

Exercices colles MP*

LAURENT MONTAIGU

Contents

1	Semaine 1 : Anneaux et algèbres ; Révisions d'algèbre linéaire	3
2	Semaine 2 : Réduction des endomorphismes I	4
3	Semaine 3 : Réduction des endomorphismes II	5
4	Semaine 4 : Révision séries numériques	6
5	Semaine 5 : Intégrales généralisées	7
6	Semaine 6 : Suites et séries de fonctions	8
7	Semaine 7 : Intégrales à paramètres	9
8	Semaine 8 : Révisions d'analyse, Espaces vectoriels normés	10
9	Semaine 9 : Espaces vectoriels normés et topologie	11
10	Semaine 10 : Topologie	12
11	Semaine 11 : Espaces euclidiens I	13
12	Semaine 12 : Espaces euclidiens II	14
13	Semaine 13 : Equations différentielles linéaires	15
14	Semaine 14 : Séries entières	16
15	Semaine 15 : Révisions d'analyse	17
16	Semaine 16 : Probabilités I	18
17	Semaine 17 : Probabilités II	19
18	Semaine 18 : Probabilités III	21
19	Semaine 19 : Calcul différentiel I	22
20	Semaine 20 : Calcul différentiel II	23
21	Semaine 21 : Groupes	25
22	Semaine 22 : Révisions	26
23	Eléments de corrections	28

1 Semaine 1 : Anneaux et algèbres ; Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1. (Solution)

Soit A un anneau commutatif unitaire, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- Les idéaux de A sont engendrés par une partie finie.
- Toute suite croissante d'idéaux $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$ est stationnaire.

Exercice 2. (Solution)

Soit A un anneau commutatif unitaire, montrer que A est un corps ssi $\{0\}$ et A sont les seuls idéaux de A .

Exercice 3. (Solution)

Soit A un anneau commutatif unitaire intègre.

- On suppose A fini, montrer que A est un corps.
- On suppose que A a un nombre fini d'idéaux, montrer que A est un corps.

Exercice 4. (Solution)

Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A . On pose $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \geq 1, x^n \in I\}$.

1. Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A , que dire si A n'est pas commutatif ?
2. Si $A = \mathbb{Z}$ et I un idéal de A , déterminer \sqrt{I} .
3. Montrer $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Exercice 5. (Solution)

On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a + ib\}$ et pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = z\bar{z} = a^2 + b^2$.

1. Montrer que $z \in \mathbb{Z}[i]$ est inversible ssi $N(z) = 1$, en déduire les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau principal.

Exercice 6. (Solution)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n .

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E .
2. En déduire que $v \in \mathcal{L}(E)$ commute avec u si et seulement si v est un polynôme en u .

Exercice 7. (Solution)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $u^{n_x}(x) = 0$, montrer que u est nilpotent. Le résultat est-il encore vrai en dimension infinie ?

Exercice 8. (Solution)

Soit E un K -espace de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ $f \neq 0$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{rg}(f) = n \iff \forall g \in \mathcal{L}(E) \text{ rg}(f \circ g) = \text{rg}(g \circ f).$$

Exercice 9. (Solution)

Soit E un K -espace vectoriel et I, N deux sous-espaces supplémentaires de E . Soit

$$G = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(f) = I \text{ et } \text{ker}(f) = N\}$$

Montrer que (G, \circ) est un groupe.

Exercice 10. (Solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, déterminer le rang de $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(K))$ définie par $\varphi_A(M) = AM$.

Exercice 11. (Solution)

Soit $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ une matrice carrée. Montrer que $\text{rg}(M) \geq \text{rg}(A) + \text{rg}(C)$. Montrer que si A ou C est inversible, il y a égalité.

2 Semaine 2 : Réduction des endomorphismes I

Exercice 12. (Solution)

Montrer que la famille de fonctions $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Exercice 13. (Solution)

Déterminer le spectre de :

$$A = (1 - \delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. (Solution)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$P(u) \text{ inversible} \iff P \wedge \pi_u = 1.$$

En déduire une CNS sur π_u pour que $K[u]$ soit un corps.

Exercice 15. (Solution)

Soit $A \in \text{GL}_n(K)$ inversible, montrer que A^{-1} est un polynôme en A .

Exercice 16. (Solution)

Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X + 1$ annule M ?

Exercice 17. (Solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 18. (Solution)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

- *i*) Pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX - XB = C$.
- *ii*) Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX = XB \implies X = 0$.
- *iii*) $\chi_B(A)$ est inversible.
- *iv*) A et B n'ont pas de valeurs propres communes.

Exercice 19. (Solution)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $M^3 = M + I_n$, montrer que $\det(M) > 0$.

Exercice 20. (Solution)

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $B^p = A$ alors B est diagonalisable. Que dire si A n'est pas inversible ?

Exercice 21. (Solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ diagonalisable} \iff \forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)^n = 0 \implies P(A) = 0.$$

Exercice 22. (Solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
2. Montrer que M est diagonalisable ssi $A = 0$.

Exercice 23. (Solution)

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ diagonalisable} \iff f^2 \text{ diagonalisable et } \ker(f) = \ker(f^2).$$

3 Semaine 3 : Réduction des endomorphismes II

Exercice 24. (Solution)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $M^3 = M + I_n$, montrer que $\det(M) > 0$.

Exercice 25. (Solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ diagonalisable} \iff \forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)^n = 0 \implies P(A) = 0.$$

Exercice 26. (Solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$
2. Montrer que M est diagonalisable ssi $A = 0$.

Exercice 27. (Solution)

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ diagonalisable} \iff f^2 \text{ diagonalisable et } \ker(f) = \ker(f^2).$$

Exercice 28. (Solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ est nilpotente} \iff \forall k \geq 1, \operatorname{tr}(A^k) = 0$$

Exercice 29. (Solution)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $AB = 0$, montrer que A et B sont co-trigonalisables.

Exercice 30. (Solution)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré n , on écrit $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^k) \in \mathbb{Z}[X]$.

Exercice 31. (Solution)

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ soit bornée. Montrer que A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 32. (Solution)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$P(u) \text{ inversible} \iff P \wedge \pi_u = 1.$$

En déduire une CNS sur π_u pour que $K[u]$ soit un corps.

Exercice 33. (Solution)

Soit $A \in \text{GL}_n(K)$ inversible, montrer que A^{-1} est un polynôme en A .

Exercice 34. (Solution)

Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X + 1$ annule M ?

Exercice 35. (Solution)

Déterminer le spectre de

$$A = (1 - \delta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Semaine 4 : Révision séries numériques

Exercice 36. (Solution)

Montrer que l'ensemble des points de discontinuités d'une fonction croissante est dénombrable.

Exercice 37. (Solution)

Déterminer la nature et la somme éventuelle de $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^n k} \right)$.

Exercice 38. (Solution)

Déterminer la nature et la somme éventuelle de $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2} \right)$.

Exercice 39. (Solution)

Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln(n)^2}{2} + c + o(1)$. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 40. (Solution)

Montrer l'existence et calculer $S = \sum_{p|q} \frac{1}{p^2 q^2}$.

Exercice 41. (Solution)

Soit pour $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = \sum_{p \wedge q = k} \frac{1}{p^2 q^2}$. Exprimer S_k en fonction de S_1 et en déduire S_k pour $k \geq 1$.

Exercice 42. (Solution)

Soit $(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n}$ converge, montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Exercice 43. (Solution)

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, montrer que :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 0} u_n$$

Exercice 44. (Solution)

1. Soit $(w_n)_n$ une suite positive, montrer que $\sum_{n \geq 0} w_n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{w_n}{1+w_n}$ sont de même nature.
2. Soit $(u_n)_n$ une suite strictement positive et décroissante qui tend vers 0, montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n}$ divergent

Exercice 45. (Solution)

Soit (x_n) la suite définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + x_n^2$

1. Montrer que $(x_n)_n$ tend vers $+\infty$.
2. On pose $u_n = \frac{\ln(x_n)}{2^n}$, montrer que u_n converge.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha^{2^n}$.

5 Semaine 5 : Intégrales généralisées

Exercice 46. (Solution)

Déterminer la nature de $\int_0^{\infty} \ln(\tanh(x)) dx$.

Exercice 47. (Solution)

Déterminer la nature de $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$.

Exercice 48. (Solution)

Démontrer la convergence et calculer $I = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$.

Exercice 49. (Solution)

Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Exercice 50. (Solution)

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante et intégrable. Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 51. (Solution)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\int_0^{\infty} f$ converge, montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 52. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} l$ et $\int_0^{\infty} f(x) dx$ converge. Justifier l'existence et donner la valeur de :

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(a+x) - f(b+x)) dx.$$

Exercice 53. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que f et f' soient de carré intégrables sur \mathbb{R}^+ .

1. Montrer que ff' est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
2. En déduire que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 54. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , nulle en 0. On suppose que f et f'' sont de carré intégrables. Montrer que f' est de carré intégrable et que :

$$\left(\int_0^{\infty} f'(x)^2 dx \right)^2 \leq \int_0^{\infty} f(x)^2 dx \int_0^{\infty} f''(x)^2 dx.$$

Exercice 55. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable. On pose pour $x > 0$, $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Montrer que g est de carré intégrable et que :

$$\int_0^{\infty} g(x)^2 dx \leq 4 \int_0^{\infty} f(x)^2 dx.$$

6 Semaine 6 : Suites et séries de fonctions

Exercice 56. (Solution)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la convergence simple et uniforme de $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ sur $[0, 1]$.

Exercice 57. (Solution)

Soit $(a_n)_n$ une suite positive et décroissante. On pose pour $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = a_n x^n(1-x)$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que la convergence est normale ssi $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge.
3. Montrer que la convergence est uniforme ssi $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exercice 58. (Solution)

Soit $f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$, étudier la convergence normale et uniforme sur \mathbb{R} de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n f_n$

Exercice 59. (Solution)

Soit pour $x \geq 0$, $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$. Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ mais n'est pas dérivable à droite en 0.

Exercice 60. (Solution)

Soit (f_n) une suite de fonction continues définies sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} et qui converge uniformément vers f . Soit $(x_n)_n \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ convergent vers $x \in [a, b]$. Montrer :

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x).$$

Exercice 61. (Solution)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall k \geq 0 \int_0^1 x^k f(x) dx = 0$, montrer que f est nulle.

Exercice 62. (Solution)

Soit $(P_n)_n$ une suite de polynômes qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers f , que dire de f ?

Exercice 63. (Solution)

Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers f , soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $g \circ f_n$ converge uniformément vers $g \circ f$ et que la continuité de g ne suffit pas.

7 Semaine 7 : Intégrales à paramètres

Exercice 64. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f(0) = 0$, montrer que $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 65. (Solution)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue avec $f(1) \neq 0$, déterminer un équivalent de $\int_0^1 t^n f(t) dt$.

Exercice 66. (Solution)

Déterminer un équivalent de $\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx$.

Exercice 67. (Solution)

Montrer la convergence et calculer $\int_0^\infty \frac{x}{\sinh(x)} dx$.

Exercice 68. (Solution)

Montrer que pour $\Re(s) > 1$, $\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$.

Exercice 69. (Solution)

En considérant $F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln(x)} dx$, calculer $\int_0^1 \frac{x - 1}{\ln(x)} dx$.

Exercice 70. (Solution)

Soit (a, b) deux réels strictement positifs montrer la convergence et calculer :

$$I(a, b) = \int_0^\infty e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} dt.$$

Exercice 71. (Solution)

Montrer que $\alpha \mapsto I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ puis écrire $I(\alpha)$ comme la somme d'une série.

Exercice 72. (Solution)

Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-ixt} dt$.

Exercice 73. (Solution)

On pose pour $|x| < 1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

1. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-nt^2} dt$.
2. Montrer que pour $|x| < 1$, $f(x) = x + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{e^{t^2} - x} dt$.
3. Montrer que $x \mapsto \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{e^{t^2} - x}$ est de classe \mathcal{C}^{∞} sur $] -\infty, 1[$.

8 Semaine 8 : Révisions d'analyse, Espaces vectoriels normés

Exercice 74. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que f et f' soient de carré intégrables sur \mathbb{R}^+ .

- Montrer que ff' est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
- En déduire que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 75. (Solution)

On pose pour $|x| < 1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

- Montrer que pour $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-nt^2} dt$.
- Montrer que pour $|x| < 1$, $f(x) = x + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{e^{t^2} - x} dt$.
- Montrer que $x \mapsto \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{e^{t^2} - x}$ est de classe \mathcal{C}^{∞} sur $] -\infty, 1[$.

Exercice 76. (Solution)

Montrer que $\alpha \mapsto I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ puis écrire $I(\alpha)$ comme la somme d'une série.

Exercice 77. (Solution)

Soit $f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$, étudier la convergence normale et uniforme sur \mathbb{R} de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n f_n$.

