.

Exercices de Khôlles en MP-MP*

2025-2026

Kylian Prigent

Table des matières

1 Séries numériques

1.A Questions de cours :

1. Règle de D'Alembert
2. Relations de comparaisons des sommes partielles, restes, séries, ...
3. Séries de Riemann

1.B Exercices :

Exercice 1: *

1. Montrer que si $0 < l < 1$ et si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Quelle est la nature de $\sum \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 2: *

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$
2. $\sum \frac{\sin(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2})}{n}$
3. $\sum \frac{\sin(\frac{10^6\pi-1}{\sqrt{n}})}{n^{2/3}}$
4. $\sum \frac{1}{n+\frac{3}{2}n(n^{1/8}+1)}$

Exercice 3: * (Loi de Poisson et loi géométrique)

1. Soit $\lambda > 0$. Déterminer la nature de $\sum p_n$ où $p_n = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$. Si elle converge donner sa valeur. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ si $\mathbb{P}(X = n) = p_n$.
2. Soient $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
3. Soit $0 < p < 1$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} p_n$ où $p_n = p(1-p)^{n-1}$. Si elle converge donner sa valeur.

Exercice 4: **

1. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n\ln(n)^a}$ quand $a \leq 0$
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n\ln(n)^a}$ quand $a > 0$
3. En déduire la nature de $\sum \frac{1}{n\ln(n)^{1/2}\ln(\ln(n))}$.

Exercice 5: **

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels strictement positifs qui décroît vers 0.
Quelle est la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$?

Exercice 6: **

Soit $\alpha > 0$. Étudier $\sum u_n$ quand $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{5\alpha}}\right)$?

Exercice 7: **

Soit $\sum a_n$ une série de nombres réels convergente. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} ka_k \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.

Exercice 8: ***

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$
2. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_n$ converge. On note γ sa limite.
3. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma$.

Exercice 9: ***

1. En utilisant la sommation des relations de comparaison, déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$ pour $a > 1$.
2. Montrer la même chose avec une comparaison série-intégrale.

Exercice 10: *** (Formule de Wald)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace Ω identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$ et (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
On suppose que $(N, X_1, \dots, X_n, \dots)$ sont mutuellement indépendantes et on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Montrer

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

Exercice 11: ****(*)

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.
2. Donner un équivalent de u_n où : $\left\{\begin{array}{ccc} u_0 & \in & \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} & = & \ln(1+u_n) \end{array}\right.$.
3. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.
4. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n.

2 Espaces préhilbertiens - Espaces euclidiens

2.A Questions de cours :

1. Montrer que $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si ${}^tMM = I_n$ où M est la matrice de u dans une BON.
2. Enoncer et démontrer le théorème de représentation des formes linéaires.
3. Montrer qu'un endomorphisme orthogonal préserve le produit scalaire.
4. Montrer que tout élément de $SO_3(\mathbb{R})$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$.
5. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2.B Exercices :

Exercice 1: *

Déterminer f^* quand $f : x \mapsto \langle a\ ,\ x\rangle b - \langle b\ ,\ x\rangle a$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

est-elle orthogonale ? une rotation ? Quels sont ses axes ?

Exercice 2: *

La matrice

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

est-elle orthogonale ? une rotation ? Quels sont ses axes ?

Exercice 3: *

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On considère la plan vectoriel P et la droite vectorielle D définis par :

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad / \quad x + y + z = 0 \right\} \qquad , \qquad D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad / \quad x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \right\}$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \bigoplus D$
2. Soit p la projection sur P parallèlement à D. Pour $u \in \mathbb{R}^3$ donner $p(u)$. Donner la matrice de l'endomorphisme p dans la base canonique.

Exercice 4: **

1. Démontrer que $\ker(u) = \ker(u^* \circ u)$
2. Démontrer que $\mathrm{im}(u^*) = \mathrm{im}(u^* \circ u)$

Exercice 5: **

Soit a, b, c trois réels. On pose $S = a+b+c$ et $\sigma = ab+bc+ac$ et $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$

1. Donner une CNS sur S et σ pour que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$
2. Donner une CNS sur S et σ pour que $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$

Exercice 6: **

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux.
Démontrer $\ker(P(f)) \perp \ker(Q(f^*))$

Exercice 7: ***

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que
$$n \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}.$$
2. A quelle condition a-t-on égalité ? Est-ce possible en dimension 3 ? 4 ?

(Indication : penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Exercice 8: ***

Soient a et b deux réels. On considère l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & aM + b\,{}^tM \end{array}$$

A quelle condition a-t-on f orthogonale ?

Exercice 9: ****

1. Montrer que $\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions.
(Indication : montrer que toute isométrie s'écrit comme produit d'au plus n réflexions.)
2. En déduire que $\mathcal{SO}(E)$ est engendré par les retournements.

3 Familles sommables

3.A Questions de cours :

1. Montrer que si D est dénombrable et D' est au plus dénombrable alors $D \cup D'$ est au plus dénombrable ?
2. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable
3. Montrer que le support d'une famille sommable est dénombrable.

3.B Exercices :

Exercice 1: *

Montrer, en utilisant le cours sur les familles sommables, que si $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Exercice 2: **

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d(n)\mathrm{e}^{-n} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-p}}{1-\mathrm{e}^{-p}}.$$

Exercice 3: ***

Montrer que l'ensemble des points de discontinuités d'une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.
Indication : on pourra commencer par regarder le cas d'un segment.

Exercice 4: *

Étudier $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$ où $\begin{cases} \text{si } p > q, & u_{p,q} = 0, \\ \forall p \in \mathbb{N}, & u_{p,p} = 1, \\ \text{si } p < q, & u_{p,q} = -\frac{1}{2^{q-p}}. \end{cases}$

Exercice 5: ** (Théorème de Mertens)**

On suppose que $\sum u_n$ est absolument convergente de somme S, et que (v_n) converge vers L où u et v désignent des suites complexes.

1. Montrer que $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ tend vers LS.
2. Maintenant, on suppose $\sum u_n$ absolument convergente et $\sum v_n$ convergente, on note U et V leurs sommes. Montrer que $\sum w_n$ converge et que $\sum w_n = UV$. C'est le théorème de Mertens.

Exercice 6: *

Calculer la somme suivante en justifiant son existence : $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

Exercice 7: **

On dit qu'un réel x est un **nombre algébrique** s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et des entiers relatifs $a_0, \dots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ tels que

$$a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Le plus petit entier d vérifiant cette propriété est alors le **degré** de x.

1. Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
2. Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré d est au plus dénombrable.
3. Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Exercice 8: * (Formule de Wald)**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace Ω identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$ et (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
On suppose que $(N, X_1, \dots, X_n, \dots)$ sont mutuellement indépendantes et on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
Montrer

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

Exercice 9: *

Démontrer l'existence et calculer $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.
Indication : Procéder par décomposition en éléments simples.

Exercice 10: *

Étudier la sommabilité de la famille $\frac{(-1)^p}{q^p}$ où $p, q \geq 2$.

4 Elements propres

4.A Questions de cours :

1. Définir valeur propre, vecteur propre et élément propre.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.
3. Énoncer le théorème du rang

4.B Exercices :

Exercice 1: *

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de J.
2. La matrice J est-elle diagonalisable ?

Exercice 2: **

Soit J la matrice Attila.

1. Montrer que la matrice J est diagonalisable
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?

Exercice 3: *

1. Soit $\delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \quad ; \quad P \mapsto P'$ l'application de dérivation. A-t-on δ diagonalisable ?
2. On considère maintenant $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \quad ; \quad P \mapsto P'$. A-t-on Δ diagonalisable ?

Exercice 4: **

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois nombres complexes.

1. Ecrire M en fonction de I_3, J et J^2 où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que J est diagonalisable, donner son spectre.
3. En déduire que M est diagonalisable, donner son spectre.

Exercice 5: **

Soit $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis A^3.
2. Déterminer les valeurs propres de Aavec leur multiplicités ainsi que la dimension du sous-espace propre associé. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 6: ***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 7: ***

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension fini E. On dit que u est cyclique si il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrer que u est cyclique si et seulement si la matrice de u dans une certaine base est de la forme :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. Soit λ une valeur propre de C, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.
3. En déduire une CNS pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.

5 Espaces vectoriels normés

5.A Questions de cours :

1. Démontrer la caractérisation de l'adhérence par les suites.
2. Montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.
3. Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

5.B Exercices :

Exercice 1: *

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 2: *

On définit une application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \quad \text{si} \quad A = (a_{i,j}).$$

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Exercice 3: **

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que la distance à une partie non vide A de E est 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. Montrer que la distance d'un élément $x \in E$ à A est nulle si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Exercice 4: **

Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, $N_p(f) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} N_\infty(f)$

Exercice 5: * Inégalités de Hölder et Minkowski**

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $2n$ réels strictement positifs.

1. Montrer que
$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$
Si le cours sur la convexité n'a pas encore été traité, on admet cette première question.
2. On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$.
3. En déduire l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$
4. On suppose en outre que $p > 1$. Déduire de l'inégalité de Hölder l'inégalité de Minkowski :
$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}.$$
5. On définit pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$
Démontrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6: ***

Soit $a \geq 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit
$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\, dt.$$

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a, b \geq 0$ avec $a < b$ et $b > 1$. Démontrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si $(a, b) \in [0, 1]^2$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 7: ****

1. Soit u une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.
2. Application : soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue et u une suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer que (u_n) converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

Exercice 8: ****

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evndf, soit F une partie fermée de E et $f : F \to F$ une application contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Montrer que le résultat précédent reste valable même si on a seulement f^p est contractante pour un entier naturel p.

6 Intégrales impropres

6.A Questions de cours :

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz
2. Énoncer le théorème d'intégration par partie.
3. Énoncer le théorème de changement de variable.

6.B Exercices :

Exercice 1: **

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ converge mais ne converge pas absolument.

