépendant.*

Nous ne nous intéresserons ici qu'au trois premiers théorèmes.

4 Preuve du Théorème de Ax par une approche algébrique

La démonstration ne s'invente pas. Nous allons d'abord passer par plusieurs lemmes et détailler leur démonstration avant de pouvoir s'attaquer à celle des **Théorème I, II** et **III**. La stratégie consiste à se ramener à une relation entre degré de transcendance et dimension d'un certain espace vectoriel, puis de déterminer des résultat sur ces espaces vectoriels. Ainsi, on pourra démontrer par l'absurde le **Théorème I**.

4.1 Plan

Pour démontrer le **Théorème I** qui est le théorème principale, nous allons démontrer un lemme, le **lemme 1**, qui va permettre de transporter le degré de transcendance vers une dimension d'un espace vectoriel, ainsi , si on suppose par l'absurde ; en reprenant les notations de l'énoncée du théorème,

$$m = \dim_C(C(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n)) < n + \mathrm{rg}(D(y_i))_{1 \leq i \leq n, D \in \Delta}$$

Alors on pourra considérer une famille d'élément bien choisie qui soient liées. Pour obtenir la contradiction, on fera appel au **lemme 2 et 3** ce qui concluera.

4.2 Lemmes

Tout d'abord, si on note $(\mathbb{L}, \Delta)$ une extension différentielle de $(\mathbb{K}, d)$, alors d'une part $\mathbb{L}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, et en vertu de la proposition 7, on dispose d'un $\mathbb{L}$-module $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ qui vérifie la propriété universelle des $\mathbb{K}$-dérivée sur $\mathbb{L}$. De plus, si $d \in Der_{\mathbb{K}}\mathbb{L}$ on notera le plus souvent son extension $\overline{d}$. De plus, on supposera à chaque fois que les corps mis en jeu sont de caractéristique nulle afin qu'un polynôme non constant est une dérivée non nulle.

4.2.1 Lemme 1

Proposition 8 (Lemme 1)**.** *On considère $C \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ une suite d'extension de corps tous de caractéristique nulle ; on note ∂ pour la C-dérivée de $\mathbb{L}$ vers $\Omega_{\mathbb{L}/C}$. On considère $\partial\mathbb{K} = \{\partial x, x \in \mathbb{K}\}$ et $F = \mathrm{V}ect_{\mathbb{L}}(\partial\mathbb{K})$. Le lemme affirme que si $\dim_C \mathbb{K} = m$ (base de transcendance) alors $\dim_{\mathbb{L}} F = m$ (base algébrique).*

<u>*Démonstration :*</u> La preuve se fait en deux étapes. Montrons d'abords $\dim_{\mathbb{L}} F \leq m$, pour cela, on considère $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}$ algébriquement dépendant sur C. De fait, on dispose de $P \in C[X_1, \ldots, X_k]$ non nul et de degré minimal avec $P(x_1, \ldots, x_k) = 0$. En dérivant on obtient

$$\sum_{i=1}^{k} \partial_{x_i} P(x_1, \ldots, x_k) \partial x_i = 0$$

Par minimalité du degré de P, on ne peut pas avoir tous les $\partial_{x_i} P(x_1, \ldots, x_k) = 0$ (aussi car $P' \neq 0$ dans un corps de caractéristique nulle. Il suit alors $\dim_{\mathbb{L}} F \leq m$

Considérons à présent $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{K}$ une base de transcendance de $\mathbb{K}$ sur C et montrons que $\partial x_1, \ldots, \partial x_m \in \Omega_{\mathbb{L}/C}$ est libre, on obtiendra ainsi l'autre inégalité.

Pour cela, on considère $D_i \in \mathrm{Der}_C\mathbb{L}$ vérifiant pour $i = 1, \dots, m$ l'égalité $D_i(x_j) = \delta_{i,j}$. On considère $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{L}$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial x_i = 0$$

Par application de $\phi_j \in \widehat{\Omega}_{\mathbb{L}/C}$ tel que $\phi_j \circ \partial = D_j$, on obtient $\lambda_j = 0$ ce qui conclut.