Exercice 78. (Solution)

Soit $(a_n)_n$ une suite positive et décroissante. On pose pour $x \in [0, 1]$ $f_n(x) = a_n x^n (1-x)$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

- Montrer que f est bien définie.
- Montrer que la convergence est normale ssi $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge.
- Montrer que la convergence est uniforme ssi $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 79. (Solution)

Montrer que $P \mapsto XP'$ n'est continue pour aucune norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 80. (Solution)

Donner une CNS sur $A \subset \mathbb{R}$ pour que $\|P\|_A := \sup_{x \in A} |P(x)|$ soit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 81. (Solution)

Donner une CNS sur $A \subset [0, 1]$ pour que $\|f\|_A := \sup_{x \in A} |f(x)|$ soit une norme sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 82. (Solution)

Soit $E := \ell^1(\mathbb{N}^*) = \left\{ (u_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty \right\}$, on pose pour $u \in E$, $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}$.

- Montrer que φ est bien définie.
- On munit E de la norme $\|u\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, montrer que φ est continue et calculer sa norme surbornée.
- On munit E de la norme $\|u\|_{\infty} := \sup_{n \geq 1} |u_n|$, montrer que φ est continue et calculer sa norme surbornée.
- Trouver une norme qui rende φ non continue.

9 Semaine 9 : Espaces vectoriels normés et topologie

Exercice 83. (Solution)

Montrer que $P \mapsto XP'$ n'est continue pour aucune norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 84. (Solution)

Donner une CNS sur $A \subset \mathbb{R}$ pour que $\|P\|_A := \sup_{x \in A} |P(x)|$ soit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 85. (Solution)

Donner une CNS sur $A \subset [0, 1]$ pour que $\|f\|_A := \sup_{x \in A} |f(x)|$ soit une norme sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 86. (Solution)

Soit $\ell^1(\mathbb{N}^*) := \left\{ (u_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty \right\}$, on pose pour $u \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$, $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}$.

- Montrer que φ est bien définie.
- On munit E de la norme $\|u\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, montrer que φ est continue et calculer sa norme surbornée.
- On munit E de la norme $\|u\|_{\infty} := \sup_{n \geq 1} |u_n|$, montrer que φ est continue et calculer sa norme surbornée.
- Trouver une norme qui rende φ non continue.

Exercice 87. (Solution)

Soit E un espace vectoriel normé et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u \circ v - v \circ u = \text{Id}_E$. (\star)

- Montrer que (\star) n'est pas possible si E est de dimension finie.

- Montrer que (\star) n'est pas possible si u et v sont continus, on commencera par déterminer une autre expression de $u \circ v^n - v^n \circ u$.

Exercice 88. (Solution)

Soit E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire sur E . Montrer que f est continue ssi $\ker(f)$ est fermé.

Exercice 89. (Solution)

Soit E un evn et A, B deux parties de E telles que $d(A, B) := \inf_{(x,y) \in A \times B} \|x - y\| > 0$. Montrer qu'il existe U, V ouverts de E disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 90. (Solution)

Soit E un evn de dimension n et $C \subset E$ un convexe dense, montrer que $C = E$, on pourra procéder par récurrence sur la dimension.

Exercice 91. (Solution)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq p \leq n$, étudier les propriétés topologiques (ouvert, fermé, borné, dense, adhérence, intérieur) de $\Omega_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{rg}(M) = p\}$.

Exercice 92. (Solution)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $S(A) = \{PAP^{-1} \mid P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}$

- Montrer que $S(A)$ est inclus dans un hyperplan affine, en déduire que $S(A)$ est d'intérieur vide.
- Montrer que $S(A)$ est borné ssi $A = \lambda I_n$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Montrer que $0 \in \overline{S(A)}$ ssi A est nilpotente.
- Montrer que $S(A)$ est fermé ssi A est diagonalisable.

10 Semaine 10 : Topologie

Exercice 93. (Solution)

Soit E un evn, montrer que E est homéomorphe à sa boule unité ouverte.

Exercice 94. (Solution)

Soit E un evn, G un sous-espace fermé de E et F un sous-espace de dimension finie. Montrer que $F + G$ est fermé.

Exercice 95. (Solution)

Soit E un evn de dimension n et $C \subset E$ un convexe dense, montrer que $C = E$, on pourra procéder par récurrence sur la dimension.

Exercice 96. (Solution)

Soit E un evn et $X \subset E$ compact, soit $f : X \rightarrow X$ qui vérifie $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in X^2$ et $x \neq y$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 97. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction coercive et continue, i.e. $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$, montrer que f admet un minimum global.

Exercice 98. (Solution)

Soit E un evn et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E qui converge vers $l \in E$, montrer que $K = \{u_n \mid n \geq 0\} \cup \{l\}$ est compact.

Exercice 99. (Solution)

Déterminer la frontière de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 100. (Solution)

Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 101. (Solution)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq p \leq n$, étudier les propriétés topologiques (ouvert, fermé, borné, dense, adhérence, intérieur) de $\Omega_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{rg}(M) = p\}$.

Exercice 102. (Solution)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $S(A) = \{PAP^{-1} \mid P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}$

- Montrer que $S(A)$ est inclus dans un hyperplan affine, en déduire que $S(A)$ est d'intérieur vide.
- Montrer que $S(A)$ est borné ssi $A = \lambda I_n$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Montrer que $0 \in \overline{S(A)}$ ssi A est nilpotente.
- Montrer que $S(A)$ est fermé ssi A est diagonalisable.

11 Semaine 11 : Espaces euclidiens I

Exercice 103. (Solution)

Soit E un espace euclidien et (e_1, \dots, e_n) une bon de E . Soit F un sev de E et p la projection orthogonale sur F . Que vaut $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2$?

Exercice 104. (Solution)

Soit E un espace euclidien et p une projection sur un sev F de E . Montrer que p est une projection orthogonale ssi $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 105. (Solution)

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve l'orthogonalité, i.e. $x \perp y \implies f(x) \perp f(y)$. Montrer que f est la composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.

Indication : Prendre une bon (e_1, \dots, e_n) de E et montrer que tous les $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ ont la même norme.

Exercice 106. (Solution)

Soit E un espace préhilbertien et (e_1, \dots, e_n) une famille libre de E telle que :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$$

Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base de E .

Exercice 107. (Solution)

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$. Montrer que $M \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si a, b, c sont racines de $X^3 + X^2 + k$ avec $k \in [-\frac{4}{27}, 0]$.

Exercice 108. (Solution)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $M^T M = M M^T$ et $M^n = 0$, montrer que $M = 0$.

Exercice 109. (Solution)

Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A^{2023} = B^{2023}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 110. (Solution)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que $\langle Mx, x \rangle = 0$.
2. Montrer que M est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 111. (Solution)

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une unique matrice $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = H^3 + H$.

Exercice 112. (Solution)

Soit G un sous groupe compact de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\text{O}_n(\mathbb{R}) \subset G$, montrer que $G = \text{O}_n(\mathbb{R})$.
Indication : Utiliser la décomposition polaire.

12 Semaine 12 : Espaces euclidiens II

Exercice 113. (Solution)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, on définit pour $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle = \int_0^\infty P(x)Q(x)e^{-x} dx$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Montrer l'existence d'une base $(L_n)_n$ de $\mathbb{R}[X]$ orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ telle que pour tout n , L_n est de degré n et de coefficient dominant strictement positif.
3. Montrer que L_n est scindé à racines simples.

Exercice 114. (Solution)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$. On note $G(x_1, \dots, x_k) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}$.

1. Montrer que $G(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{S}_k^+(\mathbb{R})$
2. Montrer que $G(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R}) \iff (x_1, \dots, x_k)$ libre.
3. Soit F un sev de E de base (x_1, \dots, x_k) , montrer que pour $x \in E$, $d(x, F)^2 = \frac{\det(G(x, x_1, \dots, x_k))}{\det(G(x_1, \dots, x_k))}$

Exercice 115. (Solution)

Soit E un espace euclidien, $f \in O(E)$ et $F \subset E$ un sev de E . Montrer que F est stable par f si et seulement si F^\perp l'est.

Exercice 116. (Solution)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\left| \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \right| \leq n$.

Exercice 117. (Solution)

Soit A une matrice symétrique réelle non nulle, montrer que $\frac{(\text{Tr}(A))^2}{\text{Tr}(A^2)} \leq \text{rg}(A)$.

Exercice 118. (Solution)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle.

- Montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que $\langle Mx, x \rangle = 0$.
- Montrer que M est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 119. (Solution)

Soit M une matrice symétrique réelle de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

- Montrer $\lambda_1 = \min_{\|x\|=1} \langle Mx, x \rangle$ et $\lambda_n = \max_{\|x\|=1} \langle Mx, x \rangle$.
- Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, montrer $\lambda_k = \min_{\dim(F)=k} \max_{x \in F, \|x\|=1} \langle Mx, x \rangle$ où le minimum porte sur l'ensemble des sev $F \subset E$ de dimension k .

Exercice 120. (Solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive S , telle que $A^T = S^{-1}AS$.

13 Semaine 13 : Equations différentielles linéaires

Exercice 121. (Solution)

Résoudre le système de cauchy suivant : $(E) : \begin{cases} y' + y \tanh(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 122. (Solution)

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation suivante $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2 + 1}$.

Exercice 123. (Solution)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$.

Exercice 124. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(x) + f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 125. (Solution)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique. Montrer que l'équation $y' = ay + f$ admet une unique solution T périodique.

Exercice 126. (Solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une CNS sur A pour que les solutions de $X' = AX$ soient de norme euclidienne constantes.

Exercice 127. (Solution)

Soit $p, q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, montrer que les soluces non nulles de $y'' + py' + qy = 0$ ont un nombre fini de zéros sur $[0, 1]$.

Exercice 128. (Solution)

Soit $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et f, g deux solutions non nulles et non proportionnelles de l'équation $y'' + py + qy = 0$.

1. Montrer que les zéros de f sont isolés.
2. Montrer qu'entre deux zéros de f il y a un zéro de g . (Raisonnement par l'absurde et considérer le wronskien).

Exercice 129. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable. On considère l'équation $(E) : y'' + fy = 0$.

1. Soit y une solution bornée de (E) , montrer que y' tend vers $+\infty$.
2. Montrer que l'équation (E) admet des solutions non bornées. (Raisonnement par l'absurde et considérer une base de solutions (f, g) de (E)).

14 Semaine 14 : Séries entières

Exercice 130. (Solution)

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est $\frac{1}{R}$ où $R = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$.

Exercice 131. (Solution)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ où :

1. $a_n = \frac{n^n}{n!}$
2. $a_n = \sum_{d|n} d^2$
3. $a_n = \int_0^1 (1+t^2)^n dt$

Exercice 132. (Solution)

Soit $(b_n)_n$ une suite strictement positive telle que $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ ait un rayon de convergence infini. Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

Exercice 133. (Solution)

Développer en série entière en 0 la fonction $x \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

Exercice 134. (Solution)

Développer en série entière en 0 la fonction $x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ (on pourra chercher une équation différentielle vérifiée par f).

Exercice 135. (Solution)

Déterminer les solutions développables en séries entières en 0 de l'équation suivante : $xy'' + y' + xy = 0$.

Exercice 136. (Solution)

Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 137. (Solution)

On note T_n le nombre de partition de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Par exemple, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, on convient que $T_0 = 1$.

1. Montrer que pour $n \geq 0$, $T_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_k$.
2. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{T_n}{n!} z^n$ a un rayon $R > 0$ de convergence non nul.
3. On note f la somme de la série entière de la question précédente, calculer f sur $] -R, R[$ et en déduire une expression de T_n .

Exercice 138. (Solution)

On note φ l'indicatrice d'Euler et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Calculer le DSE en 0 de f . (On rappelle la formule suivante : $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$).

3. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)2^n}{9^n - 2^n}$.

15 Semaine 15 : Révisions d'analyse

Exercice 139. (Solution)

On note φ l'indicatrice d'Euler et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n}$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Calculer le DSE en 0 de f . (On rappelle la formule suivante : $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$).
- En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)2^n}{9^n - 2^n}$.

Exercice 140. (Solution)

On pose pour $|x| < 1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que pour $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-nt^2} dt$. (On rappelle : $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
2. Montrer que pour $|x| < 1$, $f(x) = x + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{e^{t^2} - x} dt$
3. Montrer que $x \mapsto \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{e^{t^2} - x} dt$ est de classe \mathcal{C}^{∞} sur $] -\infty, 1[$.

Exercice 141. (Solution)

Soit $(a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de carré sommable. On pose $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n-t}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est développable en série entière en 0 et calculer ce développement.
3. On suppose que f est nulle sur $] -\alpha, \alpha[$ pour un $\alpha > 0$, montrer que $(a_n)_n$ est nulle.

Exercice 142. (Solution)

On définit pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que Γ est bien définie et \mathcal{C}^{∞} sur $\mathbb{R}^{+\ast}$.
2. Montrer que pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et que cette dernière fonction est de classe \mathcal{C}^{∞} sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 143. (Solution)

Soit $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et T -périodiques. Discuter l'existence et l'unicité de solutions T -périodiques à l'équation $y' = ay + b$.

Exercice 144. (Solution)

Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement négative. Montrer que toute solution non nulle de $y'' + qy = 0$ s'annule au plus une fois.

Exercice 145. (Solution)

Soit $c_0(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites convergent vers 0 muni de $\|u\|_\infty$. Montrer que $\varphi : u \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$ est une forme linéaire continue et calculer sa norme subordonnée, est-elle atteinte ?

Exercice 146. (Solution)

Soit E un evn de dimension n et C un convexe dense de E . Montrer que $C = E$.