Exercice 2: ***

Montrer la convergence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(3t)-\arctan(2t)}{t} \, dt$.

Exercice 3: *

Soit a un réel et f une application continue de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $[a,+\infty[$.

1. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$ alors cette limite est nulle ;
2. Montrer que si f est uniformément continue alors elle tend vers 0 en $+\infty$;

Exercice 4: * Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.

1. Démontrer que pour tout $A > 0$ l'intégrale $\int_0^A f(t)\cos(xt) \, dt$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt) \, dt$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 5: * Suite de l'exercice précédent

1. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $\int_a^b g(t)\sin(nt) \, dt \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(nt) \, dt \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6: ** Fonction Γ

On définit la fonction Γ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt, \quad \text{pour x} > 0.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 7: * Suites de Riemann et intégrales

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ continue et croissante. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$.

1. On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Montrer que la suite (S_n) converge vers $\int_a^b f(t)\,dt$.
2. On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge. Montrer que la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 8: **

1. Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-at}\ \mathrm{d}t$ pour $a > 0$.
2. Idem avec $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$.
3. Idem avec $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 9: **

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. Démontrer que $f \geq 0$.
2. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
3. Justifier que $\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
4. En déduire que $xf(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 10: **

1. Soit F la fonction définie par :
$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,dt.$$
Calculer $F(x)$.
2. En déduire que l'intégrale
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,dt$$
est convergente et déterminer sa valeur.

7 Topologie 1

7.A Questions de cours :

1. Démontrer la caractérisation de l'adhérence par les suites.
2. Démontrer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
3. Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans un evndf.

7.B Exercices :

Exercice 1: **

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que la distance à une partie non vide A de E est 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. Montrer que la distance d'un élément $x \in E$ à A est nulle si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Exercice 2: * Sous-groupes de $\mathbb{R}$**

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H; x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire que, si a et b sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
   On admettra que pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, on a $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 3: ***

On pose $A = \{e^{in} \quad / \quad n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $\overline{A} = U$, l'ensemble des racines de l'unité dont on admet qu'il est fermé.

Exercice 4: ** Deux topologies violemment différentes / deux normes violemment non équivalentes

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
3. En déduire que les normes ne sont pas équivalentes

Exercice 5: * Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$**

Notons $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

On peut aussi piocher dans les exercices de la colle sur les evn pour compléter la liste.

8 Intégration + Polynôme caractéristique

8.A Questions de cours :

1. Énoncer le théorème de convergence dominée.
2. Donner la définition du polynôme caractéristique et le terme devant X^{n-1} ainsi que le terme constant.
3. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme dans le cas général.

8.B Exercices :

Exercice 1: ** Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.

1. Démontrer que pour tout $A > 0$ l'intégrale $\int_0^A f(t)\cos(xt)\ \ dt$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)\ \ dt$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 2: ***

1. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $\int_a^b g(t)\sin(nt)\ \ dt \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(nt)\ \ dt \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3: * Suites de Riemann et intégrales

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue et croissante. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$.

1. On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Montrer que la suite (S_n) converge vers $\int_a^b f(t)\,dt$.
2. On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge. Montrer que la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 4: **

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq 1$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n\,dx$.

Exercice 5: * Fonction Γ et limite**

Soit la fonction Γ définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
3. En introduisant $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$, démontrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

On admettra que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$ si on n'a pas encore vu le cours de convexité.

Exercice 6: *

Soit la suite de fonction dénie de la manière suivante :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

Exercice 7: * Queue de la gaussienne**

Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est intégrable en $+\infty$ puis donnez un équivalent en $+\infty$ de :

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Indication : On pourra faire une IPP.

Exercice 8: ** Intégration terme à terme

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x-1}\ \mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

Exercice 9: * Intégration terme à terme 2**

Montrer que $\int_0^1 x^{-x}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ et $\int_0^1 x^x\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$.

Exercice 10: ** sinus cardinal

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$ converge mais ne converge pas absolument.

Exercice 11: *

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de J.
2. La matrice J est-elle diagonalisable ?

Exercice 12: ***

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension fini E. On dit que u est cyclique si il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrer que u est cyclique si et seulement si la matrice de u dans une certaine base est de la forme :
$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C.
3. Soit λ une valeur propre de C, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.
4. En déduire une CNS pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.

9 Réduction

9.A Questions de cours :

1. Montrer que diagonalisable équivaut à dimension égale somme des dimensions des sous-espaces propres.
2. Montrer que les sous-espaces propres sont en sommes directe.
3. Montrer que trigonalisable équivaut à polynôme caractéristique scindé, en déduire que tout endomorphisme est automatiquement trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

9.B Exercices :

Exercice 1: *

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de J.
2. La matrice J est-elle diagonalisable ?

Exercice 2: **

Soit J la matrice Attila.

1. Montrer que la matrice J est diagonalisable
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?

Exercice 3: *

1. Soit $\delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \quad ; \quad P \mapsto P'$ l'application de dérivation. A-t-on δ diagonalisable ?
2. On considère maintenant $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \quad ; \quad P \mapsto P'$. A-t-on Δ diagonalisable ?

Exercice 4: **

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois nombres complexes.

1. Ecrire M en fonction de I_3, J et J^2 où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que J est diagonalisable, donner son spectre.
3. En déduire que M est diagonalisable, donner son spectre.

Exercice 5: **

Soit $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis A^3.
2. Déterminer les valeurs propres de Aavec leur multiplicités ainsi que la dimension du sous-espace propre associé. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 6: ***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 7: *** Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Notons $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8: *

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de J.
2. La matrice J est-elle diagonalisable ?

Exercice 9: *** Matrice compagnon

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension fini E. On dit que u est cyclique si il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrer que u est cyclique si et seulement si la matrice de u dans une certaine base est de la forme :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C.
3. Soit λ une valeur propre de C, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.
4. En déduire une CNS pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.

Exercice 10: *** Matrice circulante

Soit $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont trois nombres complexes.

1. Ecrire M en fonction de J et de ses puissances où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que J est diagonalisable, donner son spectre.
3. En déduire que M est diagonalisable, donner son spectre.

Exercice 11: ** Système différentiel

On note les éléments de $\mathbb{R}^3$ en colonne. Déterminer les éléments $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \\ \psi \end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\phi' & = & \phi + \chi + 2\psi \\ 2\chi' & = & \phi + \chi - 2\psi \\ 2\psi' & = & -\phi + \chi + 4\psi \end{array} \right.$$

10 Topologie 2

10.A Questions de cours :

1. Soit A une partie de E, montrer que $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne.
2. Caractérisation de la continuité des applications linéaires
3. Démontrer la caractérisation de la continuité par les images réciproques des ouverts.

10.B Exercices :

Exercice 1: *

Montrer que la distance d'un élément $x \in E$ à A est nulle si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Exercice 2: * Sous-groupes de $\mathbb{R}$**

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H; x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire que, si a et b sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
   On admettra que pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, on a $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 3: ***

On pose $A = \{\mathrm{e}^{in} \quad / \quad n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $\overline{A} = U$, l'ensemble des nombres de module 1.

Exercice 4: ** Deux topologies violemment différentes / deux normes violemment non équivalentes

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
3. En déduire que les normes ne sont pas équivalentes

Exercice 5: * Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$**

Notons $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6: ** Densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ qui associe à une matrice le maximum des sommes des valeurs absolues des éléments de chaque ligne de la matrice. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7: ****

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evndf, soit F une partie fermée de E et $f : F \to F$ une application contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Montrer que le résultat précédent reste valable même si on a seulement f^p est contractante pour un entier naturel p.

Exercice 8: **

Soit E un espace vectoriel normé, et V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\mathring{V} \neq \emptyset$, alors $V = E$.
3. Application 1 : soit H un hyperplan de E. Démontrer que H est ou bien fermé ou bien dense dans E.
4. Application 2 : soit A une partie de E. Démontrer que $\mathrm{vect}(\overline{A}) \subset \overline{\mathrm{vect}(A)}$.

Exercice 9: **

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On le muni de la norme infinie.
On considère l'endomorphisme :

$$T \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & \left(Tf : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\right) \end{array} \right.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme continue de E.
2. Est-il injectif ? surjectif ?

11 Suites et séries de fonctions

11.A Questions de cours :

1. Convergence uniforme implique convergence simple
2. Convergence normale entraîne convergence absolue en tout point
3. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues

11.B Exercices :

Exercice 1: *

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose
$$f_n(x) = \frac{n}{1 + n(1 + x)}.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Démontrer que la convergence est en réalité uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2: **

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1 - x}.$$
Quelle est la limite de φ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1, 1[$.
3. Soit $a \in]0, 1[$. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Exercice 3: **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
2. Que dire du polynôme $P_n - P_N$?
3. En déduire que f est nécessairement un polynôme.

Exercice 4: ***

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Prouver que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
4. Déterminer $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s)$.
5. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 1$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

   En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.

Exercice 5: ***

Soit f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}.$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ à déterminer.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition et que sa restriction à $]a, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. f est-elle dérivable en a ?

Exercice 6: *

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Exercice 7: **

On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 8: *

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a,b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0;1]$, $g_n(x)=x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

Exercice 9: **

On considère la série de fonctions de terme général u_n défini par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in[0,1],\quad u_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 10: ** Régularité d'une somme de série

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ où u_n est l'application

$$u_n\left\{\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{n^x}\end{array}\right.$$

1. Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $]1,+\infty[$.

On note f la somme de cette série.

2. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]1,+\infty[$.

Exercice 11: * Régularité d'une somme de série 2**

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ où u_n est l'application

$$u_n\left\{\begin{array}{ccccc}]1,+\infty[& \times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & , & y & \mapsto & \frac{1}{n^x\ln(n)^y}\end{array}\right.$$

1. Montrer que la série de fonctions converge simplement.

On note f la somme de cette série.