A présent, on souhaite déterminer des propriétés sur les espaces vectoriels mis en jeu. C'est l'objet des lemmes 2 et 3.

4.2.2 Lemme 2

Proposition 9 (Lemme 2)**.** *Soient $C \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ une suite d'extension de corps et $\Delta \subset \mathrm{Der}(\mathbb{L})$ avec $\bigcap_{D \in \Delta} \mathrm{Ker} D = C$ et pour $D \in \Delta$ on a $D(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$. On note $\overline{\Delta}$ l'ensemble des dérivées prolongées sur $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ et $\overline{C} = \cap_{\overline{D} \in \overline{\Delta}} \ker \overline{D} \subset \Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$. On constate que $\overline{C}$ est un C-espace vectoriel. Si je pose l'application bilinéaire $b : \mathbb{L} \times \overline{C} \to \Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ avec pour $(x, \omega) \in \mathbb{L} \times \overline{C}$, $b(x, \omega) = x\omega$. Alors on peut associé b à l'application $\beta : \mathbb{L} \otimes_C \overline{C} \to \Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ par propriété universelle du tenseur. Le théorème affirme que β est injective.*

<u>Démonstration :</u> On procède par l'absurde, on dispose alors de $y \in \mathbb{L} \otimes \overline{C}$ non nul avec $\beta(y) = 0$. Si on note $y = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes \omega_k$ avec $n \geq 1$ et, pour $k = 1, \cdots, n$, $x_k \in \mathbb{L}$ et $\omega_k \in \overline{C}$. On suppose que n est minimal et quitte à permuter les termes et à diviser par f_1, on suppose que $f_1 = 1$, en appliquant β il vient

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \omega_k = 0$$

Puis en appliquant $\overline{D} \in \overline{\Delta}$

$$\sum_{k=2}^{n} D(x_k) \omega_k = 0$$

Par minimalité de n il vient que pour $k \geq 2$, on a $D(x_k) = 0$ et ce, pour tout $D \in \Delta$ donc les (x_k) sont dans C. Il suit que pour $k \geq 1$, $x_k \otimes \omega_k = 1 \otimes x_k \omega_k$ donc $y = 1 \otimes \sum_{k=1}^{n} x_k \omega_k = 0$ ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse initiale, ce qui conclut.

4.2.3 Lemme 3

Proposition 10 (Lemme 3)**.** *Soient $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ une suite d'extension de corps. On considère $\partial \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}, \Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}})$, $\partial\mathbb{L}/\mathbb{L}$ le $\mathbb{Z}$-module $\{\partial x/x, x \in \mathbb{L}^{\times}\}$, l'application bilinaire produit de $\mathbb{K} \times \partial\mathbb{L}/\mathbb{L}$ dans $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ et $\partial\mathbb{L}$ le $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$. C'est à partir de ces données qu'on pose l'application*

$$\gamma : \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \partial\mathbb{L}/\mathbb{L} \to {}^{\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}}/_{\partial\mathbb{L}}$$

. Le théorème affirme que γ est injective.

Nous aurons besoin des résultats itermédiaires suivant.

Proposition 11. *Soient* $\mathbb{K} \subsetneq \mathbb{L}$ *une extension de corps avec* $\mathbb{K}$ *algébriquement fermé dans* $\mathbb{L}$ *et* $W = \{C \subset \mathbb{L}$ *sous-corps algébriquement fermé dans* $\mathbb{L}\ |\mathbb{K} \subset C, \dim_C(\mathbb{L}) = 1\}$*, alors*

$$\bigcap_{C \in W} C = \mathbb{K}$$

<u>*Démonstration :*</u> Montrons que pour $t \in \mathbb{L}$ transcendant dans $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, on dispose d'un corps $C \in W$ tel que $t \notin C$, de cette façon, l'intersection donnera un corps dont tous les éléments sont algébriques dans $\mathbb{K}$ et par hypothèse, ils seront dans $\mathbb{K}$ ce qui conclura l'égalité.

