IX Réduction

IX.A Questions de cours :

1) Montrer que diagonalisable équivaut à dimension égale somme des dimensions des sous-espaces propres.
2) Montrer que les sous-espaces propres sont en sommes directe.
3) Montrer que trigonalisable équivaut à polynôme caractéristique scindé, en déduire que tout endomorphisme est automatiquement trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

IX.B Exercices :

Exercice 1: *

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de J.
2. La matrice J est-elle diagonalisable ?

Exercice 2: **

Soit J la matrice Attila.

1. Montrer que la matrice J est diagonalisable
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?

Exercice 3: *

1. Soit $\delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \quad ; \quad P \mapsto P'$ l'application de dérivation. A-t-on δ diagonalisable ?
2. On considère maintenant $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \quad ; \quad P \mapsto P'$. A-t-on Δ diagonalisable ?

Exercice 4: **

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois nombres complexes.

1. Ecrire M en fonction de I_3, J et J^2 où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que J est diagonalisable, donner son spectre.
3. En déduire que M est diagonalisable, donner son spectre.

Exercice 5: **

Soit $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis A^3.
2. Déterminer les valeurs propres de Aavec leur multiplicités ainsi que la dimension du sous-espace propre associé. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 6: ***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 7: * Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$**

Notons $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$. Alors $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Si l'élève n'a pas encore vu le cours sur la diagonalisation, trigonalisation il admettre que toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 8: *

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de J.
2. La matrice J est-elle diagonalisable ?

Exercice 9: *** Matrice compagnon

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension fini E. On dit que u est cyclique si il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrer que u est cyclique si et seulement si la matrice de u dans une certaine base est de la forme :
$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C.
3. Soit λ une valeur propre de C, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.
4. En déduire une CNS pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.

Exercice 10: *** Matrice circulante

Soit $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont trois nombres complexes.

1. Ecrire M en fonction de J et de ses puissances où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que J est diagonalisable, donner son spectre.
3. En déduire que M est diagonalisable, donner son spectre.

Exercice 11: ** Système différentiel

On note les éléments de $\mathbb{R}^3$ en colonne. Déterminer les éléments $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \\ \psi \end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ tels que :

$$\begin{cases} 2\phi' &= \phi + \chi + 2\psi \\ 2\chi' &= \phi + \chi - 2\psi \\ 2\psi' &= -\phi + \chi + 4\psi \end{cases}$$