2. Montrer que f est continue.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa différentielle.

11.C Exercices sur les groupes

Exercice 1: ** Quelques équations de congruences

1. Réduire dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue a : $a^2-\overline{100}=\overline{0}$
2. Réduire dans $\mathbb{Z}/121\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue a : $a^2-\overline{100}=\overline{0}$
3. Réduire dans $\mathbb{Z}/221\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue a : $a^2+\overline{11}a-\overline{12}=\overline{0}$

Exercice 2: *** Une drôle de somme

Soit p un nombre premier. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\sum_{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} a^k$ vaut soit 0 soit -1 (et préciser quand se présente chacun des deux cas).

Exercice 3: *** Wilson entre en jeu !

1. Montrer qu'un entier p est premier si et seulement si $(p-1)! = -1 \mod p$.
2. (Soit p un nombre premier de la forme $4n+1$. Montrer que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a $\overline{-1} = \overline{(2n)!}^2$.)

Exercice 4: ** Les groupes d'ordre 4

Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre 4.

Exercice 5: ** Que des éléments d'ordre 2

Soit G un groupe dont tous les éléments (sauf l'élément neutre) sont d'ordre au plus deux. Démontrer que G est abélien.

Exercice 6: ** Exemple de générateurs du groupe symétrique et du groupe alterné

1. Soit $c = (a_1, \dots, a_p) \in \mathfrak{S}_n$ et soit $\varphi \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer la permutation $\varphi c \varphi^{-1}$.
2. Montrer que $(12\dots n), (12)$ engendre $\mathfrak{S}_n$
3. Montrer que les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$

Exercice 7: **** Partitionnement par les ordres

Soit G un groupe cyclique d'ordre n.

1. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique
2. Soit d un diviseur positif de n. Montrer que G admet un unique sous-groupe d'ordre d.
3. Montrer que $\sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \mid n}} \varphi(d) = n$

Exercice 8: **** Sous-groupe d'un groupe d'inversibles

Soit $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

1. Donner la liste de tous les éléments de G.
2. Pour tout $a \in G$, déterminer le sous-groupe $\langle a \rangle$ engendré par a.
3. Déterminer un ensemble minimal de générateurs de $(G, \cdot)$.
4. $(G, \cdot)$ est-il un groupe cyclique ?
5. Déterminer tous les sous-groupes de G et, pour chaque sous-groupe, préciser un ensemble de générateurs.
6. Parmi les sous-groupes de $(G, \cdot)$, lesquels sont isomorphes à un groupe additif $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$?

12 Topologie 3

12.A Questions de cours :

1. Théorème des valeurs intermédiaires
2. L'image continue d'un compact est compact
3. Théorème des valeurs intermédiaires

12.B Exercices :

Exercice 1: ** Une première étape pour la simplicité de $SO(3)$.**

1. Montrer que tout élément de $SO(3)$ est $O(3)$-semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. En déduire que (le groupe) $SO(3)$ est connexe par arcs.
3. Soit $h \in H$ un élément non trivial. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} SO(3) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}([g, h]) \end{array}$$

Montrer que $\varphi(SO(3)) = [a, 3]$ pour un certain a que l'on ne déterminera ps

Exercice 2: ** groupes orthogonal / spécial orthogonal**

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact mais n'est pas connexe par arcs.
2. Montrer que $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe par arcs. En déduire que $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est la composante connexe par arcs de l'identité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3: **

Soit E un evn.

1. La somme de deux fermés de E est-elle nécessairement fermée ?
2. Montrer que la somme d'un compact et d'un fermé est fermée
3. Montrer que la somme de deux compactes est compacte.

Exercice 4: ***

Soit E un espace vectoriel normé. Soit F et G deux fermés non vides disjoints de E. Montrer qu'il existe une application continue f de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f_F = 0$ et $f_G = 1$.
Cette propriété est-elle vraie pour deux ouverts non vides disjoints ?

Exercice 5: **

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On le muni de la norme infinie.
On considère l'endomorphisme :

$$T \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & \left(Tf : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \right) \end{array} \right.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme continue de E.
2. Est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 6: **

En considérant l'application $l : H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tHA + {}^tAH$ pour une matrice $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ fixée, montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Exercice 7: ****

Soit r, n dans $\mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_r$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ formant une famille libre. Quel est le nombre de composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^r \ker f_i$? Même question en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Exercice 8: *****

Soit f une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que, pour toute partie A compacte (resp. connexe par arcs), $f(A)$ est compact (resp. connexe par arcs). Montrer que f est continue.

13 Probabilités

13.A Questions de cours :

1. Formule de Bayes
2. Formule des probabilités totales
3. Si X est une VAD alors pour toute fonction f, $f(X)$ est aussi une VAD.

13.B Exercices :

Exercice 1: * Merlin lance deux dés

Merlin lance simultanément deux dés équilibrés à six faces. Quelle est la probabilités qu'il obtienne 8. Merlin se demande ensuite si cette probabilité est préservée si au lieu de lancer les deux dés en même temps il les lance l'un après l'autre.

Exercice 2: * Merlin joue aux cartes

1. Merlin tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de :
   (a) qu'il n'obtienne que des coeurs ?
   (b) que des as ?
   (c) deux coeurs et un pique ?
2. Quelle est la probabilité de qu'il n'obtienne que des coeurs s'il tire les cartes successivement ?

Exercice 3: * Merlin ne veut pas être naïf

Merlin apprend par Geneviève que Lancelot lui a dit que Perceval a entendu que Ludivine avait conté à Arthur que Fermat utilisait les marges pour faire des preuves. Sachant qu'une information se transmet à l'identique avec une probabilité $0,8$, quelle est la probabilité que l'information soit vraie ?

Exercice 4: * Merlin découvre le paradoxe des anniversaires

Merlin se demande à partir de combien de personne dans une pièce la probabilité que deux personnes aient leur anniversaire le même jour soit supérieure à $1/2$. Répondez à Merlin.

Exercice 5: * Merlin dans la savane

Merlin se trouve dans la savane. Il y a 5 lycaons, 2 lions et 12 éléphants à 1km à la ronde autour de Merlin. On suppose (sauf mention contraire) que tout ce petit monde reste dans le disque fixé à cet instant. Quelle est la probabilité que Merlin rencontre 1 lycaon qu'il effrayera et qui partira à 2,1km de lui, puis 2 éléphants et enfin un lyon ?

Exercice 6: * (Formule de Wald)**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace Ω identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$ et (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
On suppose que $(N, X_1, \dots, X_n, \dots)$ sont mutuellement indépendantes et on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
Montrer

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

Exercice 7: **

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 8: ****

Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec un dé équilibré. Le joueur A gagne dès que la séquence PPF apparaît. Le joueur B gagne dès que la séquence FPF apparaît. Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs a gagné.

1. Quelle est la probabilité que le joueur A gagne ?
2. Quelle est la probabilité que le joueur B gagne ?
3. Quelle est la probabilité que le jeu se poursuive indéfiniment sans qu'aucun des deux joueurs ne gagne ?

Exercice 9: **

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad P((X,Y) = (j,k)) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}.$$

Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 10: **

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relié par une suite de relectures pour correction. À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième relecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Exercice 11: **

Deux joueurs A et B s'affrontent autour d'un jeu. A joue la première partie, B joue la deuxième, A joue la troisième, et ainsi de suite. Les deux joueurs jouent $2n$ parties, et le premier qui gagne une partie a gagné l'ensemble du jeu. On suppose que A a une probabilité $a \in [0,1]$ de gagner une partie donnée, B une probabilité $b \in [0,1]$, et que les parties sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne gagne ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne ? que B gagne ?
3. À quelle condition le jeu est-il équilibré ?

Exercice 12: * (Loi de Poisson)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 13: * (La loi sans mémoire)**

On dit qu'une variable aléatoire est sans mémoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(X > k+n \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k).$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que X est sans mémoire.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire. On pose $q = \mathbb{P}(X > 1)$.
   a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X > n) = q^n$.
   b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1-q$.

Exercice 14: ** (Diviseurs)**

Soit $n \geq 2$; on choisit de manière équiprobable un des entiers compris entre 1 et n ; soit p un diviseur de n et A_p l'événement : le nombre choisi est divisible par p.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.
2. Montrer que si $p_1, \ldots, p_r$ sont les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. En déduire le calcul de $\varphi(n)$.

Exercice 15: * Loi des deux premiers piles

On considère une suite de lancers de pile ou face indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0,1[$. On note X (respectivement Y) le rang du premier (respectivement du deuxième) pile.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. En déduire la loi de Y.

Exercice 16: * Question de naissances**

On suppose que le nombre N d'enfants dans une famille suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in]0,1[$ et celle que ce soit un garçon est $q = 1-p$. On suppose aussi que les sexes des naissances successives sont indépendants. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles par famille, et Y celle du nombre de garçons.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (N,X).
2. En déduire la loi de X et celle de Y.

14 Réduction des endomorphismes des espaces euclidiens

14.A Questions de cours :

1. Si un sous-espace est stable par une isométrie vectorielle, alors son orthogonal est également stable.
2. Théorème spectral
3. Montrer que tout élément de $SO_3(\mathbb{R})$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$.

14.B Exercices :

Exercice 1: **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tAA$ est diagonalisable et montrer que ses valeurs propres sont réelles positives.