Exercice 147. (Solution)

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ et de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel de E tel qu'il existe $C > 0$ vérifiant : $\forall f \in F, \|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$.

1. Montrer que $F \neq E$.

2. Soit $(f_1, \dots, f_n) \in F^n$ orthonormée, montrer : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \left| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right| \leq C \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

3. En déduire que F est de dimension finie majorée par C^2 .

16 Semaine 16 : Probabilités I

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé, les variables aléatoires sont définies sur cet espace.

Exercice 148. (Solution)

Soit E un ensemble infini, déterminer la tribu engendrée par tous les singletons de E .

Exercice 149. (Solution)

Soit $n \geq 1$ un entier et A_1, \dots, A_n n évènements, montrer : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - n + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

Exercice 150. (Solution)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires discrètes et N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . On note Y l'application définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$$

Montrer que Y est une variable aléatoire discrète.

Exercice 151. (Solution)

Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre p . Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 152. (Solution)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Poisson et une loi géométrique. Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 153. (Solution)

Soit $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des variables centrées réduites et indépendantes. On note M la matrice aléatoire de coefficients $X_{i,j}$. Déterminer l'espérance et la variance de $\det(M)$.

Exercice 154. (Solution)

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs, λ et μ . Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 155. (Solution)

Soit X, Y deux variables aléatoires entières. Supposons que X suive une loi de Poisson de paramètre λ et que la loi de Y sachant $X = n$ soit une loi binomiale de paramètre n et $p \in]0, 1[$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 156. (Solution)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n . Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \right| < \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Exercice 157. (Solution)

Soit $\alpha > 1$.

1. Montrer que l'on peut munir $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ de la probabilité définie par son germe $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(m\mathbb{N}^*)$ pour $m \geq 1$.
3. Soit $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers, montrer que les événements $p_k\mathbb{N}^*$ et $p_l\mathbb{N}^*$ pour $k \neq l$ sont indépendants.
4. En déduire $\zeta(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-\alpha})^{-1}$.
5. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 158. (Solution)

Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements. On note $\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$.

1. On suppose $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.
2. On suppose les $(A_n)_n$ indépendants et $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité \mathbb{P}_1 sur \mathbb{N}^* telle que $\mathbb{P}_1(n\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
On pourra utiliser que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge où $(p_n)_{n \geq 1}$ désigne la suite strictement croissante des nombres premiers.

17 Semaine 17 : Probabilités II

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé, les variables aléatoires sont définies sur cet espace.

Exercice 159. (Solution)

Soit (X, Y) deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[0, 1]$.

1. Montrer que $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \frac{1}{4}$.
2. Soit A, B deux évènements, montrer que $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$ et caractériser les cas d'égalités.

Exercice 160. (Solution)

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suive une loi de Poisson. Montrer que Y suit une loi de poisson si et seulement si $X + Y$ suit une loi de poisson.

Exercice 161. (Solution)

Soit X, Y deux variables aléatoires géométriques indépendantes de paramètres respectifs p et q . Quelle est la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 162. (Solution)

Soit $r \geq 1$ un entier et $p \in]0, 1[$. On lance une pièce de probabilité truquée dont la probabilité d'obtenir face vaut p . On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir r faces. Déterminer la loi de X et déterminer sa fonction génératrice.

Exercice 163. (Solution)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et à valeurs dans \mathbb{N}^* . Soit N une variable aléatoire entière et indépendante des $(X_n)_{n \geq 1}$. On pose $S = \sum_{i=1}^N X_i$.

1. Justifier que S est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .
2. Montrer les relations suivantes entre fonctions génératrices : $G_S = G_N \circ G_{X_1}$.
3. En déduire que si X_1 et N sont d'espérances finies alors S aussi et $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N)$.

Exercice 164. (Solution)

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On en tire n en effectuant des tirages avec remise. On note X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus. Déterminer la loi de X et la loi de Y .

Exercice 165. (Solution)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher *i.e.* $\mathbb{P}(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- Déterminer $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0)$.
- Montrer $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ et donner un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ en $+\infty$.
- Montrer $\mathbb{E}(|S_{2n}|) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4n}{\pi}}$.

Exercice 166. (Solution)

Soit $\alpha > 1$.

1. Montrer que l'on peut munir $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ de la probabilité définie par son germe $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(m\mathbb{N}^*)$ pour $m \geq 1$.
3. Soit $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers, montrer que les événements $p_k\mathbb{N}^*$ et $p_l\mathbb{N}^*$ pour $k \neq l$ sont indépendants.
4. En déduire $\zeta(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-\alpha})^{-1}$.
5. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

18 Semaine 18 : Probabilités III

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé, les variables aléatoires sont définies sur cet espace.

Exercice 167. (Solution)

Soit X une v.a.d et $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une application. A quelle condition les variables X et $Y := f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 168. (Solution)

Soit p un nombre premier. On tire au hasard une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, quelle est la probabilité que cette matrice soit inversible ?

Exercice 169. (Solution)

Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires suivant la même loi qu'une variable X bornée. On suppose que $X_1 + X_2$ suit la loi de $2X$, montrer que $X_1 = X_2$ ps.

Exercice 170. (Solution)

Soit $\alpha > 1$.

1. Montrer que l'on peut munir $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ de la probabilité définie par son germe $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(m\mathbb{N}^*)$ pour $m \geq 1$.
3. Soit $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers, montrer que les événements $p_k\mathbb{N}^*$ et $p_l\mathbb{N}^*$ pour $k \neq l$ sont indépendants.
4. En déduire $\zeta(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-\alpha})^{-1}$.
5. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.
6. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité \mathbb{P}_1 sur \mathbb{N}^* telle que $\mathbb{P}_1(n\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 171. (Solution)

Soit X une v.a.d suivant une loi géométrique de paramètre p . On pose $Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Montrer que Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

Exercice 172. (Solution)

Soit $n \geq 1$. Déterminer le nombre de points fixe moyen d'une permutation de \mathfrak{S}_n .

Exercice 173. (Solution)

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On en tire n en effectuant des tirages avec remise. On note X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus. Déterminer la loi de X et la loi de Y .

Exercice 174. (Solution)

Soit $r \geq 1$ un entier et $p \in]0, 1[$. On lance une pièce de probabilité truquée dont la probabilité d'obtenir face vaut p . On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir r faces. Déterminer la loi de X et déterminer sa fonction génératrice.

Exercice 175. (Solution)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher *i.e.* $\mathbb{P}(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(S_n = 0)$, on distinguera les cas n pairs/impairs.
2. Déterminer le domaine de définition et calculer $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n$.
3. Soit $T := \min \{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, on note F la fonction génératrice de T . Montrer que $F = 1 + FG$.

Exercice 176. (Solution)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher *i.e.* $\mathbb{P}(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer $\mathbb{E}(|S_{2n}|) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4n}{\pi}}$.

19 Semaine 19 : Calcul différentiel I

Exercice 177. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , on définit $g : \mathbb{R}^{+*} \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ par $g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Calculer en fonction de Δf en fonction des dérivées de g .

Exercice 178. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f(0) = 0$, montrer qu'il existe des fonctions $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telles que $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 179. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ où les σ_k sont les fonctions symétriques élémentaires en les x_k , calculer le déterminant de la matrice Jacobienne de f .

Exercice 180. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\frac{f(x)}{\|x\|} \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que ∇f est surjective.

Exercice 181. (Solution)

Soit $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\bar{\Omega}$ de classe \mathcal{C}^2 sur Ω où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 .

- On suppose $\Delta u > 0$ sur Ω , montrer que $\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\bar{\Omega} \setminus \Omega} u$.
- Même question en supposant seulement $\Delta u \geq 0$.

Exercice 182. (Solution)

Déterminer les extremums locaux et globaux de $f(x, y) = y(x^2 + (\ln(y))^2)$.

Exercice 183. (Solution)

Soit $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Déterminer la dérivée de :

$$h(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt$$

Exercice 184. (Solution)

Déterminer les fonction $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que la fonction f définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$$

vérifie $\Delta f = 0$.

Exercice 185. (Solution)

Soit a, b deux réels et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 vérifiant :

$$a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

On suppose f bornée, montrer que f est nulle.

20 Semaine 20 : Calcul différentiel II

Exercice 186. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f(0) = 0$, montrer qu'il existe des fonctions $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telles que $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 187. (Solution)

Soit $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\overline{\Omega}$ de classe \mathcal{C}^2 sur Ω où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 .

1. On suppose $\Delta u > 0$ sur Ω , montrer que $\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\overline{\Omega} \setminus \Omega} u$.
2. Même question en supposant seulement $\Delta u \geq 0$.

Exercice 188. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 189. (Solution)

Soit $n \geq 1$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application définie par $f(M) = (\text{Tr}(M), \dots, \text{Tr}(M^n))$. Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa différentielle en tout point.

Exercice 190. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on pose $\varphi_{x,y} : t \mapsto f((1-t)x + ty)$.

1. Montrer que f est convexe si et seulement si $\varphi_{x,y}$ l'est pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.
2. On suppose f différentiable. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad (\star)$$

Exercice 191. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 et $c > 0$ tels que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on ait :

$$\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\|$$

1. Montrer : $\forall (x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|df(x) \cdot h\| \geq c\|h\|$.
2. Montrer que f est surjective (on pourra considérer pour $a \in \mathbb{R}^n$ le minimum de $\|f(x) - a\|^2$).

Exercice 192. (Solution)

Soit a, b deux réels et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 vérifiant :

$$a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

On suppose f bornée, montrer que f est nulle.

Exercice 193. (Solution)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - 2y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2}{x} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R},$$

à l'aide du changement de variable $(u, v) = (\ln(x), x^2y)$.

Exercice 194. (Solution)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} - y^2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } (\mathbb{R}^{+*})^2,$$

à l'aide du changement de variable $(u, v) = (xy, \frac{x}{y})$.

Exercice 195. (Solution)

Déterminer $T_{I_n}(\text{O}_n(\mathbb{R}))$ (penser à l'exponentielle de matrice).

Exercice 196. (Solution)

Déterminer $T_{I_n}(\text{SL}_n(\mathbb{R}))$ (penser à l'exponentielle de matrice).

21 Semaine 21 : Groupes

Exercice 197. (Solution)

Les groupes $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 198. (Solution)

Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 199. (Solution)

Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ sont-ils isomorphes ? Et les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et (\mathbb{R}^*, \times) ?

Exercice 200. (Solution)

Soient G_1, G_2 deux groupes cycliques. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe $G_1 \times G_2$ soit cyclique.

Exercice 201. (Solution)

Soit G un groupe et $(x, y) \in G^2$ deux éléments de G d'ordres premiers entre eux. On suppose de plus $xy = yx$, montrer $o(xy) = o(x)o(y)$.

Exercice 202. (Solution)

Soit G un groupe cyclique, déterminer le cardinal de $\text{Aut}(G)$.

Exercice 203. (Solution)

Soit G un groupe fini de cardinal n . On pose pour $p \in \mathbb{N}^*$, $G_p = \{x \in G \mid x^p = e\}$. On suppose que $|G_p| \leq p$ pour tout $p \geq 1$.

1. Montrer $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.
2. Montrer que G est cyclique.
3. Montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

Exercice 204. (Solution)

On note pour $n \geq 1$ $F_n = 2^{2^n} + 1$ (Nombres de Fermat).

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que si $2^n + 1$ est premier alors n est une puissance de 2.
2. Soit q un facteur premier de $2^{2^n} + 1$, montrer que $\bar{2}$ est d'ordre 2^{n+1} dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \times)$.
3. Montrer que tout facteur premier de F_n est de la forme $k2^{n+1} + 1$.

Exercice 205. (Solution)

Soit G un groupe fini vérifiant : $\forall x \in G, x^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. Montrer que $G \cong ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 206. (Solution)

Soit G ayant un nombre fini de sous-groupes, montrer que G est fini.

Exercice 207. (Solution)

Soit p un nombre premier et G un groupe fini de cardinal n divisible par p . On note $E = \{(x_1, \dots, x_p) \in G^p \mid x_1 \times \dots \times x_p = e\}$. On définit la relation \mathcal{R} sur E par :

$$(x_1, \dots, x_p) \mathcal{R} (y_1, \dots, y_p) \iff \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (y_1, \dots, y_p) = (x_k, \dots, x_p, x_1, \dots, x_{k-1})$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

2. Montrer que les classes d'équivalences ont 1 où p éléments.
3. Montrer $s + pq = n^{p-1}$ où s est le nombre de classes d'équivalences à un élément et q le nombre de celles à p éléments.
4. En déduire que G admet un élément d'ordre p .

Exercice 208. (Solution)

On appelle groupe dérivé $D(G)$ d'un groupe G le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $aba^{-1}b^{-1}$.

1. Montrer que les 3-cycles engendrent \mathfrak{A}_n pour $n \geq 3$.
2. Etablir que deux 3-cycles sont conjugués dans \mathfrak{S}_n pour $n \geq 3$ et dans \mathfrak{A}_n pour $n \geq 5$.
3. En déduire $D(\mathfrak{S}_n) = D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$.

22 Semaine 22 : Révisions

Exercice 209. (Solution)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = R^2$.
2. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^T A P = I_n$ et $P^T B P = D$ avec D diagonale.
3. On suppose $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $\alpha \in]0, 1[$, montrer $\det(\alpha A + (1 - \alpha)B) \geq \det(A)^\alpha \det(B)^{1-\alpha}$.