Pour cela, on considère t, on dispose de $B \subset \mathbb{L}$ tel que $B \cup \{t\}$ soit une base de transcendance de l'extension de corps $\mathbb{L}/\mathbb{K}$. On considère C la fermeture algébrique de $\mathbb{K}(B)$ relativement à $\mathbb{L}$. C contient $\mathbb{K}$, est algébriquement fermé dans $\mathbb{L}$ et enfin, $t \notin C$, d'où $\dim_C \mathbb{L} = 1$; ainsi $C \in W$.

Proposition 12. *Soit* $\mathbb{K}$*, un corps de caractéristique nulle et* Δ *un ensemble de dérivée sur* $\mathbb{K}$*, alors* $C = \cap_{d\in\Delta}\mathrm{K}er(d)$ *est algébriquement fermé dans* $\mathbb{K}$.

<u>*Démonstration :*</u> On note $\mathbb{F}$ la fermeture algébrique de C dans $\mathbb{K}$. Soit $x \in \mathbb{F}$, on dispose de $P \in C[X]$ tel que $P(x) = 0$. En appliquant $d \in \Delta$, on obtient $d(x)P'(x) = 0$, comme $P'(x) \neq 0$ on en déduit que $d(x) = 0$ ce qui conclut.

<u>*Démonstration :*</u> La preuve s'effectue en trois temps, le premier quand $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = 0$, le second quand $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = 1$ et le dernier dans le cas quelconque. Pour la suite on considère $m \geq 0$ $x_1, \cdots, x_m \in \mathbb{K}$ une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ et $v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{L}$ et $v \in \mathbb{L}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \partial v_k / v_k = \partial v$$

Nous montrerons dans les trois cas que pour $k = 1, \cdots m$ on a $\partial v_k = 0$. D'après le deuxième résultat, on peut supposer $\mathbb{K}$ algébriquement fermé dans $\mathbb{L}$

Pour $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = 0$, alors $\mathbb{L}$ est une extension algébrique de $\mathbb{K}$ lui-même algébriquement fermé d'où pour $k = 1, \cdots, m$, on a $v_k \in \mathbb{K}$ ce qui conclut

Pour $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = 1$, on pose $t \in \mathbb{L}$ transcendant sur $\mathbb{K}$. Il suit que $\mathbb{L} \simeq \mathbb{K}(t)$. On considère les polynôme irréductibles $p \in \mathbb{K}(t)$ de la forme $p = t - x$ avec $x \in \mathbb{K}$, car $\mathbb{K}$ est fermé dans $\mathbb{L}$, et on pose la valuation associée à p que l'on note ν_p. Par exemple, si $p = t-1$ et $x = \frac{t(t+1)}{(t-1)^2}$ alors $\nu_{t-1}(x) = -2$. Par convention, $\nu_p(0) = \infty$. On a alors :

$$\nu_p : \mathbb{L} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

On considère ensuite l'application $\mu_p : \Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} \to \mathbb{K}$, comme on (∂t) engendre $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$, on peut identifier son coefficient qui est dans $\mathbb{L}$. μ_p est alors le résidu en p de la fonction polynômiale associée. Comme toute fraction polynômiale $P \in \mathbb{K}(t)$ peut se décomposer de la forme

$$P = Q + \sum_{p \in \mathbb{K}, n \leq 1} \frac{a_{p,n}}{(t-p)^n}$$

Avec $Q \in \mathbb{K}[t]$. Alors $\mu_p(P) = a_{p,1}$ ce qui est $\mathbb{K}$-linéaire. De plus, si on dérive, on voit bien que $\mu_p(\partial P) = 0$. Enfin, on suppose que $P \neq 0$ et on note $m = \nu_p(P)$, alors :

$$\partial P/P = \frac{(t-p)^{-m}\partial P}{(t-p)^{-m}P}$$

Il s'en suit que $\nu_p((t-p)^{-m}P) = 0$, avec pour valeur en p, $a_{p,m}$. Par ailleurs, pour $\nu_p((t-p)^{-m}\partial P) = -1$, avec pour résidu $ma_{1,p}$, il s'en suit que $\mu_p(\partial P/P) = \nu_p(P)$. On applique alors μ_p à l'égalité, ce qui donne

$$\mu_p\Big(\sum_{k=1}^{m} x_k \partial v_k/v_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} x_k \nu_p(v_k) = \mu_p(\partial v) = 0$$