Exercice 2: ** Théorème de Courant-Fischer**

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres rangées par ordre croissant. Soit également $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associés, i.e $f(e_k) = \lambda_k e_k$.
On désigne par V_k le sous-espace $\text{vect}(e_1, \ldots, e_k)$, par W_k le sous-espace vectoriel $\text{vect}(e_k, \ldots, e_n)$ et par $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k \in \{1, \ldots, n\}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non-nul,

$$R_A(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

1. Montrer que $\lambda_1 = \min_{x \neq 0} R_A(x)$ et que $\lambda_n = \max_{x \neq 0} R_A(x)$.
2. Montrer que $\max_{x \in V_k \setminus \{0\}} R_A(x) = \lambda_k$.
3. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Vérifier que $V \cap W_k \neq \{0\}$. En déduire que $\max_{x \in V \setminus \{0\}} R_A(x) \geq \lambda_k$.
4. Déduire des questions précédentes le théorème de Courant-Fischer :

$$\lambda_k = \min_{V \in \mathcal{F}_k} \max_{x \in V \setminus \{0\}} R_A(x).$$

Exercice 3: ** Décomposition polaire**

1. Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$
   (a) Démontrer qu'il existe $T \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $T^2 = S$.
   (b) Démontrer que T est unique en considérant les sous-espaces propres des endomorphismes canoniquement associés à S et T
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$
   (a) Montrer que ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer qu'il existe une unique couple $(O; S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

Exercice 4: **

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On pose

$$k = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |\lambda|.$$

Vérifier

$$\forall x \in E, \ \|u(x)\| \leq k\|x\|.$$

En déduire que $\|u\| = k$

Exercice 5: * Composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$**

Déterminer les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$, de $GL_n(\mathbb{C})$.

Exercice 6: ** Une première étape pour la simplicité de $SO(3)$.**

1. (Cours) Montrer que tout élément de $SO(3)$ est $O(3)$-semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. En déduire que (le groupe) $SO(3)$ est connexe par arcs.
3. Soit $h \in H$ un élément non trivial. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} SO(3) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}([g,h]) \end{array}$$

   Montrer que $\varphi(SO(3)) = [a, 3]$ pour un certain a que l'on ne déterminera ps

Exercice 7: **

Soit a, b, c trois réels. On pose $S = a + b + c$ et $\sigma = ab + bc + ac$ et $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$

1. Donner une CNS sur S et σ pour que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$
2. Donner une CNS sur S et σ pour que $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$

Exercice 8: ** générateurs de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{SO}(E)$**

1. Montrer que $\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions.
   (Indication : montrer que toute isométrie s'écrit comme produit d'au plus n réflexions.)
2. En déduire que $\mathcal{SO}(E)$ est engendré par les retournements.

Exercice 9: * Déterminant de Gram**

Soit E un espace euclidien de dimension n. Si $(x_1, \dots, x_m)$ est une famille de E, on pose

$$G(x_1, \dots, x_m) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \le i,j \le m} = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_m, x_m \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

la matrice de Gram de la famille $(x_1, \dots, x_m)$. On note $|G(x_1, \dots, x_m)|$ le déterminant de la matrice de Gram $G(x_1, \dots, x_m)$.

1. Montrer que $G(x_1, \dots, x_m)$ est inversible si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_m)$ est libre.
2. Soit F un sous-espace vectoriel strict de E, et $(x_1, \dots, x_m) \in F^m$. Soit $x \in F^{\perp}$. Montrer que

$$|G(x, x_1, \dots, x_m)| = ||x||^2 |G(x_1, \dots, x_m)|.$$

3. En déduire que si $(x_1, \dots, x_m)$ est une base de F, et $x \in E$, alors

$$d(x, F)^2 = \frac{|G(x, x_1, \dots, x_m)|}{|G(x_1, \dots, x_m)|}.$$

15 Idéaux et polynômes d'endomorphismes

15.A Questions de cours :

1. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé simple.
2. Hamilton-Cayley
3.

15.B Exercices :

Exercice 1: * Matrice circulante**

Soit $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des nombres complexes.

1. Ecrire M comme un polynôme en J où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que J est diagonalisable, donner son spectre.
3. En déduire que M est diagonalisable, donner son spectre.

Exercice 2: ** Endomorphisme de multiplication à gauche

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to AM$.

1. Justifier que φ_A est un endomorphisme
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(\varphi_A)$
3. En déduire que A et φ_A ont les même valeurs propres
4. Donner une CNS pour que φ_A soit diagonalisable.

Exercice 3: **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^5 = A^2$ et $\mathrm{Tr}(A) = n$. Montrer que $A = I_n$.

Exercice 4: *** Matrice compagnon

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension fini E. On dit que u est cyclique si il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrer que u est cyclique si et seulement si la matrice de u dans une certaine base est de la forme :
$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C.
3. Soit λ une valeur propre de C, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.
4. En déduire une CNS pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.

Exercice 5: ** Lemme des noyaux

Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux. Alors pour $u \in \mathcal{L}(E)$:
$$\ker(PQ(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u)).$$

Exercice 6: ** Noyaux itérés

Soit u un endomorphisme. La suite $\left(\ker(P^k(u))\right)_k$ est strictement croissante puis stationnaire.

Exercice 7: * Calcul d'inverse

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Quel est le polynôme minimal de M ? En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}

Exercice 8: ** Calcul de puissances par polynôme minimal

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercice 9: *** Une histoire d'inverse

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminez un polynôme P de degré $n-1$ tel que $P(A) = A^{-1}$
2. Déterminez l'ensemble des polynômes tels que $P(A) = A^{-1}$

16 Réduction (fin)

16.A Questions de cours :

1. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé simple.
2. Lemme des noyaux.
3. Caractérisation des nilpotents par le polynôme caractéristique.

16.B Exercices :

Exercice 1: * Matrice circulante**

Soit $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des nombres complexes.

1. Ecrire M comme un polynôme en J où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que J est diagonalisable, donner son spectre.
3. En déduire que M est diagonalisable, donner son spectre.

Exercice 2: ** Endomorphisme de multiplication à gauche

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to AM$.

1. Justifier que φ_A est un endomorphisme
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(\varphi_A)$
3. En déduire que A et φ_A ont les même valeurs propres
4. Donner une CNS pour que φ_A soit diagonalisable.

Exercice 3: **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^5 = A^2$ et $\mathrm{Tr}(A) = n$. Montrer que $A = I_n$.

Exercice 4: *** Matrice compagnon

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension fini E. On dit que u est cyclique si il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrer que u est cyclique si et seulement si la matrice de u dans une certaine base est de la forme :
$$C = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C.
3. Calculer le polynôme minimal de la matrice C. *(Indication : on pourra montrer que qu'il n'existe pas de polynôme annulateur de degré $< n$ non nul)*
4. En déduire une CNS pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.

Exercice 5: ***

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u. On suppose qu'on peut écrire $P = QR$ avec Q et R premiers entre eux. Établir
$$\operatorname{im}(Q(u)) = \ker R(u).$$

Exercice 6: ** Noyaux itérés

Soit u un endomorphisme. La suite $\left(\ker(P^k(u))\right)_k$ est strictement croissante puis stationnaire.

Exercice 7: * Calcul d'inverse

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Quel est le polynôme minimal de M ? En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}

Exercice 8: ** Calcul de puissances par polynôme minimal

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercice 9: *** Une histoire d'inverse

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminez un polynôme P de degré $n-1$ tel que $P(A) = A^{-1}$
2. Déterminez l'ensemble des polynômes tels que $P(A) = A^{-1}$

Exercice 10: **

Soit J la matrice Attila.

1. Montrer que la matrice J est diagonalisable
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?

Exercice 11: **

Soit $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis A^3.
2. Déterminer les valeurs propres de A avec leur multiplicités ainsi que la dimension du sous-espace propre associé. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 12: ****

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 13: ** Système différentiel

On note les éléments de $\mathbb{R}^3$ en colonne. Déterminer les éléments $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \\ \psi \end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ tels que :

$$\begin{cases} 2\phi' & = & \phi + \chi + 2\psi \\ 2\chi' & = & \phi + \chi - 2\psi \\ 2\psi' & = & -\phi + \chi + 4\psi \end{cases}$$

Exercice 14: ***** Réduction de Frobenius

1. Soit u un endomorphisme. Alors il existe $x \in E$ tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$ tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$, alors $E_{u,x} := \{P(u)(x) \ / \ P \in \mathbb{K}[X]\}$ (le plus petit sous-espace stable par u contenant x) admet un supplémentaire stable
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   Alors il existe une unique suite finie $(P_1, \dots, P_r)$ de polynômes unitaires et une unique décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ telle que $\forall i \in [\![1, \dots, r-1]\!] \quad P_{i+1} | P_i$ et $\forall i \in [\![1, \dots, r-1]\!] \quad u_{|E_i}$ est un endomorphisme cyclique de polynôme minimal de P_i.

Exercice 15: ** L'exponentielle d'un endomorphisme est un polynôme en l'endomorphisme

Soit E un espace vectoriel. Soit u un endomorphisme de E admettant un polynôme minimal, montrer que $\mathbb{K}[u]$ est un espace vectoriel de dimension finie. On admet qu'un espace vectoriel de dimension finie est fermé. En déduire que e^u est un polynôme en u.

Exercice 16: ** Une application de Hamilton-Cayley

Soit $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p = 0$$

pour tout $p > 0$. On souhaite prouver que tous les a_i sont nuls. On note D la matrice diagonale dont les coefficients sont $a_1, \dots, a_n$.

1. Déterminer la trace de D^p pour tout entier naturel p non nul. ?
2. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, prouver que l'un des a_i est nul.
3. Conclure.

Exercice 17: ** Nilpotence et commutation

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. On suppose que $AN = NA$. Montrer que

$$\det(A + N) = \det(A).$$

Exercice 18: *** Caractérisation de la nilpotence par LES traces

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si, pour tout $p \geq 1$, on a $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$.

17 Oraux blancs

Exercice 1: Adhérence et Connexité par arcs

1. Énoncer la caractérisation de l'adhérence par les suites.
2. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont diagonalisables. Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Soit r, n dans $\mathbb{N}^*$, soient $f_1, \ldots, f_r$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ formant une famille libre. Quel est le nombre de composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^r \ker f_i$?

Exercice 2: Convergence / Divergence

1. Énoncer l'inégalité des acroissements finis
2. Montrer la convergence et donner la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(3t) - \arctan(2t)}{t} \, \mathrm{d}t.$$
3. Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels strictement positifs qui décroît vers 0.
Quelle est la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$?