Exercice 210. (Solution)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \forall B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ Tr}(AB) \geq 0$.

Exercice 211. (Solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\det(A) = \text{Tr}(A) = 0$.

Exercice 212. (Solution)

Soit $p \geq 3$ un nombre premier et G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\Phi : G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ le morphisme de réduction des coefficients mod p est injectif. En déduire que $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ admet un nombre fini de sous-groupes finis (à isomorphismes près).

Exercice 213. (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante intégrable. Pour $t > 0$ on pose $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nt)$.

1. Montrer que S est bien définie et donner un équivalent de S en 0^+ .
2. En déduire un équivalent en 0^+ de $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{e^{tx}-1} dx$.

Exercice 214. (Solution)

Soit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ pour $\Re(s) > 1$. Montrer que pour $|x| < 1$, $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) x^{n-1}$ après avoir montré l'existence des deux membres de cette égalité.

Exercice 215. (Solution)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. Pour $f \in E$ on pose : $N(f) = \|f\varphi\|_{\infty}$.

1. Trouver une CNS sur φ pour que N soit une norme sur E .
2. Trouver une CNS sur φ pour que N soit une norme équivalente à $\|\cdot\|_{\infty}$.

Exercice 216. (Solution)

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(B^k)$ pour tout $k \geq 1$, montrer que $\chi_A = \chi_B$.
2. Soit $A, B : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux applications de classes \mathcal{C}^1 telles que $A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t)$ pour tout $t \geq 0$, montrer que $t \mapsto \chi_{A(t)}$ est constante.

23 Eléments de corrections

Solution 1. (Enoncé)

1 \implies 2 Soit $(I_n)_n$ une suite croissante d'idéaux, alors $I := \bigcup_{n \geq 0} I_n$ est un idéal de A donc est engendré par une partie finie (a_1, \dots, a_n) , comme chaque a_i est dans un I_{n_i} , on a par croissance, $(a_1, \dots, a_n) \in I^m$ où $m = \max_{i=1}^n n_i$ et donc $I = I_m$.

2 \implies 1 Soit I un idéal de A , on peut supposer I non nul. Soit $x \in I$, si $I = \langle x \rangle$ alors I est engendré par une partie finie, sinon il existe $y \in I \setminus \langle x \rangle$, on continue le procédé pour construire une suite croissante d'idéaux $(I_n)_n$ tous inclus, dans I et engendrés par une partie finie, cette suite est stationnaire à partir d'un rang $n \geq 1$ et par construction $I_n = I$ est engendré par une partie finie.

Solution 2. (Enoncé)

Supposons que A soit un corps, et soit I un idéal non nul de A . Soit $x \neq 0$ dans I , comme A corps x est inversible dans A et donc $1 = xx^{-1} \in I$ et $I = A$. Réciproquement, soit $x \neq 0$ dans A et $I = \langle x \rangle$, par hypothèse $I = A$ car $I \neq \{0\}$ donc $1 \in I$ et x inversible dans A .

Solution 3. (Enoncé)

1. Soit $a \in A$ non nul, l'application $\varphi_a : x \mapsto ax$ est injective par intégrité de A et comme A est fini elle est donc bijective, un antécédent de 1 par φ_a fournit l'inverse de a .

2. Soit $x \in A$ non nul, soit $I_n = \langle x^n \rangle$. Comme A possède un nombre fini d'idéaux, il existe $n < m$ tel que $I_n = I_m$, mais comme la suite $(I_n)_n$ est décroissante, on a $I_n = I_{n+1}$ donc il existe $a \in A$ tel que $x^n = ax^{n+1}$ et comme $x^n \neq 0$, on a par intégrité de A : $ax = 1$ et cela conclut.

Solution 4. (Enoncé)

1. Il est clair que $0 \in \sqrt{I}$, soit $(a, x) \in A \times \sqrt{I}$, alors il existe $n \geq 1$ tel que $x^n \in I$ et donc par commutativité $(ax)^n = a^n x^n \in I$ et $ax \in \sqrt{I}$. Soit maintenant $(x, y) \in \sqrt{I}$ et $n, m \geq 1$ tels que $x^n \in I$ et $y^m \in I$. On a alors

$$(x - y)^{n+m} = \sum_{k=0}^n \binom{n+m}{k} (-1)^k x^k y^{n-k} \underbrace{y^m}_{\in I} + \sum_{k=n+1}^{n+m} \binom{n+m}{k} (-1)^k y^{n+m-k} x^{k-n} \underbrace{x^n}_{\in I} \in I$$

Et cela conclut.

2. Si $I = 0$ ou $I = \mathbb{Z}$ alors $I = \sqrt{I}$. Sinon I est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \geq 2$. Alors $x \in \sqrt{I}$ si et seulement si il existe $m \geq 1$ tel que n divise x^m si et seulement si tous les facteurs premiers de n divisent x . Donc $\sqrt{I} = \prod_{p|n} p\mathbb{Z}$ où le produit est pris sur les nombres premiers divisant n .

3. Il est clair que $\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$, soit $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$, alors il existe m tel que $x^m \in \sqrt{I}$ donc il existe n tel que $(x^m)^n \in I$ et donc $x^{nm} \in I$ et $x \in \sqrt{I}$.

Solution 5. (Enoncé)

1. Si z est inversible alors il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$ donc $1 = N(zz') = N(z)N(z')$ et comme N est à valeurs dans \mathbb{N} , la seule possibilité est $N(z) = 1$. Inversement, si $N(z) = 1$ alors $z\bar{z} = 1$ et $\bar{z} \in \mathbb{Z}[i]$ donc z est bien inversible. Les inversibles $z = a + ib$ vérifient donc $a^2 + b^2 = 1$ donc nécessairement $z = \pm 1$ ou $z = \pm i$.

2. On reprend la démonstration de la primalité de \mathbb{Z} .

Solution 6. (Enoncé)

1. Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$, alors la famille $(x, \dots, u^{n-1}(x))$ est libre, en effet si $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(x) = 0$ alors en composant par u^{n-1} on a $\lambda_{n-1} u^{n-1}(x) = 0$ et donc $\lambda_{n-1} = 0$ et ainsi de suite.

2. Il est clair que si v est un polynôme en u alors v commute avec u . Inversement, soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u et le x de la question précédente. Il existe des scalaires $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ tels que $v(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x)$, montrons que $v = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i$ en montrant que ces deux endomorphismes coïncident sur la base $(x, \dots, u^{n-1}(x))$.

$$v(u^j(x)) = u^j(v(x)) = u^j \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{i+j}(x) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i \right) (u^j(x))$$

Et cela conclut.

Solution 7. (Enoncé)

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E , pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $u^{n_i}(e_i) = 0$. Donc pour $n = \max_{i=1}^n n_i$ on a bien $u^n = 0$ car $u^n(e_i) = 0$ pour tout i . Le résultat est faux en dimension infinie comme le montre la dérivation sur $E = \mathbb{R}[X]$.

Solution 8. (Enoncé)

\implies Si $\text{rg}(f) = n$ alors f est inversible et donc pour $g \in \mathcal{L}(E)$, $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(g) = \text{rg}(g \circ f)$.

\impliedby Par contraposée, si f n'est pas inversible, il existe $x \in E$ non nul tel que $f(x) = 0$. Comme f est non nulle, il existe $y \in E$ non nul tel que $f(y) \neq 0$. On complète $f(y)$ en une base $\mathcal{B} = (f(y), e_2, \dots, e_n)$ de E . Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ qui envoie tous les éléments de \mathcal{B} sur x . Alors $f \circ g = 0$ et $(g \circ f)(y) = x \neq 0$. Donc $(g \circ f) \neq 0$ et cela conclut.

Solution 9. (Enoncé)

G n'est pas a priori inclus dans $\text{GL}(E)$. Montrons que \circ est une bien lci sur G . Soit $(f, g) \in G^2$, alors $g \circ f(E) = g(I) \subset I$ et si $y \in I$, alors $y = g(x)$ pour $x \in E$ et $x = t + z$ avec $(t, z) \in I \times N$, on a alors :

$$y = g(x) = g(t + z) = g(t) = g(f(t')) \in \text{Im}(g \circ f)$$

D'où $\text{Im}(g \circ f) = I$ et on montre de même que $\text{Ker}(g \circ f) = N$ donc \circ est bien une lci sur G .

La loi \circ est associative. On vérifie facilement que la projection sur I parallèlement à N est un élément neutre sur G pour \circ .

Soit enfin $f \in G$, alors $f : E \rightarrow I$ est un isomorphisme, soit $g : I \rightarrow E$ la réciproque, alors en prolongeant g à E on posant $g(x) = 0$ pour $x \in N$, on vérifie que g est l'inverse de f pour \circ et $g \in G$.

Solution 10. (Enoncé)

Si A est inversible, il est immédiat que φ_A est inversible, d'inverse $\varphi_{A^{-1}}$. Soit maintenant r le rang de M . Il existe P, Q inversibles telles que $A = PJ_rQ$. On a alors $\varphi_A = \varphi_P \circ \varphi_{J_r} \circ \varphi_Q$, on a alors par ce qui précède $\text{rg}(\varphi_M) = \text{rg}(\varphi_{J_r})$. Or,

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varphi_{J_r}) &= \{J_r M \mid M \in \mathcal{M}_n(K)\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \mid (M_1, M_2, M_3, M_4) \in \mathcal{M}_r(K) \times \mathcal{M}_{r, n-r}(K) \times \mathcal{M}_{n-r, r}(K) \times \mathcal{M}_{n-r}(K) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_r(K) \times \mathcal{M}_{r, n-r}(K) \right\} \end{aligned}$$

qui est clairement de dimension $r^2 + r(n-r) = rn$.

Solution 11. (Enoncé)

Soit $r = \text{rg}(A)$ et $m = \text{rg}(C)$, on peut supposer quitte à renommer que les r premières colonnes $(A_i)_i$ de A et les m premières colonnes $(C_i)_i$ de C sont linéairement indépendantes. Montrons qu'alors les colonnes $(D_i)_i$ d'indice $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $i \in \llbracket n, n+m \rrbracket$ sont indépendantes. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+m}) \in \mathbb{R}^{r+m}$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i D_i + \sum_{i=1}^m \lambda_{n+i} D_{n+i} = 0 \quad (*)$$

Alors en regardant les n premières égalités dans $(*)$ on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i = 0$ et donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ par hypothèse. En reportant dans $(*)$ on a $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+m} = 0$ et donc $\text{rg}(D) \geq \text{rg}(A) + \text{rg}(C)$.

Supposons A inversible, alors si on prend k colonnes de D avec $k > n + m = \text{rg}(A) + \text{rg}(C)$ alors il y en a nécessairement $j > m$ qui sont d'indice $> n$ et donc qui ne sont pas linéairements indépendantes car C est de rang m , d'où le résultat, le cas C inversible étant le même.

Solution 12. (Enoncé)

On peut regarder la famille dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit Φ l'endomorphisme de dérivation, alors les $x \mapsto e^{\lambda x}$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes donc forment une famille libre.

Solution 13. (Enoncé)

On a $A = J - I_n$ où J est la matrice avec que des des 1, elle est de rang 1, donc 0 pour valeur propre

d'ordre $n - 1$ et la dernière valeur propre est donnée par la trace de J qui est n , donc $\text{Sp}(J) = \{0, n\}$. Enfin, $\text{Sp}(A) = \{-1, n - 1\}$.

Solution 14. (Enoncé)

\implies Par contraposée, soit Q non constant un facteur commun à P et π_u . On a en notant $P = QR_1$ et $\pi_u = QR_2$, $0 = Q(u) \circ R_2(u) = 0$ donc par minimalité de π_u , $Q(u)$ n'est pas inversible et donc $P(u) = Q(u) \circ R_1(u)$ non plus.

\impliedby Une relation de Bézout entre P et π_u évaluée en u donne le résultat.

On en déduit que $K[u]$ est un corps si et seulement si π_u irréductible.

Solution 15. (Enoncé)

On écrit $\chi_A = a_0 + a_1X + \dots + X^n$ avec $a_0 = (-1)^n \det(A) \neq 0$ par hypothèse. Par Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$, on multiplie cette relation par A^{-1} et on isole A^{-1} pour avoir le résultat.

Solution 16. (Enoncé)

Non, comme M est d'ordre impair son polynôme caractéristique est de degré impair donc admet une valeur propre réelle. Cette valeur propre devrait être racine de $X^2 + X + 1$ mais ce polynôme n'a pas de racines réelles.

Solution 17. (Enoncé)

On a $\chi_{A\bar{A}} = \det(XI_n - A) \det(XI_n - \bar{A}) = \det(XI_n - A) \overline{\det(XI_n - A)} \in \mathbb{R}[X]$.

Solution 18. (Enoncé)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ défini par $\varphi(X) = AX - XB$. Les assertions i et ii) sont respectivement la surjectivité et l'injectivité de φ , elles sont donc équivalentes car $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) < +\infty$.

$ii) \implies iii)$. L'égalité $AX = XB$ entraîne pour tout $k \in \mathbb{N}$ $A^k X = XB^k$ et donc par linéarité $P(A)X = XP(B)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$. Avec $P = \chi_B$, l'hypothèse ii) se traduit en $\chi_B(A)X = 0 \implies X = 0$ i.e. $\chi_B(A)$ injective et donc $\chi_B(A)$ inversible.

