XIII Probabilités

XIII.A Questions de cours :

1)
2)
3)

XIII.B Exercices :

Exercice 1: * (Formule de Wald)**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace Ω identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$ et (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
On suppose que $(N, X_1, \dots, X_n, \dots)$ sont mutuellement indépendantes et on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
Montrer

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

Exercice 2: **

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 3: ****

Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec un dé équilibré. Le joueur A gagne dès que la séquence PPF apparaît. Le joueur B gagne dès que la séquence FPF apparaît. Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs a gagné.

1. Quelle est la probabilité que le joueur A gagne ?
2. Quelle est la probabilité que le joueur B gagne ?
3. Quelle est la probabilité que le jeu se poursuive indéfiniment sans qu'aucun des deux joueurs ne gagne ?

Exercice 4: **

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad P((X,Y) = (j,k)) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}.$$

Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5: **

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relié par une suite de relectures pour correction. À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième relecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Exercice 6: **

Deux joueurs A et B s'affrontent autour d'un jeu. A joue la première partie, B joue la deuxième, A joue la troisième, et ainsi de suite. Les deux joueurs jouent $2n$ parties, et le premier qui gagne une partie a gagné l'ensemble du jeu. On suppose que A a une probabilité $a \in [0,1]$ de gagner une partie donnée, B une probabilité $b \in [0,1]$, et que les parties sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne gagne ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne ? que B gagne ?
3. À quelle condition le jeu est-il équilibré ?

Exercice 7: * (Loi de Poisson)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 8: *** (La loi sans mémoire)

On dit qu'une variable aléatoire est sans mémoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\mathbb{P}(X > k+n \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k).$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que X est sans mémoire.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire. On pose $q = \mathbb{P}(X > 1)$.
   a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X > n) = q^n$.
   b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Exercice 9: **** (Diviseurs)

Soit $n \geq 2$; on choisit de manière équiprobable un des entiers compris entre 1 et n ; soit p un diviseur de n et A_p l'événement : le nombre choisi est divisible par p.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.
2. Montrer que si $p_1, \ldots, p_r$ sont les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. En déduire le calcul de $\varphi(n)$.