Or on a $x_1, \cdots, x_k$ $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant et comme pour tout $p \in \mathbb{L}$ et $k = 1, \cdots, m$, $\nu_p(v_k) \in \mathbb{Z}$, il suit que $\nu_p(v_k) = 0$. Par conséquent, on a $v_k \in \mathbb{K}(t)$ constante, c'est-à-dire $v_k \in \mathbb{K}$ ce qui est le résultat attendu.

On considère $\mathbb{F}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$ dans W définie dans le premier résultat et le $\mathbb{L}$-module $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{F}}$ et $\overline{\partial} \in Der_{\mathbb{F}}(\mathbb{L}, \Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{F}})$ la dérivée associé, alors d'après la propriété universelle de la dérivée, on dispose d'un morphisme de $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ vers $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{F}}$ permettant de passer de la dérivée ∂ à $\overline{\partial}$. En appliquant ce morphisme à l'égalité, on obtient

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \overline{\partial} v_k/v_k = \overline{\partial} v$$

Comme $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{L} = 1$, on se ramène au cas précédent. On en déduit que pour $k = 1, \cdots, m$, $v_k \in \mathbb{F}$ et ceci, pour tout $\mathbb{F} \in W$. Par le premier résultat, on en déduit que $v_k \in \mathbb{K}$ ce qui conclut.

L'intérêt des deux derniers théorèmes est que par injectivité, si on a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \otimes_R v_k = 0$$

Alors il vient que la combinaison de tenseur peut se réécrire

$$\lambda \otimes_R \sum_{k=1}^{n} r_k v_k$$

Avec $\lambda = 0$ ou $\sum_{k=1}^{n} r_k v_k = 0$ où $r_1, \cdots r_n \in R$ l'anneau du module en question. De cette façon, si on sait qu'un λ_i n'est pas nul, on peut transporté la dépendance du corps associé à l'anneau associé.

4.3 Théorèmes

Pour démontrer les théorèmes qui vont suivre, on considère le résultat suivant.

Proposition 13. *Soit* $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ *des corps,* $d \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\mathbb{L}$ *et* $x, y \in \mathbb{L}$ *avec* $y \neq 0$ *et* $\omega = \partial x - \partial y/y \in \Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$. *Alors* $\overline{d}\omega = \partial(dx - dy/y)$. *Ici* $\overline{d}$ *est le prolongement de* d *sur* $\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$.

<u>*Démonstration :*</u> On pose le calcul : on a $\overline{d}\omega = \overline{d}(\partial x - \partial y/y) = \partial(dx) - \partial(dy)/y + (d(y)/y^2)\partial y$. Par ailleurs, on remarque $\partial(dy/y) = \partial(dy)/y - dy/y^2\partial y$, ce qui conclut l'égalité.

4.3.1 Théorème I

Tout d'abords, rappelons l'énoncée du **Théorème I** :

<u>*Rappel :*</u> Soit $\mathbb{L} \supseteq C \supseteq \mathbb{Q}$ une suite d'extension de corps et Δ un ensemble de dérivée sur $\mathbb{K}$ vérifiant $\bigcap_{D \in \Delta} \mathrm{Ker}(D) = C$; Soit $y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n \in \mathbb{L}^*$, si les propriétés **(a)** et **(b)** ou **(a)** et **(b')** sont vérifiées avec :

(a) $\forall D \in \Delta, \forall i \in \{1, ..., n\}, D(y_i) = D(z_i)/z_i$

(b) Aucun produit non trivial de puissance de $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est dans C

(b') Les $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont $\mathbb{Q}$ linéairement indépendant modulo C.