$iv) \implies iii)$ Si A et B n'ont pas de valeurs propres communes alors $\chi_A \wedge \chi_B = 1$ donc il existe $(U, V) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\chi_A U + \chi_B V = 1$. En évaluant cette égalité en A on a donc $\chi_B(A)U(A) = I_n$ donc $\chi_B(A)$ inversible.

$i \implies iv)$. Par contraposée si A et B ont une valeur propre commune alors A et B^T ont une valeur propre commune, soit λ une telle valeur propre et $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$ deux vecteurs propres non nuls tels que $AZ = \lambda Z$ et $B^T Y = \lambda Y$ i.e. $Y^T B = \lambda Y^T$. Soit alors $X = ZY^T$ qui est non nul car Y et Z sont non nuls. X vérifie alors $AX - XB = \lambda XY^T - \lambda XY^T = 0$.

Solution 19. (Enoncé)

Le polynôme $P = X^3 + X + 1$ est scindé sur \mathbb{C} et annule M donc M est trigonalisable sur \mathbb{C} . Une rapide étude de la fonction $x \mapsto x^3 + x + 1$ montre qu'elle admet une unique racine réelle $\alpha > 0$. On peut donc écrire $P = (X - \alpha)(X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$ et les valeurs propres de M sont dans $(\alpha, \lambda, \bar{\lambda})$ et $\lambda, \bar{\lambda}$ ont la même multiplicité car M est à coefficients réels. Donc $\det(M) = \alpha^r \lambda^q \bar{\lambda}^q = \alpha^r |\lambda|^{2q} > 0$.

Solution 20. (Enoncé)

Soit $Q = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ un polynôme scindé à racines simples qui annule A , comme A inversible, aucun λ_i est nul et le polynôme $\prod_{i=1}^r (X^p - \lambda_i)$ est scindé à racines simples et annule B donc B est diagonalisable. Si A n'est pas inversible le résultat est faux, on peut prendre A nulle et B nilpotente non nulle.

Solution 21. (Enoncé)

\implies Si A est diagonalisable alors $P(A)$ aussi et donc si $P(A)$ est nilpotente alors $P(A) = 0$.

\impliedby La matrice A est à coefficients complexes donc χ_A est scindé, on écrivant $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ et en appliquant l'hypothèse à $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ on obtient que P annule A et donc A est diagonalisable.

Solution 22. (Enoncé)

1. Par linéarité, il suffit de le vérifier pour $P = X^k$ et c'est une simple récurrence.

2. Si M diagonalisable alors π_M est scindé à racines simples et donc $\pi_M \wedge \pi'_M = 1$, soit $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $P\pi_M + Q\pi'_M = 1$, on a alors $X = XP\pi_M + QX\pi'_M$ et finalement $A = 0$ en évaluant la relation précédente en A . Le sens retour est immédiat.

Solution 23. (Enoncé)

\implies Il est clair que f^2 est encore diagonalisable, de plus si (e_1, \dots, e_n) base de diagonalisation de f avec $(e_1, \dots, e_r) \in \ker(f)$, alors si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \ker(f^2)$, $f^2(x) = \sum_{i=r+1}^n \lambda_i^2 x_i e_i = 0$ et donc $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ car $\lambda_i \neq 0$ pour $i \geq r+1$ et finalement $x = \sum_{i=1}^r x_i e_i \in \ker(f)$.

\impliedby Soit $Q = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)$ un polynôme scindé à racines simples qui annule f^2 . Si tous les λ_i sont non nuls, alors $P = \prod_{i=1}^k (X^2 - \lambda_i)$ est scindé à racines simples et annule f donc f est diagonalisable.

Sinon, on peut supposer par exemple $\lambda_1 = 0$ et les autres λ_i non nuls. On a alors

$$f^2 \circ_{i=2}^k ((f - \mu_i Id_E) \circ (f + \mu_i Id_E)) = 0$$

(cette notation n'est pas ambiguë car tous les endomorphismes considérés commutent deux à deux) où on a noté $(\mu_i, -\mu_i)$ les racines carrées de λ_i . On a donc $\text{Im}(\circ_{i=2}^k ((f - \mu_i Id_E) \circ (f + \mu_i Id_E))) \subset \ker(f^2) = \ker(f)$. Et donc $f \circ_{i=2}^k ((f - \mu_i Id_E) \circ (f + \mu_i Id_E))$ et finalement le polynôme $R = X \prod_{i=2}^k (X - \mu_i)(X + \mu_i)$ est scindé à racines simples et annule f : f est diagonalisable.

Solution 24. (Enoncé)

Le polynôme $P = X^3 + X + 1$ est scindé sur \mathbb{C} et annule M donc M est trigonalisable sur \mathbb{C} . Une rapide étude de la fonction $x \mapsto x^3 + x + 1$ admet une unique racine réelle $\alpha > 0$. On peut donc écrire $P = (X - \alpha)(X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$ et les valeurs propres de M sont dans $(\alpha, \lambda, \bar{\lambda})$ et $\lambda, \bar{\lambda}$ ont la même multiplicité car M est à coefficients réels. Donc $\det(M) = \alpha^r \lambda^q \bar{\lambda}^q = \alpha^r |\lambda|^{2q} > 0$.

Solution 25. (Enoncé)

\implies Si A est diagonalisable alors $P(A)$ aussi et donc si $P(A)$ est nilpotente alors $P(A) = 0$.

\impliedby La matrice A est à coefficients complexes donc χ_A est scindé, on écrivant $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ et en appliquant l'hypothèse à $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ on obtient que P annule A et donc A est diagonalisable.

Solution 26. (Enoncé)

1. Par linéarité, il suffit de le vérifier pour $P = X^k$ et c'est une simple récurrence.

2. Si M diagonalisable alors π_M est scindé à racines simples et donc $\pi_M \wedge \pi'_M = 1$, soit $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $P\pi_M + Q\pi'_M = 1$, on a alors $X = XP\pi_M + QX\pi'_M$ et finalement $A = 0$ en évaluant la relation précédente en A . Le sens retour est immédiat.

Solution 27. (Enoncé)

\implies Il est clair que f^2 est encore diagonalisable, de plus si (e_1, \dots, e_n) base de diagonalisation de f avec $(e_1, \dots, e_r) \in \ker(f)$, alors si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \ker(f^2)$, $f^2(x) = \sum_{i=r+1}^n \lambda_i^2 x_i e_i = 0$ et donc $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ car $\lambda_i \neq 0$ pour $i \geq r+1$ et finalement $x = \sum_{i=1}^r x_i e_i \in \ker(f)$.

\impliedby Soit $Q = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)$ un polynôme scindé à racines simples qui annule f^2 . Si tous les λ_i sont non nuls, alors $P = \prod_{i=1}^k (X^2 - \lambda_i)$ est scindé à racines simples et annule f donc f est diagonalisable.

Sinon, on peut supposer par exemple $\lambda_1 = 0$ et les autres λ_i non nuls. On a alors

$$f^2 \circ_{i=2}^k ((f - \mu_i Id_E) \circ (f + \mu_i Id_E)) = 0$$

(cette notation n'est pas ambiguë car tous les endomorphismes considérés commutent deux à deux) où on a noté $(\mu_i, -\mu_i)$ les racines carrées de λ_i . On a donc $\text{Im}(\circ_{i=2}^k ((f - \mu_i Id_E) \circ (f + \mu_i Id_E))) \subset \ker(f^2) = \ker(f)$. Et donc $f \circ_{i=2}^k ((f - \mu_i Id_E) \circ (f + \mu_i Id_E))$ et finalement le polynôme $R = X \prod_{i=2}^k (X - \mu_i)(X + \mu_i)$ est scindé à racines simples et annule f : f est diagonalisable.

Solution 28. (Enoncé)

\implies Si A est nilpotente alors A est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0. On a alors pour $k \geq 1$, $\text{tr}(A^k) = 0$.

\impliedby A est trigonalisable donc il suffit de montrer que toutes ses valeurs propres sont nulles. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A distinctes 2 à 2 et non nulles (si de telles valeurs propres n'existent pas on convient que la multiplicité associée vaut 0). On a par hypothèse : Pour tout $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $\sum_{i=1}^r n_i \lambda_i^k = 0$ où n_i est la multiplicité de λ_i . On peut alors traduire ça en un système linéaire, $V \times N = 0$ avec :

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix}$$

Comme les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont non nuls et distincts 2 à 2, la matrice V est inversible et donc $N = 0$. Finalement, la seule valeur propre de A est 0 et donc A est nilpotente.

Solution 29. (Enoncé)

Montrons que A et B admettent un vecteur propre commun. Si $B = 0$ c'est clair car A admet au moins un vecteur propre dans \mathbb{C} . Supposons $B \neq 0$, alors $B|_{\text{Im}(B)}$ est trigonalisable donc admet un vecteur propre $X \in \text{Im}(B) \subset \ker(A)$ (car $AB = 0$) donc X est aussi un vecteur propre de A . On montre alors la co-trigonalisabilité par récurrence sur n en faisant une preuve similaire à la preuve sous l'hypothèse de commutativité.

Solution 30. (Enoncé)

Soit $M = C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ la matrice compagnon associée à P , en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M (qui sont les racines de P). En trigonalisant M , on a $\chi_{M^k} = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i^k)$ et comme $M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\chi_{M^k} \in \mathbb{Z}[X]$.

Solution 31. (Enoncé)

Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé, pour $k \in \mathbb{Z}$, $A^k x = \lambda^k x$. Comme la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est bornée, la suite $(\lambda^k x)_{k \in \mathbb{Z}}$ est bornée et donc $|\lambda| = 1$ car x est non nul. Soit maintenant $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A . Supposons N non nulle, il existe alors $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $Nx \neq 0$ et $N^2 x = 0$ (il suffit de prendre un vecteur non nul de $\text{Im}(N^{r-1})$ où r est l'indice de nilpotence de N). Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k x = (D + N)^k x = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^{k-j} N^j x = D^k x + k D^{k-1} N x$$

Comme la suite $(D^k x)_{k \in \mathbb{Z}}$ est bornée (car $\text{Sp}(D) = \text{Sp}(A) \subset \mathbb{U}$), la suite $(k D^{k-1} N x)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $D^{k-1} N x = 0$ i.e. $N x = 0$ car D inversible. Or par hypothèse on avait $N x \neq 0$, contradiction donc $A = D$ est diagonalisable.

Solution 32. (Enoncé)

\implies Par contraposée, soit Q non constant un facteur commun à P et π_u . On a en notant $P = QR_1$ et $\pi_u = QR_2$, $0 = Q(u) \circ R_2(u) = 0$ donc par minimalité de π_u , $Q(u)$ n'est pas inversible et donc $P(u) = Q(u) \circ R_1(u)$ non plus.

\impliedby Une relation de Bézout entre P et π_u évaluée en u donne le résultat.

On en déduit que $K[u]$ est un corps si et seulement si π_u irréductible.

Solution 33. (Enoncé)

On écrit $\chi_A = a_0 + a_1 X + \dots + X^n$ avec $a_0 = (-1)^n \det(A) \neq 0$ par hypothèse. Par Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$, on multiplie cette relation par A^{-1} et on isole A^{-1} pour avoir le résultat.

Solution 34. (Enoncé)

Non, comme M est d'ordre impair son polynôme caractéristique est de degré impair donc admet une valeur propre réelle. Cette valeur propre devrait être racine de $X^2 + X + 1$ mais ce polynôme n'a pas de racines réelles.

Solution 35. (Enoncé)

On a $A = J - I_n$ où J est la matrice avec que des des 1, elle est de rang 1, donc 0 pour valeur propre d'ordre $n - 1$ et la dernière valeur propre est donnée par la trace de J qui est n , donc $\text{Sp}(J) = \{0, n\}$. Enfin, $\text{Sp}(A) = \{-1, n - 1\}$.

Solution 36. (Enoncé)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, soit D l'ensemble des points de discontinuité de f et $x \in D$ on a alors $f(x^-) < f(x^+)$ donc il existe un rationnel $q_x \in]f(x^-), f(x^+)[$. L'application $x \mapsto q_x$ est un injection de D dans \mathbb{Q} donc D est bien au plus dénombrable.

Solution 37. (Enoncé)

On a $\frac{1}{\sum_{k=1}^n k} = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ donc la somme recherchée vaut 2.

Solution 38. (Enoncé)

On a $\frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n^3}$ donc la série considérée converge bien.

Une décomposition en élément simple donne $\frac{1}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} - \frac{4}{2X+1}$. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} &= H_n + H_{n+1} - 1 - 4H_{2n} + 2H_{2n} + 4 \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln(n) + \gamma + \ln(n+1) + \gamma - 1 - 4\ln(2) - 4\ln(n) - 4\gamma + 2\ln(n) + 2\gamma + 4 + o(1) \\ &= 3 - 4\ln(2) + o(1) \end{aligned}$$

Donc la somme recherchée vaut $3 - 4\ln(2)$.