Exercice 3: Valeur(s) d'Adhérence

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.
2. Donner un équivalent de u_n où : $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & \in & \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} & = & \ln(1+u_n) \end{array} \right.$.
3. Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{R}$.

18 Calcul différentiel

18.A Questions de cours :

1. différentielle d'une application différentiable en un extremum local.
2. Formule de la chaîne pour les dérivées partielles d'une composée + si f est inversible alors f^{-1} aussi et exprimer sa différentielle en fonction de celle de f.
3. Application constante sur un ouvert convexe
4. Différentielle en fonction des dérivées partielles

18.B Exercices :

Exercice 1: * Différentielle du déterminant**

1. Calculer la différentielle du déterminant en I_n
2. En déduire la différentielle du déterminant en $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
3. En déduire la différentielle du déterminant en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 2: ** Continuité et dérivées directionnelles

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en $(0,0)$. Est-elle continue en ce point ?

Exercice 3: * Continuité

Etudier la continuité en $(0,0)$ de l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{x^2-3xy^2}{x+y} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 4: * Produit scalaire

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable. Calculer la différentielle de $x \mapsto \langle f(x), f(x) \rangle$.
En déduire la différentielle de $N = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Exercice 5: ** Puissances de matrice

Soit $p \in [\![2, +\infty[\![$, on pose $\phi_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ M \mapsto M^p$. Montrer que ϕ_p est différentiable et donner sa différentielle.
En déduire que l'exponentielle matricielle est différentiable en 0.

Exercice 6: ** La norme

Soit $f : E \backslash \{0\} \to E \backslash \{0\}\ ;\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Montrer que f est différentiable et donner sa différentielle.

Exercice 7: **** Continuité et dérivées directionnelles et dérivabilité

1. Etudier la continuité en $(0,0)$ de l'application

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^2-3xy^2}{x+y} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

2. Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en $(0,0)$. Est-elle continue en ce point ?

3. Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{h(x)-h(y)}{x-y} & \text{pour } x \neq y \\ h'(x) & \text{pour } x = y \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que F est continue.

Exercice 8: * Dérivées partielles et dérivées selon tout vecteur

On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer qu'elle admet des dérivées partielles en $(0,0)$. Est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 9: * Dérivées selon tout vecteur et différentiabilité

On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{y^2}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer qu'elle admet des dérivées selon tout vecteur en 0. Est-elle différentiable en 0 ?

Exercice 10: *** Gradient affine

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\|x\|_A^2 - {}^t x b \end{array} \right.$$

où $\langle x,y\rangle_A := \langle Ax, y\rangle$ est le produit scalaire associé à la matrice A.
Montrer que $\nabla\phi(x) = Ax - b$.

Exercice 11: ** Multiplication dans la norme 44.3

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ un réel. Soit

$$f_a : \begin{cases} E\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|ax\| \end{cases}$$

Montrer que f_a est différentiable et donner son gradient.

Exercice 12: *** Classe $\mathcal{C}^1$ 44.9

Soit

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{x\sin(y)-y\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ g'(x) & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ mais pas $\mathcal{C}^2$.

Exercice 13: *** Majoration de la norme du gradient i.e. IAF

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit C un ouvert convexe de E. Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $\nabla f(x) \leq 2025$.
Montrer que pour tout couple (a, b) d'éléments de C on a :

$$|f(a) - f(b)| \leq 2025\|a - b\|.$$

Exercice 14: *** Un calcul de Jacobienne

Calculer la Jacobienne de l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\varphi) & \mapsto & (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)) \end{cases}$$

Puis son déterminant

Exercice 15: *** Extrema locaux d'une fonction de 3 variables

Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz - 4(x + y + z)$.

Exercice 16: *** Les cordes vibrantes

Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

à l'aide d'un changement de variables de la forme $u = x + at$, $v = x + bt$.

Exercice 17: ** Différentielle de l'inverse matriciel

Soit $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$.

1. Démontrez que ϕ est différentiable en I_n et calculez sa différentielle en ce point.
2. Même question en $M \in GL_n(\mathbb{R})$ quelconque.

19 Séries entières

19.A Questions de cours :

1. Lemme d'Abel
2. Rayon de convergence de la série somme des séries entières
3. Unicité du développement en série entière

19.B Exercices :

Exercice 1: * Rayon de convergence 1

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$$

Exercice 2: * Rayon de convergence 2

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_n \frac{n!}{4^n \sqrt{(2n)!}} z^n$$

Exercice 3: DSE et suite

En écrivant le développement en série entière de e, en déduire la convergence (et préciser la limite) de la suite de terme général :

$$u_n = n \sin(2\pi n! \mathrm{e}).$$

Exercice 4: * Condition de convergence en 1**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable x, de rayon de convergence égal à 1. On note S sa somme :

$$S : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}.$$

On suppose que la série complexe $\sum a_n$ converge.

1. Montrer que $S(x) \underset{x\to 1}{\to} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ dans les deux cas suivants :
   (a) la série complexe $\sum a_n$ converge absolument
   (b) Il existe une suite décroissante de réels positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n on ait :
   $$a_n = (-1)^n u_n$$
2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
3. Montrer la convergence et donner la valeur de la somme de la série :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

Exercice 5: ** Résolution d'une EDO par DSE

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $(t^2+t)y'' + (3t+1)y' + y = 0$.

Exercice 6: ** Rayon de convergence 3

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ dans les cas suivants :

1. La suite (a_n) tend vers $\ell \neq 0$;
2. La suite (a_n) est périodique, et non identiquement nulle ;
3. a_n est le nombre de diviseurs de n ;
4. a_n est la n-ième décimale de $\sqrt{2}$.

Exercice 7: ** Rayon de convergence 4

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} b_n x^n$.

1. Démontrez que $R' \geq \max(1, R)$.
2. Démontrez que $R' = \max(1, R)$.

Exercice 8: **** Fonction développable en série entière

Développer en série entière la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$$

et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Exercice 9: **** Somme d'une série entière 1

Donner le rayon de convergence et exprimer la somme de la série entière en termes de fonctions usuelles : $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ *Indication : dériver $xS(x)$ et effectuer un DES sur le disque ouvert de convergence*

Exercice 10: **** Somme d'une série entière 2

Donner le rayon de convergence et exprimer la somme de la série entière en termes de fonctions usuelles :
$\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$

Exercice 11: *** Résolution d'une équation différentielle

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Développer f en série entière au voisinage de 0.

Exercice 12: ** Utilisation des séries entières 1

Déterminer des solutions de l'équation différentielle $(1+x^2)y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0$, développables en série entière au voisinage de 0.
En déduire la forme générale des solutions sur $]-1,1[$.

20 Structures Algébriques

20.A Questions de cours :

1. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si c'est un anneau intègre si et seulement si n est premier
2. Caractérisation des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
3. Idéaux de $\mathbb{Z}$
4. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal
5. Un groupe est monogène fini si et seulement si il est cyclique
6. Caractérisation des générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
7. Soit $a \in G$ d'ordre n. Alors $a^k = e$ si et seulement si $n \mid k$

20.B Exercices :

Exercice 1: ** Quelques équations de congruences

1. Réduire dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue a : $a^2 - \overline{100} = \overline{0}$
2. Réduire dans $\mathbb{Z}/121\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue a : $a^2 - \overline{100} = \overline{0}$
3. Réduire dans $\mathbb{Z}/221\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue a : $a^2 + \overline{11}a - \overline{12} = \overline{0}$

Exercice 2: * Une drôle de somme**

Soit p un nombre premier. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\sum_{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} a^k$ vaut soit 0 soit -1 et préciser quand se présente chacun des deux cas.

Exercice 3: * Wilson entre en jeu !**

1. Montrer qu'un entier p est premier si et seulement si $(p-1)! = -1 \mod p$.
2. Soit p un nombre premier de la forme $4n+1$. Montrer que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a $\overline{-1} = \overline{(2n)!}^2$.

Exercice 4: * Des morphismes dans tous les sens**

Déterminer tous les morphismes de groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 5: ** Question de surjectivité

1. Déterminer tous les morphismes de groupes $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. A quelle condition un tel morphisme n'est-il pas surjectif ?
2. Déterminer tous les morphismes de groupes $\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. A quelle condition un tel morphisme n'est-il pas surjectif ? (*Indication : On peut montrer que* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/\varphi(n)\mathbb{Z}$)

Exercice 6: ** Idéaux premiers et radical d'un idéal**

On dit qu'un idéal I d'un anneau A est premier lorsque :
si $ab \in I$ alors $a \in I$ ou $b \in I$.

1. Montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $p\mathbb{Z}$ pour p premier.
2. Montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{K}[X]$ sont de la forme $\langle P \rangle$ pour un certain polynôme P irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

On appelle radical d'un idéal I l'ensemble $\sqrt{I} = \{a \in A \quad / \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \ , \ a^n \in I\}$.

3. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal
4. Montrer que si I est un idéal premier d'un anneau A alors $I = \sqrt{I}$

Exercice 7: ** 2 idéaux c'est un corps !

Montrer qu'un anneau qui n'a que deux idéaux est un corps

Exercice 8: * Où sont les irréductibles ?**

1. Déterminer les irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Quels sont les irréductibles de degré 2 et 3 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$?
3. Quels sont les irréductibles de degré 2 et 3 de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 9: * Les idéaux du quotient**

Déterminer les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout entier naturel non nul n.

Exercice 10: ** Noyau et image d'un morphisme de groupes

Montrer que le noyau (resp. l'image) d'un morphisme de groupe $f : G_1 \to G_2$ est un sous-groupe de G_1 (resp. G_2).

Exercice 11: * Les groupes d'ordre 4

Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre 4.

Exercice 12: ** Que des éléments d'ordre 2

Soit G un groupe dont tous les éléments (sauf l'élément neutre) sont d'ordre au plus deux. Démontrer que G est abélien.