Alors

$$\dim_C(C(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n)) \geq n + \mathrm{rg}(D(y_i))_{1 \leq i \leq n, D \in \Delta}$$

La démonstration se fait en deux parties. La première consiste à changer l'ensemble Δ en un autre ensemble. Si $r = \mathrm{rg}(D(y_i))_{1 \leq i \leq n, D \in \Delta}$, on pose $D_1, \cdots, D_r \in \Delta$ et $y_1, \cdots, y_r \in \mathbb{L}$, alors l'ensemble considéré est $\{D_1, \ldots, D_r\} \cup \Delta'$ avec pour $i, j = 1, \cdots, r$, $D_i(y_j) = \delta_{i,j}$ et pour $D \in \Delta'$, $D(y_i) = 0$; avec $\cap_{D \in \Delta'} = C$ et $\mathrm{rg}(D(y_i))_{1 \leq i \leq n, D \in \Delta} \leq r$. De fait, si l'on démontre l'inégalité avec Δ', on la démontre pour Δ ce qui concluera. Ensuite on démontre le théorèment avec cet ensemble. Nous le construirons vers la fin de la démonstration.

Supposons Δ ainsi construit et supposons **(a)** et **(b)** vrai. Supposons par l'absurde que $m = \dim_C(C(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n)) < n + \mathrm{rg}(D(y_i))_{1 \leq i \leq n, D \in \Delta}$. On met en jeu le **lemme 1** en notant $\mathbb{K} = C(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n)$, il vient que $F = Vect_{\mathbb{L}}(\partial\mathbb{K})$ est de dimension m, pour $k = 1, \cdots, n$ on pose $\omega_k = \partial y_k - \partial z_k/z_k \in F$ et $\partial y_1, \cdots, \partial y_r \in F$ les éléments définis à partir de Δ. Si l'on concatène les éléments que l'on vient de poser, on obtient une famille de $n + r > m$ éléments, ainsi, elle est liée et on pose $\alpha_k \in \mathbb{L}$ pour $k = 1, \cdots, n$ et $\lambda_l \in \mathbb{L}$ pour $l = 1, \cdots, r$ non tous nuls avec

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k + \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \partial y_l$$

Soit $D \in \Delta$ et $k = 1, \cdots, n$, on remarque par le résultat démontré en introduction et par hypothèse que $\overline{D}\omega = 0$ et $\overline{D}(\partial y_l) = \partial(D(y_l)) = 0$ pour $l = 1, \cdots, r$ car dans ce cas, on a $D(y_l) \in \{0, 1\}$ par construction. On en déduit que la famille de vecteur est dans $\overline{C}$. Ainsi,

$$\beta(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \otimes \omega_k + \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \otimes \partial y_l) = 0$$

D'après le **lemme 2**, on peut supposer $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in C$. A présent, supposons qu'il existe $\alpha_i \neq 0$, on projette l'égalité dans ${}^{\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}}/_{\partial \mathbb{L}}$. On obtient l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\partial z_k}/z_k = \overline{0} \in {}^{\Omega_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}}/_{\partial \mathbb{L}}$$

D'après le **lemme 3**, on peut cette fois disposer de $N_1, \cdots, N_n \in \mathbb{Z}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^{n} N_k \partial z_k / z_k = 0$$

De fait, on a $\partial\Big(\prod_{k=1}^n {z_k}^{N_k}\Big) = 0$, alors $\prod_{k=1}^n {z_k}^{N_k} \in C$ ce qui contredit l'hypothèse **(b)**.