Solution 39. (Enoncé)

La convergence est immédiate par le critère des séries alternées. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est croissante pour $x \geq e$ et d'intégrale divergente, donc par comparaison série-intégrale, $T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^n \frac{\ln(x)}{x} dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{2}$. Soit $w_n = T_n - \frac{\ln(n)^2}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2}(\ln(n)^2 - \ln(n+1)^2) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2} \left(-2\ln(n)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right) \\ &= \frac{\ln(n)}{n+1} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \frac{\ln(n)}{n(n+1)} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n \geq 1} (w_{n+1} - w_n)$ converge et donc $(w_n)_n$ converge, en notant $c = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ on a :

$$T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(n)^2}{2} + c + o(1)$$

De plus, $S_{2n} + T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (1 + (-1)^k) \frac{\ln(k)}{k} = \ln(2)H_n + T_n$. Donc $S_{2n} = T_n + \ln(2)H_n - T_{2n}$ et

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \ln(2)\ln(n) + \ln(2)\ln(n) + o(1) + c + \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(2n)^2}{2} - c + o(1) \\ &= \ln(2)\ln(n) + \ln(2)\gamma + \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(2)^2}{2} - \ln(2)\ln(n) - \frac{\ln(n)^2}{2} + o(1) \\ &= \ln(2)\left(\gamma - \frac{\ln(2)}{2}\right) + o(1) \end{aligned}$$

Et donc la somme recherchée vaut $\ln(2)\left(\gamma - \frac{\ln(2)}{2}\right)$.

Solution 40. (Enoncé)

Soit $A = \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p|q\}$ et $B = \{(p, np) \mid (p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$. La famille $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p, q) \in A}$ est une sous

famille de $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ qui est sommable (de somme $\zeta(2)^2$) donc la sous famille considérée est sommable.

L'application $(p, q) \mapsto (p, \frac{q}{p})$ est une bijection de A sur B , on a donc

$$\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 (np)^2} = \zeta(2)\zeta(4)$$

Solution 41. (Enoncé)

Notons que la famille $(\frac{1}{p^2 q^2})_{p,q \geq 1}$ est clairement sommable donc toutes ses sous-familles aussi. Si $p \wedge q = k$, alors on peut écrire $p, q = kp', kq'$ avec $p' \wedge q' = 1$. Donc $S_k = \sum_{p' \wedge q' = 1} \frac{1}{(kp')^2 (kq')^2} = \frac{1}{k^4} S_1$. On a alors $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \zeta(4) S_1$. Mais par le théorème de sommation par paquets:

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p \wedge q = k} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 q^2} = \zeta(2)^2$$

D'où

$$S_k = \frac{1}{k^4} \frac{\zeta(4)}{\zeta(2)^2}$$

Solution 42. (Enoncé)

Soit $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ et $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n x_k$. On fait une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{k(R_k - R_{k+1})}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{kR_k}{n} - \sum_{k=0}^n \frac{kR_{k+1}}{n} \\ &= -R_{n+1} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} R_k \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 en $+\infty$ le second aussi par le lemme de Cesaro.

Solution 43. (Enoncé)

Si $(u_n)_n$ est la suite nulle le résultat est immédiat. Sinon, on peut supposer $\|u\|_{\infty} = 1$ quitte à renormaliser. Déjà, $\sum_{n \geq 1} u_n^p$ converge car $u_n^p = O(u_n)$. Pour tout $p \geq 1$, $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p)^{\frac{1}{p}} \geq 1$. Soit $I = \{n \geq 0 \mid u_n = \|u\|_{\infty}\}$ qui est clairement non vide, on peut écrire:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p = |I| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus I} u_n^p$$

Soit $f_n(p) = u_n^p$ alors par convergence normale sur $[1, +\infty[$ et par le théorème de la double limite, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ et cela conclut.

Solution 44. (Enoncé)

1. Si $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge alors $(w_n)_n$ tend vers 0 et donc $\frac{w_n}{1+w_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{w_n}{1+w_n}$ converge.

Le sens réciproque est similaire.

2. Comme :

$$\frac{\frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}}}{1 + \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}}} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n}$$

il suffit de montrer que la première série diverge. Or pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}}$ soit en sommant de $k=0$ à n :

$$\sum_{k=0}^n (\ln(u_k) - \ln(u_{k+1})) = \ln(u_0) - \ln(u_{n+1}) \leq \sum_{k=0}^n \frac{u_k - u_{k+1}}{u_{k+1}}$$

Et cela donne le résultat.

Solution 45. (Enoncé)

1. Il est clair que la suite $(x_n)_n$ est strictement croissante donc admet une limite $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, par passage à la limite dans la relation de récurrence, nécessairement, $l = +\infty$.

2. On montre que $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge, or $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+1}x_n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ ce qui conclut.

3. Soit $l \in \mathbb{R}$ la limite de u_n , on $u_n = l - \sum_{k=n}^{\infty} (u_{k+1} - u_k)$ or par sommation des relations de comparaisons, $\sum_{k=n}^{\infty} (u_{k+1} - u_k) = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Donc $u_n = l + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et finalement $x_n = \exp(l2^n) \exp(o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha^{2^n}$ avec $\alpha = \exp(l) > 0$.

Solution 46. (Enoncé)

La fonction $f : x \mapsto \ln(\tanh(x))$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} et $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$ donc $\int_0^1 f(x) dx$ converge. Enfin, $\tanh(x) - 1 = \frac{\sinh(x) - \cosh(x)}{\cosh(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{-x}$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$ et donc $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.

Solution 47. (Enoncé)

La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} . Comme,

$$\left| \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ converge. De plus pour $x > 1$,

$$\frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(x) \cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} + \frac{\sin(\frac{1}{x}) \cos(x)}{\sqrt{x}}$$

Le second terme converge car $\left| \frac{\sin(\frac{1}{x}) \cos(x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ et $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ converge. (*)

De plus, on a

$$\int_0^x \frac{\sin(t) \cos(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}} dt = \left[-\frac{\cos(t) \cos(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t) \sin(\frac{1}{t})}{t^{\frac{5}{2}}} dt - \int_1^x \frac{\cos(t) \cos(\frac{1}{t})}{2t^{\frac{3}{2}}} dt$$

Les deux intégrales convergent par le même argument que (*) et donc $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$

Solution 48. (Enoncé)

Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+1}$. f est continue sur \mathbb{R}^{+*} et :

- $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$ donc $\int_0^1 f(x) dx$ converge.
- $f(x) = o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge

Donc $I = \int_0^{\infty} f(x) dx$ converge. Le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ donne :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1} dx \underset{u=\frac{1}{x}}{=} \int_{\infty}^0 \frac{\ln(\frac{1}{u})}{\frac{1}{u^2}+1} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_0^{\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = -I$$

D'où $I = 0$.

Solution 49. (Enoncé)

On fait une intégration par parties :

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

Par intégration des relations de comparaisons, $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt = o\left(\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt\right)$ donc un équivalent recherché vaut $\frac{e^{-x}}{x}$.

Solution 50. (Enoncé)

Pour $x \geq 0$, $0 \leq xf(x) \leq 2 \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt$. Comme f est intégrable, le membre de droite tend vers 0 et donc $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Solution 51. (Enoncé)

Soit $\varepsilon > 0$, par uniformé continuité de f , il existe $\eta > 0$ tel que $\forall |x - y| < \eta$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Soit $x \geq 0$, alors :

$$|\eta f(x) - \int_x^{x+\eta} f(t) dt| \leq \int_x^{x+\eta} |f(x) - f(t)| dt < \eta \varepsilon$$

Donc,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\eta} \int_x^{x+\eta} |f(t)| dt + \varepsilon \leq \frac{1}{\eta} \int_x^\infty |f(t)| dt + \varepsilon$$

Si on choisit $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, $\int_x^\infty |f(t)| dt \leq \varepsilon \eta$ alors pour $x \geq A$,

$$|f(x)| \leq 2\varepsilon$$

Et cela conclut la preuve.

Solution 52. (Enoncé)

Comme $I(a, b) = -I(b, a)$ et $I(a, a) = 0$ on peut supposer $a < b$. Soit $x < y$ deux réels, alors :

$$\int_x^y (f(a+t) - f(b+t)) dt = \int_{x+a}^{y+a} f(t) dt - \int_{x+b}^{y+b} f(t) dt = \int_{x+a}^{x+b} f(t) dt - \int_{y+a}^{y+b} f(t) dt$$

Or comme $\int_0^\infty f(t) dt$ converge, $\int_{y+a}^{y+b} f(t) dt = \int_{y+a}^\infty f(t) dt - \int_{y+b}^\infty f(t) dt \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$.

Montrons que $\int_{x+a}^{x+b} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} l(b-a)$.

Soit $\epsilon > 0$, comme f tend vers l en $-\infty$, il existe $A < 0$ tel que pour $x+b < A$ on ait $|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{b-a}$ on a alors :

$$\left| \int_{x+a}^{x+b} f(t) dt - l(b-a) \right| \leq \int_{x+a}^{x+b} |f(t) - l| dt < \epsilon$$

Donc $I(a, b)$ existe et vaut $l(b-a)$.

Solution 53. (Enoncé)

1. Cela découle de l'inégalité $|ff'|^2 \leq \frac{f^2 + f'^2}{2}$.

2. Soit $x > 0$, alors

$$f^2(x) = f^2(0) + 2 \int_0^x f(t)f'(t) dt$$

Donc f^2 admet une limite en $+\infty$ et comme f^2 intégrable cette limite est nécessairement nulle.

Solution 54. (Enoncé)

Comme f et f'' sont de carré intégrables, ff'' est intégrable. Soit $x \geq 0$

$$\int_0^x f(t)f''(t) dt = f(x)f'(x) - \int_0^x f'(t)^2 dt$$

Donc $f(x)f'(x) - \int_0^x f'(t)^2 dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$. Si f' n'était pas de carré intégrable, alors nécessairement $f'(x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc il existerait $A \geq 0$ tel que pour $x \geq A$, $f'(x)f(x) \geq 1$, en intégrant cette inégalité on a $f^2(x) \geq f^2(0) + 2(x - A)$ ce qui contredit l'intégrabilité de f^2 .

Ainsi, f' est de carré intégrable et donc $f(x)f'(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$, le même raisonnement qu'au dessus montre que cette limite est nécessairement nulle. On a donc :

$$\int_0^\infty f(x)f''(x) dx = - \int_0^\infty f'(x)^2 dx.$$

On conclut par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution 55. (Enoncé)

Soit $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, de sorte que pour $x > 0$ $g(x) = \frac{F(x)}{x}$. On prolonge g en une fonction continue sur \mathbb{R}^+ en posant $g(0) = f(0)$. Soit $\epsilon > 0$ et $x > \epsilon$,

$$\int_\epsilon^x g^2(t) dt = \int_\epsilon^x \frac{F^2(t)}{t^2} dt = \frac{F^2(\epsilon)}{\epsilon} - \frac{F^2(x)}{x} + 2 \int_\epsilon^x \frac{f(t)F(t)}{t} dt \quad (*)$$

Or, $\frac{F^2(\epsilon)}{\epsilon} = \underbrace{\frac{F(\epsilon)}{\epsilon}}_{\rightarrow 1} \underbrace{F(\epsilon)}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$. Comme f est intégrable, $\frac{F^2(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc $(*)$ admet une limite quand $\epsilon \rightarrow 0$ et $x \rightarrow +\infty$ et donc g est de carré intégrable et :

$$\int_0^\infty g(x)^2 dx \leq 2 \int_0^\infty g(x)f(x) dx$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de conclure.

Solution 56. (Enoncé)

Il est clair que f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$. De plus une rapide étude de fonction montre que $\|f_n\|_\infty = \frac{n^\alpha}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-1} n^{\alpha-1}$ donc il y a convergence uniforme si et seulement si $\alpha < 1$.

Solution 57. (Enoncé)

1. Pour tout $n \geq 1$, $f_n(1) = 0$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n(1)$ converge. Pour $x \in [0, 1[$ et $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq a_1 x^n$ et $\sum_{n \geq 1} x^n$ converge donc f est bien définie.

2. La fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et $f'_n(x) = a_n x^{n-1} (n(1-x) - 1)$ donc $|f'_n| = f_n$ atteint son maximum en $1 - \frac{1}{n}$. Comme $f_n(1 - \frac{1}{n}) = \frac{a_n}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_n}{en}$,

$$\sum_{n \geq 1} f_n \text{ CVN} \iff \sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty \text{ converge} \iff \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} \text{ converge}$$

3. \Leftarrow : soit $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^\infty a_k x^k (1-x)$, montrons que $(R_n)_n$ converge uniformément vers 0 :

$$|R_n(x)| = R_n \leq a_n (1-x) \sum_{k=n+1}^\infty x^k = a_n x^{n+1} \leq a_n$$

d'où le résultat.

\Rightarrow : Pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k=n}^{2n} a_k x^k (1-x) \geq a_{2n} (1-x) \sum_{k=n}^{2n} x^k = a_{2n} (1-x^{n+1})$$

Par convergence uniforme,

$$\sum_{k=n}^{2n} a_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k n = R_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) - R_{2n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $a_{2n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où $a_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Comme $(a_n)_n$ décroît, $(a_n)_n$ est bien de limite nulle.