Exercice 13:

1. Soit $c = (a_1, \dots, a_p) \in \mathfrak{S}_n$ et soit $\varphi \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer la permutation $\varphi c \varphi^{-1}$.
2. Montrer que $(12 \dots n), (12)$ engendre $\mathfrak{S}_n$
3. Montrer que les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$

Exercice 14:

Montrer pour tout couple $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ il existe un couple $(a', b') \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que :

$$a' \mid a \qquad b' \mid b \qquad a'b' = \text{PPCM}(a, b)$$

Exercice 15:

On considère le polynôme $P = X^3 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ Montrer que P n'a pas de racine rationnelle mais a une racine réelle puis que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$

Exercice 16:

Soit G un groupe cyclique d'ordre n.

1. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique
2. Soit d un diviseur positif de n. Montrer que G admet un sous-groupe d'ordre d.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{\substack{1 \le d \le n \\ d \mid n}} \varphi(d)$

21 Variables aléatoires

21.A Questions de cours :

1. Espérance et variance d'une loi géométrique
2. Formule de transfert
3. Inégalité de Markov

21.B Exercices :

Exercice 1: * Formule de Wald**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace Ω identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$ et (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
On suppose que $(N, X_1, \dots, X_n, \dots)$ sont mutuellement indépendantes et on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
Montrer

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

Exercice 2: ** poisson et Poisson

Soit X une variable aléatoire comptant le nombre d'œufs pondus par un poisson ; La variable aléatoire X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque œuf a une probabilité p d'éclore, indépendamment des autres œufs. Soit Z le nombre d'œufs qui ont éclos.

1. Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(Z = k | X = n)$.
2. En déduire la loi de Z ?
3. Quelle est l'espérance de Z ?

Exercice 3: ** De la chance vraiment ?

Pierre et Quentin jouent au jeu suivant. On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Quentin. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Quentin gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Quentin gagne.

1. En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Exercice 4: ** Loi du min

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité et suivant une loi géométrique de paramètre respectif p_1 et p_2. On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X > n)$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z > n)$.
3. Déterminer la loi de Z.

Exercice 5: *** Le problème du concierge

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clés dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clés les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clé qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clé essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.

Exercice 6: ** min de deux lois géométriques i.i.d

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $Z = \min(X,Y)$ et $q = 1-p$.
Soit n un entier strictement positif.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \geq n)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(Z \geq n)$. En déduire $\mathbb{P}(Z = n)$. Quelle est la loi de Z ?
3. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 7: **** Inégalité de Cantelli

Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

1. Démontrez que, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \frac{t^2+V(X)}{(a+t)^2}$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \frac{V(X)}{V(X)+a^2}$.
3. Démontrez l'inégalité de Cantelli : $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{2V(X)}{V(X)+a^2}$. Comparez avec l'inégalité de Tchebychev.

Exercice 8: **

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 9: ****

Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec un dé équilibré. Le joueur A gagne dès que la séquence PPF apparaît. Le joueur B gagne dès que la séquence FPF apparaît. Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs a gagné.

1. Quelle est la probabilité que le joueur A gagne ?
2. Quelle est la probabilité que le joueur B gagne ?
3. Quelle est la probabilité que le jeu se poursuive indéfiniment sans qu'aucun des deux joueurs ne gagne ?

Exercice 10: **

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}((X,Y) = (j,k)) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}.$$

Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 11: **

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relié par une suite de relectures pour correction. À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième relecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Exercice 12: **

Deux joueurs A et B s'affrontent autour d'un jeu. A joue la première partie, B joue la deuxième, A joue la troisième, et ainsi de suite. Les deux joueurs jouent $2n$ parties, et le premier qui gagne une partie a gagné l'ensemble du jeu. On suppose que A a une probabilité $a \in [0,1]$ de gagner une partie donnée, B une probabilité $b \in [0,1]$, et que les parties sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne gagne ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne ? que B gagne ?
3. À quelle condition le jeu est-il équilibré ?

Exercice 13: * Loi de Poisson

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 14: *** La loi sans mémoire

On dit qu'une variable aléatoire est sans mémoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X > k + n \mid X > n) = P(X > k).$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que X est sans mémoire.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire. On pose $q = P(X > 1)$.
   a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X > n) = q^n$.
   b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Exercice 15: **** Diviseurs

Soit $n \geq 2$; on choisit de manière équiprobable un des entiers compris entre 1 et n ; soit p un diviseur de n et A_p l'événement : le nombre choisi est divisible par p.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.
2. Montrer que si $p_1, \ldots, p_r$ sont les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. En déduire le calcul de $\varphi(n)$.

Exercice 16: * Loi des deux premiers piles

On considère une suite de lancers de pile ou face indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0, 1[$. On note X (respectivement Y) le rang du premier (respectivement du deuxième) pile.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y.

Exercice 17: *** Question de naissances

On suppose que le nombre N d'enfants dans une famille suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in]0, 1[$ et celle que ce soit un garçon est $q = 1 - p$. On suppose aussi que les sexes des naissances successives sont indépendants. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles par famille, et Y celle du nombre de garçons.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (N, X).
2. En déduire la loi de X et celle de Y.

Exercice 18: *** Formule de Wald (version fonction génératrices)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace Ω identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$ et (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
On suppose que $(N, X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ sont mutuellement indépendantes et on note $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

1. Montrer que $G_S = G_N \circ G_X$ sur $[0, 1]$.
2. En déduire que S est d'espérance finie et que

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

Exercice 19: ** Somme de deux lois de Poisson (version fonction génératrices)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Démontrer avec les fonctions génératrices que $X + Y$ suit une loi de Poisson et donner son paramètre.

Exercice 20: ** Espérence par Abel

Soit X une variable aléatoire définie sur un epace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie. En utilisant une transformation d'Abel, montrer que :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Exercice 21: ** Un premier résultat de convergence

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$.
Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

1. Déterminer la loi de Y_n.
2. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Exercice 22: *** Permutations

L'univers Ω est l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on munit de la tribu discrète et de la probabilité uniforme. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on définit une variable aléatoire X_k sur Ω en posant, pour tout σ élément de Ω,

$$X_k(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k) = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Identifier la loi de la variable X_k.
2. Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$ distincts. Calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$.
3. En déduire l'espérance et la variance de la variable N donnant le nombre de points fixes d'une permutation $\sigma \in \Omega$.

22 Suites et séries de fonctions + théorèmes de Lebesgue

22.A Questions de cours :

1. Convergence uniforme implique convergence simple
2. Convergence normale entraîne convergence absolue en tout point
3. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues

22.B Exercices suites et séries de fonctions :

Exercice 1: * Exemple d'une suite de fonctions convergeant uniformément

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose

$$f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Démontrer que la convergence est en réalité uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2: ** Suites de polynômes

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

   Quelle est la limite de φ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1, 1[$.
3. Soit $a \in]0, 1[$. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Exercice 3: ** Limite uniforme d'une suite de polynômes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
2. Que dire du polynôme $P_n - P_N$?
3. En déduire que f est nécessairement un polynôme.

Exercice 4: ** Dérivabilité d'une somme d'une série de fonctions

On considère la série de fonctions de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 5: **** Fonction ζ de Riemann

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Prouver que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
4. Déterminer $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s)$.
5. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 1$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

   En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.

Exercice 6: *** Quelques propriétés d'une somme d'une série de fonctions

Soit f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}.$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ à déterminer.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition et que sa restriction à $]a, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. f est-elle dérivable en a ?

Exercice 7: ** Régularité d'une somme de série 1

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ où u_n est l'application

$$u_n \left\{ \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{n^x} \end{array} \right.$$

1. Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $]1, +\infty[$.

On note f la somme de cette série.

2. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[$.

Exercice 8: * Un grand classique (CCP)

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

Exercice 9: ** Exemple d'une série de fonctions alternées

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$.

Exercice 10: ** Convergence uniforme sous condition

On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 11: * Régularité d'une somme de série 2**

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ où u_n est l'application

$$u_n \left\{ \begin{array}{cccc}]1, +\infty[& \times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & , \quad y & \mapsto & \frac{1}{n^x \ln(n)^y} \end{array} \right.$$

1. Montrer que la série de fonctions converge simplement.

On note f la somme de cette série.

2. Montrer que f est continue.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa différentielle.

22.C Exercices théorèmes de Lebesgue :

Exercice 12: ** Régularité de la fonction Γ**

On définit la fonction Γ par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad \text{pour x} > 0.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. Montrer que la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 13: * Transformée de Fourier de la Gaussienne**

On définit la Gaussienne par la fonction g suivante :

$$g(x) = e^{-ax^2}$$

où a est un paramètre réel strictement positif.
Calculer $f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x$.

(*Indication : on déterminera une équation différentielle vérifiée par* f.)

Exercice 14: * Convergence dominée 1

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq 1$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n\, dx$.

Exercice 15: *** Fonction Γ et sa formule de Gauss

Soit la fonction Γ définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
3. En introduisant $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt$, démontrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

   On admettra que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$ si on n'a pas encore vu le cours de convexité.

Exercice 16: * Convergence dominée 2

Soit la suite de fonction dénie de la manière suivante :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

Exercice 17: ** Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.

1. Démontrer que pour tout $A > 0$ l'intégrale $\int_0^A f(t)\cos(xt)\ \ \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)\ \ \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 18: *** Première application usuelle de Riemann-Lebesgue

1. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $\int_a^b g(t)\sin(nt)\ \ \mathrm{d}t \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(nt)\ \ \mathrm{d}t \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 19: * Suites de Riemann et intégrales

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue et croissante. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$.

1. On suppose que $\int_a^b f(t)\, dt$ converge. Montrer que la suite (S_n) converge vers $\int_a^b f(t)\, dt$.
2. On suppose que $\int_a^b f(t)\, dt$ diverge. Montrer que la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

23 Topologie et probabilités

23.A Questions de cours :

1. Soit A une partie de E, montrer que $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne.
2. Caractérisation de la continuité des applications linéaires
3. Démontrer la caractérisation de la continuité par les images réciproques des ouverts.