Ainsi, on a $\alpha_1, \cdots, \alpha_n = 0$ et il reste

$$\sum_{l=1}^{r} \lambda_l \partial y_l = 0$$

Pour $i = 1, \cdots, r$, on considère $f_i \in \widehat{\Omega}_{\mathbb{L}/C}$, l'application linéaire associé à D_i. On l'applique à l'égalité :

$$\sum_{l=1}^{r} \lambda_l f_i(\partial y_l) = \sum_{l=1}^{r} \lambda_l D_i(y_l) = \lambda_l = 0$$

On conclut que $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_r = 0$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite. Ainsi

$$m = \dim_C(C(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n)) \geq n + \mathrm{rg}(D(y_i))_{1 \leq i \leq n, D \in \Delta}$$

Supposons ici **(a)** et **(b')** vrai et montrons que cela implique **(b)**. En effet, supposons par l'absurde **(b)** faux. Alors on dispose de $N_1, \ldots, N_n \in \mathbb{Z}$ non tous nuls avec $\prod_{k=1}^n z_k^{N_k} = z \in C$. Ainsi, pour tout $D \in \Delta$ il vient

$$0 = D(z)/z = \sum_{k=1}^{n} N_k D(z_k)/z_k \overset{\textbf{(a)}}{=} \sum_{k=1}^{n} N_k D(y_k) = D(\sum_{k=1}^{n} N_k y_k)$$

Ainsi, les $y_1, \cdots, y_n$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendant dans C ce qui contredit **(b')**. On conclut le **Théorème I** vrai.

Reste cependant à prouver l'existence de Δ'. Pour cela, on pose $r = \mathrm{rg}(D(y_i))_{1 \leq i \leq n, D \in \Delta}$. De fait, on dispose d'une sous-matrice à celle-ci de taille r qui soit inversible. De là on considère $y_1, \cdots, y_r$ parmi de (y_i) et $D_1, \cdots, D_r \in \Delta$ tel que

$$M = (D_i(y_j))_{1 \leq i,j \leq r}$$

soit inversible, on note $N = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq r}$ sont inverse et on pose les nouvelles dérivées

$$\widehat{D}_i = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} D_k \in \mathrm{D}er_C \mathbb{L}.$$

A présent, on considère $D \in \Delta$ que l'on va remplacer. Pour cela, on considère le vecteur $(D(y_i))_{1\leq i\leq r}$. Comme M est inversible, on dispose d'un unique vecteur $(b_i(D))_{1\leq i\leq r}$ tel qu'appliqué à M on obtienne le premier. De fait, on a pour $i = 1, \cdots, r$

$$D(y_i) = \sum_{k=1}^{r} b_k(D) D_k(y_i).$$

On pose alors $\tilde{D} = D - \sum_{k=1}^{r} b_k(D) D_k \in \mathrm{D}er_C \mathbb{L}$. Voici le nouvel ensemble

$$\tilde{\Delta} = \{\tilde{D}, D \in \Delta\} \cup \{\widehat{D}_1, \cdots, \widehat{D}_r\}$$

Nous allons montrer les propriétés affirmées en introduction.

- Soit $c \in C$, alors comme tout éléments de $\tilde{\Delta}$ est combinaison de ceux de Δ, on a pour $D \in \tilde{\Delta}$, $D(c) = 0$.

  Réciproquement, soit $x \in \mathbb{L}$ tel que pour tout $\tilde{D} \in \tilde{\Delta}$, on a $\tilde{D}(x) = 0$. En particulier, pour $i = 1, \cdots, r$, on a

  $$\widehat{D}_i(x) = 0 = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} D_i(x)$$

  Par inversibilité de N, on en déduit pour $j = 1, \cdots, r$, $D_j(x) = 0$. Alors pour tout $D \in \Delta$, on a

  $$0 = \tilde{D}(x) = D(x) - \sum_{k=1}^{r} b_k(D) D_k(x) = D(x)$$

  Ce qui conclut $x \in C$.

- Pour $i, j = 1, \ldots, r$, $\widehat{D}_i(y_j) = \delta_{i,j}$, cela est dû au fait que N est l'inverse de M. De plus, par construction, pour $D \in \Delta$, on a $\tilde{D}(y_i) = 0$.

- Comme chaque $\tilde{D} \in \tilde{\Delta}$ est linéaire en les éléments de Δ. Il vient que $\mathrm{rg}(\widehat{D}(y_i))_{1\leq i\leq n, \widehat{D}\in\tilde{\Delta}} \leq r$.