Solution 58. (Enoncé)

Soit $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)$. Il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ car :

$$R_n(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n}{k^2 + n^2} \geq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n}{2k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

Donc $(R_n(n))_n$ ne tend pas vers 0 ce qui empêche la convergence uniforme. Par contre $f_n(x)$ est décroissante donc $|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k f_k(x)| \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{2n}$ par une étude de fonction. Donc $\sum_{k \geq 1} (-1)^k f_k(x)$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

Solution 59. (Enoncé)

Soit $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$, alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} et pour tout $a > 0$, $\|f_n\|_{[a, +\infty[} = \frac{ne^{-na}}{\ln(n)}$ donc il ya convergence normale de $\sum_{n \geq 2} f'_n$ sur tout compact de \mathbb{R}^{+*} et S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} . La fonction S n'est pas dérivable en 0 car pour $N \geq 2$,

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} \geq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{S(x)}{x}$ est décroissante donc admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 0^+ mais par la minoration précédente, cette limite vérifie $l \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln(n)}$ pour tout $N \geq 2$ et donc $l = +\infty$: S n'est pas dérivable à droite en 0.

Solution 60. (Enoncé)

Par l'inégalité triangulaire, $|f(x) - f_n(x_n)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_n(x_n)| \leq |f(x) - f(x_n)| + \|f - f_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ le premier terme tendant vers 0 car f est continue en x et le second par convergence uniforme.

Solution 61. (Enoncé)

Par linéarité, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 fP = 0$ mais par le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynôme convergence uniformément vers f . Comme f bornée car continue sur un compact, fP_n converge uniformément vers f^2 sur $[0, 1]$ et donc $\int_0^1 f^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 fP_n = 0$ donc $f = 0$.

Solution 62. (Enoncé)

La fonction f est un polynôme. En effet, pour n, m assez grand, $\|P_n - P_m\|_{\infty} \leq 1$ donc $P_n - P_m$ est un polynôme borné sur \mathbb{R} , c'est une fonction constante, on a donc $P_n = P_m + P_n(0) - P_m(0)$ et en passant à la limite $m \rightarrow +\infty$, $P_n(x) = f(0) + P_n(0) - f(0)$ et f est bien un polynôme.

Solution 63. (Enoncé)

Soit $\varepsilon > 0$, par continuité uniforme de g , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $|x - y| < \eta$, $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Soit alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_{\infty} < \eta$. Soit alors $n \geq n_0$ et $x \in I$.

Comme $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{\infty} < \eta$, $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$. On a donc pour $n \geq n_0$, $\|g \circ f_n - g \circ f\|_{\infty} < \varepsilon$ et $g \circ f_n$ converge uniformément vers $g \circ f$.

Si g n'est pas supposée uniformément continue, le résultat est faux, en effet prenons $g(x) = x^2$ et $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. f_n converge uniformément vers $x \mapsto x$ mais :

$$\|(x + \frac{1}{n})^2 - x^2\|_{\infty} = \|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\|_{\infty} = +\infty$$

Donc $g \circ f_n$ ne converge pas uniformément vers $g \circ f$.

Solution 64. (Enoncé)

On prolonge la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ en 0 en posant $g(0) = f'(0)$ et on note encore g la fonction prolongée.

On peut écrire pour $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \int_0^1 f'(xt) dt$ et une application immédiate du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, cette dernière intégrale est de classe \mathcal{C}^{∞} sur \mathbb{R} .

Solution 65. (Enoncé)

On fait un changement de variable,

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \underset{u=t^n}{=} \int_0^1 u^{\frac{1}{n}} f(u^{\frac{1}{n}}) \frac{du}{n}$$

Et $\int_0^1 u^{\frac{1}{n}} f(u^{\frac{1}{n}}) du$ tend vers $f(1)$ quand $n \rightarrow +\infty$ donc un équivalent est $\frac{f(1)}{n}$.

Solution 66. (Enoncé)

On fait un changement de variable,

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx \underset{u=1-\frac{x}{n}}{=} n \int_0^1 \sqrt{1 - x^n} dx$$

Or par TCD, $\int_0^1 \sqrt{1 - x^n} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 1 = 1$ donc un équivalent est n .

Solution 67. (Enoncé)

Soit pour $x > 0$, $f(x) = \frac{x}{\sinh(x)}$. La fonction f se prolonge par continuité en une fonction continue sur \mathbb{R}^+ en posant $f(0) = 1$. De plus, $f(x) = o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $+\infty$, donc $\int_0^\infty f(x) dx$ est convergente. Pour le calcul, on fait un développement en série géométrique du dénominateur.

$$\int_0^\infty \frac{x}{\sinh(x)} dx = \int_0^\infty \frac{2xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} dx = 2 \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty xe^{-(2n+1)x} dx = 2 \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

La permutation des symboles intégrales/sommes est licite car $\sum_{n \geq 0} \int_0^\infty |xe^{-(2n+1)x}| dx$ converge.

Solution 68. (Enoncé)

La convergence de l'intégrale est immédiate. Pour $\Re(s) > 1$:

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty t^{s-1} e^{-nt} dt = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t^{s-1} e^{-nt} dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s)\zeta(s)$$

L'inversion étant licite car $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t^{\sigma-1} e^{-nt} dt = \Gamma(\sigma)\zeta(\sigma) < \infty$ car $\sigma := \Re(s) > 1$.

Solution 69. (Enoncé)

Soit $f(x, t) = \frac{x^t - 1}{\ln(x)}$ pour $(x, t) \in]0; 1[\times \mathbb{R}^+$ et $F(t) = \int_0^1 f(x, t) dx$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ se prolonge en une application continue sur $]0; 1]$ en posant $f(1, t) = t$. De plus, $f(x, t) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\ln(x)}$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\ln(x)}$ converge (Bertrand), donc $\int_0^1 f(x, t) dx$ converge et F est bien définie. Montrons qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ :

- $|x^t| \leq 1$ est $x \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, 1]$
- $t \mapsto x^t$ est continue sur \mathbb{R}^+

Donc, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et pour $t \geq 0$, $F(t) = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}$. Donc $F(t) = \ln(t+1) + F(0) = \ln(t+1)$. En particulier,

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = F(1) = \ln(2).$$

Solution 70. (Enoncé)

Soit $f_{(a,b)}(x) = e^{a^2x^2 - \frac{b^2}{x^2}}$. La fonction f se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}^+ en posant $f(0) = 0$. De plus $f(x) = o(\frac{1}{x^2})$ quand $x \rightarrow +\infty$ donc $I(a, b)$ converge.

Par changement de variable affine :

$$I(a, b) = \int_0^\infty e^{-a^2t^2 - \frac{b^2}{t^2}} dt \underset{x=at}{=} \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{(ab)^2}{x^2}} dx = \frac{1}{a} F((ab)^2)$$

où $F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{t}{x^2}} dx = \int_0^\infty g(x, t) dx$. Soit $a > 0$ et $K_a = [a; +\infty[$,

- $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x, t)$ est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} .

- $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{1}{x^2} e^{x^2 - \frac{t}{x^2}}$ est continu sur K_a .
- Pour $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times K_a$, $\left| \frac{\partial g}{\partial t} \right| \leq \frac{e^{-x^2 - \frac{a}{x^2}}}{x^2} \in L^1(\mathbb{R}^{+*})$.

Donc F est de classe \mathcal{C}^1 sur K_a pour tout $a > 0$, et donc sur \mathbb{R}^{+*} . De plus pour $t > 0$:

$$F'(t) = \int_0^\infty -\frac{e^{-x^2 - \frac{t}{x^2}}}{x^2} dx \underset{u=\frac{1}{x}}{=} - \int_0^\infty e^{-\frac{1}{u^2} - tu^2} du \underset{x=\sqrt{tu}}{=} -\frac{F(t)}{\sqrt{t}}$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > 0$, $F(t) = Ce^{-2\sqrt{t}}$. En prenant la limite quand $t \rightarrow 0^+$, on obtient $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On obtient donc le résultat suivant :

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2 - \frac{b^2}{x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2ab}.$$

Solution 71. (Enoncé)

Soit $f(x, \alpha) = \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in]0, 1[$. La fonction $x \mapsto f(x, \alpha)$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} , de plus $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ donc $\int_0^\infty f(x, \alpha) dx$ converge. On applique maintenant le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

1. Pour tout $x > 0$, $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$.
2. Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $x \mapsto \partial_\alpha f(x, \alpha)$ est intégrable sur $]0, 1[$.
3. $\forall 0 < a < b < 1$, $\forall (x, \alpha) \in \mathbb{R}^{+*} \times]a, b[$, $\left| \frac{\ln(x)x^{\alpha-1}}{1+x} \right| \leq \frac{\ln(x)x^{a-1}}{x+1} + \frac{\ln(x)x^{b-1}}{1+x} \in L^1(\mathbb{R}^{+*})$.

Donc la fonction I est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$. On remarque ensuite que

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_1^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{u^{-\alpha}}{1+u} du$$

et

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{n+\alpha-1} dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{n+\alpha}$$

L'interversion étant licite par le théorème de convergence dominée en utilisant la majoration

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1} \right| = x^{\alpha-1} \frac{1 + (-x)^n}{1+x} \leq \frac{2x^{\alpha-1}}{1+x}$$

Donc,

$$I(\alpha) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha} \right).$$

Remarque : On peut montrer que $I(\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

Solution 72. (Enoncé)

Le fait que f soit bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ est immédiat. Soit $g(x, t) = e^{-x^2 - ixt}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

- $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x, t)$ est intégrable sur \mathbb{R} .
- $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \right| \leq |xe^{-x^2}|$ et $x \mapsto xe^{-x^2}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Donc, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$ $f'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} -ixe^{-x^2-ixt}$. Une intégration par partie donne :

$$f'(t) = \left[\frac{i}{2} e^{-x^2-ixt} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{t}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-ixt} dx = -\frac{t}{2} f(t)$$

Donc, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = Ce^{-\frac{t^2}{4}}$. En prenant $t = 0$ on obtient $C = \sqrt{\pi}$. On obtient donc :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-ixt} dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{t^2}{4}}$$

Solution 73. (Enoncé)

- Il suffit de faire le changement de variable $u = \sqrt{n}t$ et d'utiliser $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
- Pour $|x| < 1$:

$$f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = x + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\infty} x^n e^{-nt^2} dt$$

Or, $\sum_{n \geq 2} \int_0^{\infty} |x|^n e^{-nt^2} dt$ converge donc par le théorème d'intégration termes à termes :

$$f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-t^2}}{e^{t^2} - x} dt$$

- On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres en faisant une majoration sur tout compact $[a, +\infty[$ de $]1, +\infty[$.

Solution 74. (Enoncé)

- Cela découle de l'inégalité $|ff'|^2 \leq \frac{f^2 + f'^2}{2}$.
- Soit $x > 0$, alors

$$f^2(x) = f^2(0) + 2 \int_0^x f(t)f'(t) dt$$

Donc f^2 admet une limite en $+\infty$ et comme f^2 intégrable cette limite est nécessairement nulle.

Solution 75. (Enoncé)

- Il suffit de faire le changement de variable $u = \sqrt{n}t$ et d'utiliser $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
- Pour $|x| < 1$:

$$f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = x + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\infty} x^n e^{-nt^2} dt$$

Or, $\sum_{n \geq 2} \int_0^{\infty} |x|^n e^{-nt^2} dt$ converge donc par le théorème d'intégration termes à termes :

$$f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-t^2}}{e^{t^2} - x} dt$$

- On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres en faisant une majoration sur tout compact $[a, +\infty[$ de $]1, +\infty[$.

Solution 76. (Enoncé)

Soit $f(x, \alpha) = \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in]0, 1[$. La fonction $x \mapsto f(x, \alpha)$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} , de plus $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2-\alpha}$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ donc $\int_0^{\infty} f(x, \alpha) dx$ converge. On applique maintenant le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- Pour tout $x > 0$, $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$.
- Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $x \mapsto \partial_{\alpha} f(x, \alpha)$ est intégrable sur $]0, 1[$.

$$3. \forall 0 < a < b < 1, \forall (x, \alpha) \in \mathbb{R}^{+*} \times]a, b[, \left| \frac{\ln(x)x^{\alpha-1}}{1+x} \right| \leq \frac{\ln(x)x^{a-1}}{x+1} + \frac{\ln(x)x^{b-1}}{1+x} \in L^1(\mathbb{R}^{+*}).$$

Donc la fonction I est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$. On remarque ensuite que

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_1^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{u^{-\alpha}}{1+u} du$$

et

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+\alpha-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+\alpha}$$

L'interversion étant licite par le théorème de convergence dominée en utilisant la majoration

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1} \right| = x^{\alpha-1} \frac{1+(-x)^n}{1+x} \leq \frac{2x^{\alpha-1}}{1+x}$$

Donc,

$$I(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha} \right).$$

Remarque : On peut montrer que $I(\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

Solution 77. (Enoncé)

Soit $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)$. Il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ car :

$$R_n(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n}{k^2+n^2} \geq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n}{2k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

Donc $(R_n(n))_n$ ne tend pas vers 0 ce qui empêche la convergence uniforme. Par contre $f_n(x)$ est décroissante donc $|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k f_k(x)| \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{2n}$ par une étude de fonction. Donc $\sum_{k \geq 1} (-1)^k f_k(x)$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

Solution 78. (Enoncé)

1. Pour tout $n \geq 1$, $f_n(1) = 0$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n(1)$ converge. Pour $x \in [0, 1[$ et $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq a_1 x^n$ et $\sum_{n \geq 1} x^n$ converge donc f est bien définie.