23.B Exercices topologie :

Exercice 1: *

Montrer que la distance d'un élément $x \in E$ à A est nulle si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Exercice 2: * Sous-groupes de $\mathbb{R}$**

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H; x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3: ** Deux topologies violemment différentes / deux normes violemment non équivalentes

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
3. En déduire que les normes ne sont pas équivalentes

Exercice 4: * Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$**

Notons $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5: ** Densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ qui associe à une matrice le maximum des sommes des valeurs absolues des éléments de chaque ligne de la matrice. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

23.C Exercices probabilités :

Exercice 6: * Formule de Wald**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes des précédentes. On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum k = 1^n X_k(\omega)$ et $S_0(\omega) = 0$, puis $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

1. Montrer que $G_S = G_T \circ G_X$.
2. En déduire que si T et les X_n admettent une espérance finie alors S aussi et $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[X_1]$

Exercice 7: ** Loi des moments faible

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \dots, n-1\}$.
Montrer que la loi de X est déterminée par $\mathbb{E}[X^k]$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Exercice 8: ** Somme de deux lois de Poisson

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 9: * Déterminer les moments**

Soit $p \in]0, 1[$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$P(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

En employant la fonction génératrice de X, déterminer a et calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 10: ** Fonctions génératrices des lois usuelles

Déterminer les fonctions génératrices des lois suivantes :

1. loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$
2. loi binomiale
3. loi de Poisson
4. loi géométrique

Exercice 11: * Somme Poisonnienne de Bernoulli**

Si N suit une loi de Poisson de paramètre λ et les X_i suivent des lois de Bernoulli de paramètre p, montrer que $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

24 Topologie : Continuité compacité et dimension finie

24.A Questions de cours :

1. Soit A une partie de E, montrer que $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne.
2. Caractérisation de la continuité des applications linéaires
3. Démontrer la caractérisation de la continuité par les images réciproques des ouverts.
4. L'image continue d'un compact est compacte

24.B Exercices continuité :

Exercice 1: *

Montrer que la distance d'un élément $x \in E$ à A est nulle si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Exercice 2: * Sous-groupes de $\mathbb{R}$**

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H; x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire que, si a et b sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
   On admettra que pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, on a $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 3: ***

On pose $A = \{e^{in} \quad / \quad n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $\overline{A} = U$, l'ensemble des nombres de module 1.

Exercice 4: ** Deux topologies violemment différentes / deux normes violemment non équivalentes

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
3. En déduire que les normes ne sont pas équivalentes

Exercice 5: * Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$**

Notons $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6: ** Densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ qui associe à une matrice le maximum des sommes des valeurs absolues des éléments de chaque ligne de la matrice. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7: **

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evndf, soit F une partie fermée de E et $f : F \to F$ une application contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Montrer que le résultat précédent reste valable même si on a seulement f^p est contractante pour un entier naturel p.

Exercice 8: **

Soit E un espace vectoriel normé, et V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\mathring{V} \neq \emptyset$, alors $V = E$.
3. Application 1 : soit H un hyperplan de E. Démontrer que H est ou bien fermé ou bien dense dans E.
4. Application 2 : soit A une partie de E. Démontrer que $\text{vect}(\overline{A}) \subset \overline{\text{vect}(A)}$.

Exercice 9: **

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On le muni de la norme infinie.
On considère l'endomorphisme :

$$T \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & \left(Tf : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t\right) \end{array} \right.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme continue de E.
2. Est-il injectif ? surjectif ?

24.C Exercices compacité :

Exercice 10: ** groupes orthogonal / spécial orthogonal**

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact (mais n'est pas connexe par arcs).
2. Montrer que $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact (et connexe par arcs. En déduire que $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est la composante connexe par arcs de l'identité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$).

Exercice 11: **

Soit E un evn.

1. La somme de deux fermés de E est-elle nécessairement fermée ?
2. Montrer que la somme d'un compact et d'un fermé est fermée
3. Montrer que la somme de deux compactes est compacte.

Exercice 12: ***

Soit E un espace vectoriel normé. Soit F et G deux fermés non vides disjoints de E. Montrer qu'il existe une application continue f de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f_F = 0$ et $f_G = 1$.
Cette propriété est-elle vraie pour deux ouverts non vides disjoints ?

Exercice 13: *****

Soit f une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que, pour toute partie A compacte (resp. connexe par arcs), $f(A)$ est compact (resp. connexe par arcs). Montrer que f est continue.

25 Oraux blancs 2

Exercice 1: Fonctions spéciales usuelles

1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme dans le cas positif
2. Montrer que la fonction ζ de la variable s donnée par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

   est indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.
3. Soit a un réel strictement positif.
   Calculer $f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x$ en fonction de $f(0)$.

   (*Indication : on déterminera une équation différentielle vérifiée par* f.)

Exercice 2: Fonctions spéciales usuelles

1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme dans le cas positif
2. Montrer que la fonction ζ de la variable s donnée par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

   est indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.
3. Soit a un réel strictement positif.
   Calculer $f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x$ en fonction de $f(0)$.

   (*Indication : on déterminera une équation différentielle vérifiée par* f.)

Exercice 3: Fonctions spéciales usuelles

1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme dans le cas positif
2. Montrer que la fonction ζ de la variable s donnée par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

   est indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.
3. Soit a un réel strictement positif.
   Calculer $f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x$ en fonction de $f(0)$.

   (*Indication : on déterminera une équation différentielle vérifiée par* f.)

26 Équations différentielles linéaires

26.A Questions de cours :

1. Caractérisation des systèmes fondamentaux de solutions par le wronskien
2. En admettant le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, montrer que l'ensemble des solutions de $y' = a(t)y$ est un espace vectoriel de dimension n où $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$
3. Résolution de $y' = a(t)y + b(t)$ où $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$ lorsque l'on connait une base de solutions de l'équation homogène associée.

26.B Exercices :

Exercice 1: ** Lemme de Gronwall

(a) Soient t_0 un réel, u_1 un réel strictement positif et f une application de $[t_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ continue. Soient ϕ_1 la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t)y, \\ y(t_0) = u_1, \end{cases}$$

et ϕ une application de $[t_0, +\infty[$ dérivable, telle que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $\phi'(t) \leq f(t)\phi(t)$ et $\phi(t_0) \leq u_1$. Montrer que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $\phi(t) \leq \phi_1(t)$.

(b) Soient u et v des applications continues de $[t_0, t_0 + T]$ dans $\mathbb{R}$ à valeurs positives et C un réel tels que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$,

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds.$$

Montrer que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$,

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right).$$

Exercice 2: * Résolution EDL de degré 3**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} + 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0$$

Exercice 3: * Histoires de parités et de périodicité**

1. Soit ψ une solution sur $\mathbb{R}$ de $\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t)$ avec a et b deux fonctions impaires. Montrer que ψ est paire.
2. On considère l'équation différentielle :

$$a(t)\frac{d^2y}{dt^2} + b(t)\frac{dy}{dt} + c(t)y = d(t)$$

avec a, b, c, d définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques et a ne s'annule pas.
Montrer que ψ est solution de cette équation différentielle si et seulement si $\psi(0) = \psi(2\pi)$ et $\psi'(0) = \psi'(2\pi)$.

Exercice 4: *** Solutions maximales à un problème de Cauchy

Etudier les éventuelles solutions maximales au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \left|x + \mathrm{e}^t\right|, \\ x(0) = -1, \\ \frac{dx}{dt}(0) = -1 \end{cases}$$

Exercice 5: *** Utilisation des séries entières 1

Déterminer des solutions de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0,$$

développables en série entière au voisinage de 0.
En déduire la forme générale des solutions sur $]-1,1[$.

Exercice 6: ** Quelle régularité vous dîtes ?

Déterminer les éléments f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ tels que pour tout élément x de $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 7: *** Transport de la limite

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f + f' + f''$ admet 2026 comme limite en $+\infty$. Montrer que f admet 2026 comme limite en $+\infty$.

Exercice 8: *** Signe du coefficient

Soit a un réel, et b une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue bornée. Soit l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ay + b(t).$$

On suppose que a est positif strictement. Montrer qu'il existe une et une seule solution de cette équation sur $\mathbb{R}$ qui soit bornée. Que dire si a est négatif ?

Exercice 9: Sous-groupes à un paramètre de $GL_n(\mathbb{K})$

Soit Φ un élément de $\mathcal{C}^0(GL_n(\mathbb{K}), \mathbb{R})$, telle que pour tout t et pour tout s réels, $\Phi(s+t) = \Phi(s)\Phi(t)$.
Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi(t) = \exp(tA).$$

Exercice 10:

Soit (f, g) une base de solutions sur I de l'équation différentielle homogène :

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

où p et q sont des applications de I dans $\mathbb{R}$ continues.

1. Montrer que les zéros de f sont isolés.
2. Prouver qu'entre deux zéros consécutifs de f, il y a exactement un zéro de g. On pourra étudier le signe du wronskien de f et g. On représentera les orbites de (12), on interprétera géométriquement w et on justifiera l'idée de son emploi.

Exercice 11:

Soit l'ensemble S des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues telles que pour tout x et tout y réels,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

1. Soit f un élément de S non nul. Montrer que $f(0)=1$ et que f est paire.
2. Soit f un élément de S non nul et soit deux fois dérivable. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f''(x)f(y)=f(x)f''(y).$$

3. Déterminer S.

Exercice 12:

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue intégrable, on considère l'équation différentielle $y''+f(t)y=0$.

1. Soit y une solution bornée de l'équation. Montrer que y' tend vers 0 en $+\infty$.
2. Soit y_1, y_2 deux solutions. Montrer que leur déterminant wronskien

$$W(t)=\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}$$

   est constant.
3. En déduire que l'équation admet une solution non bornée.