4.3.2 Théorème II

La démonstration du **Théorème II** est une application du **Théorème I**.

On considère $C = \mathbb{C}$, $\mathbb{L} = \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[[t_1, \cdots, t_m]])$, $\Delta = \{\frac{\partial}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial t_m}\}$ et pour $i = 1, \cdots, n$, $z_i = \exp y_i$. Par hypothèse, la famille $(y_i - y_i(0))_{1\leq i\leq n}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant. Ainsi, $((y_i)_{1\leq i\leq n})$ est $\mathbb{Q}$-linairement indépendant dans $\mathbb{C}$. On a les hypothèse du **Théorème I**, il s'en suit

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(y_1, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_n) \geq n + \mathrm{rg}\left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$$

4.3.3 Théorème III

Le sens indirect est immédiat. Supposons **(S)** vrai et montrons que l'on a (Σ)**(Ax)**. Pour cela, on considère $F = \mathrm{V}ect_{\mathbb{Q}}(y_1 - y_1(0), \cdots, y_n - y_n(0))$, on suppose aussi que $(y_1 - y_1(0), \cdots, y_p - y_p(0))$ est une base F. On note alors, pour $j = p+1, \cdots, n$,

$$y_j - y_j(0) = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k}(y_k - y_k(0)).$$

On remplace alors les éléments $y_1, \cdots, y_n$ par les suivants, $\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n$, avec pour $i = 1, \cdots, p$, $\tilde{y}_i = y_i$ et pour $j = p+1, \cdots, n$, $\tilde{y}_j = y_j - \sum_{k=1}^{p} a_{j,k} y_k \in \mathbb{C}$.

On a toujours $(\tilde{y}_i)$ linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$, l'égalité entre les degrés de transcendance est conservé car l'exponentielle d'une somme est le produit d'une exponentielle, et enfin, par linéarité, on a

$$\mathrm{rg}\left(\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial t_j}\right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \leq \mathrm{rg}\left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j}\right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

Ainsi, si l'on montre l'inégalité avec $(\tilde{y}_i)$, on la montre pour (y_i). Par ailleurs, on a $y_1 - y_1(0), \cdots, y_p - y_p(0)$ $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant et par hypothèse, $\tilde{y}_{p+1}, \cdots, \tilde{y}_n$ linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$. On note alors $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\tilde{y}_{p+1}, \cdots \tilde{y}_n, \exp(\tilde{y}_{p+1}), \cdots, \exp(\tilde{y}_n))$, alors par **(S)**, on a $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{F} \geq n - p$. De plus, par un résultat analogue au **Théorème 1**, on a :

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(y_1, \cdots, y_p, \exp(y_1), \cdots, \exp(y_p)) \geq p + \mathrm{rg}\left(\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial t_j}\right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$$

Par ailleurs, on a

$$\mathrm{rg}\left(\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial t_j}\right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m} = \mathrm{rg}\left(\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial t_j}\right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

par construction. Et si je note $\mathbb{K} = \mathbb{F}(y_1, \cdots, y_p, \exp(y_1), \cdots, \exp(y_p))$, on a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{K}$. De fait,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{K} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{F} + \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \geq n + \mathrm{rg}\left(\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial t_j}\right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$$

Avec $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n, \exp(\tilde{y}_1), \cdots, \exp(\tilde{y}_n))$. On en conclut donc l'équivalence.

5 Bibliographie

Références

[1] James Ax, *On Schanuel's Conjecture*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol 93, 1971, pp252 - 268.

[2] Siegfried Bosch, *Algebric Geometry and Commutative Algebra*, Springer.

[3] Patrice Tauvel, *Corps Commutatifs et Théorie de Galois*, Calvage et Mounet, Nouvelle edition, 2008.

[4] Yvette Amice, *Conjecture de Schanuel sur la Transcendance d'Exponentielle*, Numdam, 1970.