Exercice 13: ** Utilisation des séries entières 2 + abaissement du degré

Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(t^2+t)y''+(3t+1)y'+y=0. \tag{1}$$

Existe-il des solutions globales à (17) ?

(Indication : On regardera d'abord les solutions développables en série entières puis on utilisera la méthode d'abaissement du degré

Exercice 14: *** Utilisation des séries entières 3

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x)=\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Développer f en série entière au voisinage de 0.

Exercice 15: ** Système différentiel 1

On note les éléments de $\mathbb{R}^3$ en colonne. Déterminer les éléments $\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\\ \psi\end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ tels que :

$$\begin{cases} 2\phi' &= \phi+\chi+2\psi \\ 2\chi' &= \phi+\chi-2\psi \\ 2\psi' &= -\phi+\chi+4\psi \end{cases}$$

Exercice 16: ** Système différentiel 2

Résoudre le système différentiel d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = x'(t) + y'(t) - y(t) \\ y''(t) = x'(t) + y'(t) - x(t) \end{cases}$$

27 Intégrales à paramètre

27.A Questions de cours :

1. Définir valeur propre, vecteur propre et élément propre.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.
3. Énoncer le théorème du rang

27.B Exercices :

Exercice 1: ** Régularité de la fonction Γ**

On définit la fonction Γ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt, \quad \text{pour x} > 0.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. Montrer que la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 2: * Transformée de Fourier de la Gaussienne**

On définit la Gaussienne par la fonction g suivante :

$$g(x) = e^{-ax^2}$$

où a est un paramètre réel strictement positif.
Calculer $f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}e^{-ax^2}\ \mathrm{d}x$.

(*Indication : on déterminera une équation différentielle vérifiée par f.*)

Exercice 3: * Convergence dominée 1

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq 1$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n\,dx$.

Exercice 4: * Fonction Γ et sa formule de Gauss**

Soit la fonction Γ définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
3. En introduisant $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$, démontrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

   On admettra que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$ si on n'a pas encore vu le cours de convexité.

Exercice 5: * Convergence dominée 2

Soit la suite de fonction dénie de la manière suivante :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

Exercice 6: ** Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.

1. Démontrer que pour tout $A > 0$ l'intégrale $\int_0^A f(t)\cos(xt)\ \ \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)\ \ \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 7: *** Première application usuelle de Riemann-Lebesgue

1. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $\int_a^b g(t)\sin(nt)\ \ \mathrm{d}t \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(nt)\ \ \mathrm{d}t \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 8: * Suites de Riemann et intégrales

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ continue et croissante. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$.

1. On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Montrer que la suite (S_n) converge vers $\int_a^b f(t)\,dt$.
2. On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge. Montrer que la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 9: Fonctions spéciales usuelles

1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme dans le cas positif
2. Montrer que la fonction ζ de la variable s donnée par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

   est indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.
3. Soit a un réel strictement positif.
   Calculer $f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-ax^2}\ \ \mathrm{d}x$ en fonction de $f(0)$.

   (*Indication : on déterminera une équation différentielle vérifiée par* f.)

28 Arithmétique, Calcul différentiel et Optimisation

28.A Questions de cours :

1. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si c'est un anneau intègre si et seulement si n est premier
2. Théorème chinois
3. Un groupe est monogène fini si et seulement si il est cyclique
4. Morphismes de groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
5. différentielle d'une application différentiable en un extremum local.
6. Application constante sur un ouvert convexe

28.B Exercices arithmétique :

Exercice 1: ** Quelques équations de congruences

1. Réduire dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue a : $a^2 - \overline{100} = \overline{0}$
2. Réduire dans $\mathbb{Z}/121\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue a : $a^2 - \overline{100} = \overline{0}$
3. Réduire dans $\mathbb{Z}/221\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue a : $a^2 + \overline{11}a - \overline{12} = \overline{0}$

Exercice 2: * Une drôle de somme**

Soit p un nombre premier. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} a^k$ vaut soit 0 soit 1 (et préciser quand se présente chacun des deux cas).

Exercice 3: ** Idéaux premiers et radical d'un idéal**

On dit qu'un idéal I d'un anneau A est premier lorsque :
si $ab \in I$ alors $a \in I$ ou $b \in I$.

1. Montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $p\mathbb{Z}$ pour p premier.
2. Montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{K}[X]$ sont de la forme $\langle P \rangle$ pour un certain polynôme P irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

On appelle radical d'un idéal I l'ensemble $\sqrt{I} = \{a \in A \quad / \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \ , \ a^n \in I\}$.

3. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal
4. Montrer que si I est un idéal premier d'un anneau A alors $I = \sqrt{I}$

Exercice 4: ** 2 idéaux c'est un corps !

Montrer qu'un anneau qui n'a que deux idéaux est un corps

Exercice 5: * Où sont les irréductibles ?**

1. Quels sont les irréductibles de degré 2 et 3 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$?
2. Quels sont les irréductibles de degré 4 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 6: * Les groupes d'ordre 4

Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre 4.

Exercice 7: ** Que des éléments d'ordre 2

Soit G un groupe dont tous les éléments (sauf l'élément neutre) sont d'ordre au plus deux. Démontrer que G est abélien.

Exercice 8: ** Partitionnement par les ordres**

Soit G un groupe cyclique d'ordre n.

1. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique
2. Soit d un diviseur positif de n. Montrer que G admet un unique sous-groupe d'ordre d.
3. Montrer que $\sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d|n}} \varphi(d) = n$

Exercice 9: ** Sous-groupe d'un groupe d'inversibles**

Soit $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

1. Donner la liste de tous les éléments de G.
2. Pour tout $a \in G$, déterminer le sous-groupe $\langle a \rangle$ engendré par a.
3. Déterminer un ensemble minimal de générateurs de $(G, \cdot)$.
4. $(G, \cdot)$ est-il un groupe cyclique ?
5. Déterminer tous les sous-groupes de G et, pour chaque sous-groupe, préciser un ensemble de générateurs.
6. Parmi les sous-groupes de $(G, \cdot)$, lesquels sont isomorphes à un groupe additif $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 10: ** Diviseurs**

Soit $n \geq 2$; on choisit de manière équiprobable un des entiers compris entre 1 et n ; soit p un diviseur de n et A_p l'événement : le nombre choisi est divisible par p.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.
2. Montrer que si $p_1, \ldots, p_r$ sont les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. En déduire le calcul de $\varphi(n)$.

28.C Exercices calcul différentiel

Exercice 1: * Différentielle du déterminant**

1. Calculer la différentielle du déterminant en I_n
2. En déduire la différentielle du déterminant en $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
3. En déduire la différentielle du déterminant en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 2: ** Différentielle de l'inverse matriciel

Soit $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$.

1. Démontrez que ϕ est différentiable en I_n et calculez sa différentielle en ce point.
2. Même question en $M \in GL_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Exercice 3: ** Puissances de matrice

Soit $p \in [\![2, +\infty[\![$, on pose $\phi_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $M \mapsto M^p$. Montrer que ϕ_p est différentiable et donner sa différentielle.
En déduire que l'exponentielle matricielle est différentiable en 0.

Exercice 4: ** Produit scalaire

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable. Calculer la différentielle de $x \mapsto \langle f(x), f(x) \rangle$.
En déduire la différentielle de $N = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Exercice 5: *** La norme au quotient

Soit $f : E\backslash\{0\} \to E\backslash\{0\}$; $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Montrer que f est différentiable et donner sa différentielle.

Exercice 6: *** Gradient affine

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\|x\|_A^2 - {}^t x b \end{array} \right.$$

où $\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$ est le produit scalaire associé à la matrice A.
Montrer que $\nabla\phi(x) = Ax - b$.

Exercice 7: ** Multiplication dans la norme 44.3

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ un réel. Soit

$$f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} E\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|ax\| \end{array} \right.$$

Montrer que f_a est différentiable et donner son gradient.

Exercice 8: *** Majoration de la norme du gradient i.e. IAF

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit C un ouvert convexe de E. Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $\nabla f(x) \leq 2025$.
Montrer que pour tout couple (a, b) d'éléments de C on a :

$$|f(a) - f(b)| \leq 2025\|a - b\|.$$

Exercice 9: ** Continuité et dérivées directionnelles

Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en $(0, 0)$. Est-elle continue en ce point ?

Exercice 10: * Continuité

Etudier la continuité en $(0,0)$ de l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{x^2-3xy^2}{x+y} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exercice 11: * Classe $\mathcal{C}^1$**

Soit

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que F est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 12: * Classe $\mathcal{C}^1$ (2)**

Soit

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{x\sin(y)-y\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que F est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 13: * Construction à partir d'une forme linéaire**

Soit E un $\mathbb{R}$-evn. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue (automatique seulement en dimension finie). Soit f l'application de E dans E définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \varphi(x)x.$$

Montrer que f est différentiable sur E, donner sa différentielle et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 14: * Les cordes vibrantes**

Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

à l'aide d'un changement de variables de la forme $u = x + at$, $v = x + bt$.

28.D Exercices optimisation

Exercice 1: * Extrema locaux d'une fonction de 3 variables**

Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz-4(x+y+z)$ et préciser leur nature.

Exercice 2: * Points critiques et extrema d'une fonction de deux variables**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = x^4 - \frac{1}{3}y^3 - xy^2 + 1$. Déterminer ses extrema et leur nature.

Exercice 3: *** Extrema liés

Étudier les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \exp(axy)$, $a > 0$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

Exercice 4: *** Inégalité arithmético-géométrique

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n$. On note $\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n ;\ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

1. Démontrez que f admet un maximum global sur Γ et le déterminer.
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Exercice 5: ***(*) Valeur propre d'uen matrice symétrique réelle

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \langle Av, v \rangle \end{array} \right.$.
En utilisant le théorème des extrema liés, justifier que A admet une valeur propre.