2. La fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et $f'_n(x) = a_n x^{n-1} (n(1-x) - 1)$ donc $|f_n| = f_n$ atteint son maximum en $1 - \frac{1}{n}$. Comme $f_n(1 - \frac{1}{n}) = \frac{a_n}{n} (1 - \frac{1}{n})^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_n}{en}$,

$$\sum_{n \geq 1} f_n \text{ CVN} \iff \sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty} \text{ converge} \iff \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} \text{ converge}$$

3. \Leftarrow : soit $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k (1-x)$, montrons que $(R_n)_n$ converge uniformément vers 0 :

$$|R_n(x)| = R_n \leq a_k (1-x) \sum_{n=k+1}^{\infty} x^k = a_n x^{n+1} \leq a_n$$

d'où le résultat.

\implies Pour $n \geq 1$

$$\sum_{k=n}^{2n} a_k x^k (1-x) \geq a_{2n} (1-x) \sum_{k=n}^{2n} x^k = a_{2n} (1-x^{n+1})$$

Par convergence uniforme,

$$\sum_{k=n}^{2n} a_k (1 - \frac{1}{n})^k n = R_n(1 - \frac{1}{n}) - R_{2n}(1 - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $a_{2n} (1 - \frac{1}{n})^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où $a_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Comme $(a_n)_n$ décroît, $(a_n)_n$ est bien de limite nulle.

Solution 79. (Enoncé)

Notons $\varphi : P \mapsto XP'$, alors $\varphi(X^n) = nX^n$, donc si φ était continu pour une norme $\|\cdot\|$, alors on aurait $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\|nX^n\| \leq C\|X^n\|$ ce qui n'est pas possible.

Solution 80. (Enoncé)

Si l'application est bien définie, alors $\sup_{x \in A} |x| = \|X\|_A < \infty$ donc A est borné, idem A est nécessairement infini car sinon $P = \prod_{a \in A} (X - a)$ vérifie $P \neq 0$ mais $\|P\|_A = 0$, donc A est borné infini. Inversement on vérifie facilement que ces deux conditions suffisent.

Solution 81. (Enoncé)

Si A est dense, alors $\|\cdot\|_A$ est bien une norme, en effet il n'y a que l'axiome de séparation qui est non trivial, mais une application continue nulle sur A dense est nulle sur $[0, 1]$ car pour $x \in [0, 1]$ il existe une suite $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x mais $0 = f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ donc $f = 0$ et cela conclut.

Inversement, si A n'est pas dense alors il existe $x \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A = \emptyset$, on construit alors facilement une fonction f continue nulle en dehors de $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ et telle que $f(x) = 1$ (faire un triangle), on a $f \neq 0$ mais $\|f\|_A = 0$ donc $\|\cdot\|_A$ n'est pas une norme.

Solution 82. (Enoncé)

1. C'est clair car $|\frac{u_n}{n^2}| \leq |u_n|$.

2. Soit $u \in E$, alors $|\varphi(u)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \|u\|$, la norme surbornée est donc inférieure à 1 mais avec la suite $(1, 0, \dots)$ on a $|\varphi(u)| = \|u\|$ donc la norme subordonnée est atteinte et vaut 1.

3. Par le même raisonnement, la norme subordonnée pour $\|\cdot\|_{\infty}$ est inférieure à $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, en notant $u^{(n)} = (\underbrace{1, \dots, 1}_n, 0, \dots)$ on a $\|u^{(n)}\| = 1$ et $\varphi(u^{(n)}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ qui tend vers $\frac{\pi^2}{6}$ donc la norme subordonnée vaut $\frac{\pi^2}{6}$. On peut facilement montrer qu'elle n'est pas atteinte.

4. La norme $\|u\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^3}$ convient, en effet avec $u^{(n)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ où le 1 est en n -ème position on a $\sup_{n \geq 1} \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|} = \sup_{n \geq 1} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}} = \sup_{n \geq 1} n = +\infty$ donc φ n'est pas continue.

Solution 83. (Enoncé)

Notons $\varphi : P \mapsto XP'$, alors $\varphi(X^n) = nX^n$, donc si φ était continu pour une norme $\|\cdot\|$, alors on aurait $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\|nX^n\| \leq C\|X^n\|$ ce qui n'est pas possible.

Solution 84. (Enoncé)

Si l'application est bien définie, alors $\sup_{x \in A} |x| = \|X\|_A < \infty$ donc A est borné, idem A est nécessairement infini car sinon $P = \prod_{a \in A} (X - a)$ vérifie $P \neq 0$ mais $\|P\|_A = 0$, donc A est borné infini. Inversement on vérifie facilement que ces deux conditions suffisent.

Solution 85. (Enoncé)

Si A est dense, alors $\|\cdot\|_A$ est bien une norme, en effet il n'y a que l'axiome de séparation qui est non trivial, mais une application continue nulle sur A dense est nulle sur $[0, 1]$ car pour $x \in [0, 1]$ il existe une suite $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x mais $0 = f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ donc $f = 0$ et cela conclut.

Inversement, si A pas dense alors il existe $x \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A = \emptyset$, on construit alors facilement une fonction f continue nulle en dehors de $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ et telle que $f(x) = 1$ (faire un triangle), on a $f \neq 0$ mais $\|f\|_A = 0$ donc $\|\cdot\|_A$ n'est pas une norme.

Solution 86. (Enoncé)

1. C'est clair car $|\frac{u_n}{n^2}| \leq |u_n|$.

2. Soit $u \in E$, alors $|\varphi(u)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \|u\|$, la norme surbornée est donc inférieure à 1 mais avec la suite $(1, 0, \dots)$ on a $|\varphi(u)| = \|u\|$ donc la norme subordonnée est atteinte et vaut 1.

3. Par le même raisonnement, la norme subordonnée pour $\|\cdot\|_{\infty}$ est inférieure à $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, en notant $u^{(n)} = (\underbrace{1, \dots, 1}_n, 0, \dots)$ on a $\|u^{(n)}\| = 1$ et $\varphi(u^{(n)}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ qui tend vers $\frac{\pi^2}{6}$ donc la norme subordonnée

vaut $\frac{\pi^2}{6}$. On peut facilement montrer qu'elle n'est pas atteinte.

4. La norme $\|u\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^3}$ convient, en effet avec $u^{(n)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ où le 1 est en n -ème position on a $\sup_{n \geq 1} \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|} = \sup_{n \geq 1} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}} = \sup_{n \geq 1} n = +\infty$ donc φ n'est pas continue.

Solution 87. (Enoncé)

1. On prend la trace ce qui donne $0 = \dim(E)$

2. On montre facilement par récurrence que $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1}$. Si u et v étaient continus alors en prenant la norme surbordonnée :

$$n\|v^{n-1}\| \leq \|u \circ v\| \|v^{n-1}\| + \|v^{n-1}\| \|v \circ u\|$$

Or v ne peut être nilpotent car si n est l'indice de nilpotence de v , l'égalité $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1}$ fournit une contradiction. Donc $\|v^{n-1}\| > 0$ et $n \leq \|v \circ u\| + \|u \circ v\|$ pour tout $n \geq 1$: contradiction.

Solution 88. (Enoncé)

\implies : Si f continue alors $\ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ est fermé par image réciproque d'un fermé par une application continue.

\impliedby : Si f n'est pas continue, alors elle n'est pas continue en 0 (application linéaire) donc il existe une suite $(x_n)_n$ tendant vers 0 tel que $|f(x_n)| > \eta > 0$ pour tout $n \geq 0$. La suite $z_n = y - \frac{1}{f(x_n)}x_n$ où $f(y) = 1$ (existe car sinon f est nulle donc continue) est alors dans $\ker(f)$ et tend vers $y \notin \ker(f)$ et donc $\ker(f)$ n'est pas fermé.

Solution 89. (Enoncé)

Soit $d := d(A, B)$, alors $U = \bigcup_{x \in A} B(x, \frac{d}{3})$ et $V = \bigcup_{y \in B} B(y, \frac{d}{3})$ conviennent.

Solution 90. (Enoncé)

On prend $E = \mathbb{R}^n$. Pour $n = 1$, C est un intervalle de \mathbb{R} est le seul intervalle dense est \mathbb{R} donc $C = \mathbb{R}$.

Il suffit de montrer que $C \cap H$ est dense dans H pour tout hyperplan H de \mathbb{R}^n pour conclure. Soit alors H un hyperplan de \mathbb{R}^n et $a \notin H$. Soit $x \in H$, il existe des suites $(y_k)_{k \geq 0}$ et $(z_k)_{k \geq 0}$ d'éléments de C qui convergent vers $x + a$ et $x - a$. En écrivant $y_k = h_k + \lambda_k a$ et $z_k = h'_k + \mu_k a$ on a $\lambda_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$ et $\mu_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} -1$

(regarder les coordonnées sur une base de \mathbb{R}^n adaptée à H et a). Alors $x_k = \frac{\lambda_k z_k - \mu_k y_k}{\lambda_k - z_k}$ est bien défini pour k assez grand, est dans $C \cap H$ par convexité de C et tend vers x , d'où le résultat.

Solution 91. (Enoncé)

Pour $r = n$, on sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense non borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose maintenant $r < n$. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $GL_n(\mathbb{R}) \subset \Omega_r(\mathbb{R})^c$, Ω_r est d'intérieur vide. Ω_r . L'ensemble Ω_r est clairement non borné car $pJ_r \in \Omega_r$ pour tout $n \geq 1$.

Soit $B_r = \bigcup_{i=0}^r \Omega_i$.

B_r est fermé : Le complémentaire de B_r est $\bigcup_{i=r+1}^n \Omega_i$ qui est ouvert, car si $M \in \bigcup_{i=r+1}^{n-1} \Omega_i$, alors M est de rang $\geq r + 1$ donc possède une matrice extraite de taille $r + 1$ inversible donc de déterminant non nul. Par continuité du déterminant, si N est une matrice suffisamment proche de M , alors N possède une matrice extraite inversible de taille $r + 1$ et donc sera dans $\bigcup_{i=r+1}^{n-1} \Omega_i$.

B_r contient l'adhérence de Ω_r : Soit M une matrice de rang $k \leq r$. On écrit $M = PJ_kQ$ avec P et Q inversibles. On pose alors $M_p = PD_pQ$ avec $D_p = \text{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}}_{r-k}, 0, \dots, 0)$. Alors M_p est de rang r car

D_p l'est. De plus $(M_p)_p$ tend vers M et cela conclut.

Solution 92. (Enoncé)

1. L'ensemble $S(A)$ est inclus dans l'hyperplan affine $\text{Tr}(A) + \ker(\text{Tr})$, or un hyperplan (affine) est d'intérieur vide en effet si $B(x, r) \subset F$ où F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E , alors pour $y \in E$, $y \neq x$ $x + \frac{r}{2} \frac{y-x}{\|y-x\|} \in B(x, r) \subset F$, donc $y \in F$ et $F = E$.

2. Le sens retour est clair. Inversement, si A n'est pas une homothétie il existe $X \neq 0$ tel que (X, AX) libre, en complétant (kX, AX) en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, A est semblable à une matrice donc le coefficient en

position en $(2, 1)$ est k donc $S(A)$ est non borné.

3. **Sens direct** : Soit $(A_p)_p \in S(A)^\mathbb{N}$ telle que $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, alors par continuité du polynôme caractéristique,

$\chi_{A_p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \chi_0 = X^n$. Mais comme $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $S(A)$ on a $\chi_A = X^n$ et donc A est nilpotente.

Sens réciproque : Si A est nilpotente, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte T . En

notant $D_p = \begin{pmatrix} p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p^n \end{pmatrix}$, la suite $(D_p T D_p^{-1})_p$ est à valeurs dans $S(A)$ et tend vers la matrice nulle (le

coefficient en position (i, j) est divisé par p^{j-i} , ce qui conclut.

4. **Sens direct** : Soit $(A_p)_p$ une suite d'éléments de $S(A)$ qui tend vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme A est diagonalisable π_A est scindé à racines simples, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\pi_A(A_p) = 0$ et donc $\pi_A(B) = 0$ et B est diagonalisable, de plus $M \mapsto \chi_M$ est continue et $\chi_{A_p} = \chi_A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et donc $\chi_A = \chi_B$ en passant à la limite. B est donc semblable à A .

Sens réciproque : Comme A est à coefficients complexes, on peut trigonaliser A : il existe une matrice T

triangulaire supérieure dans $S(A)$. En notant $D_p = \begin{pmatrix} p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p^n \end{pmatrix}$, la suite $(D_p T D_p^{-1})_p$ est à valeurs dans

$S(A)$ et tend vers une matrice diagonale D . Comme $S(A)$ est fermé, $D \in S(A)$ et donc A est diagonalisable.

Solution 93. (Enoncé)

On fait un dessin et l'idée est de contracter les vecteurs, tout en gardant l'alignement *i.e.* $f(x)$ colinéaire à x , on vérifie alors que $f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ convient.

Solution 94. (Enoncé)

On peut supposer F de dimension 1 et même en somme direct avec G . Soit $e \in F$ tel que $F = \mathbb{R}e$. Soit $x_n = \lambda_n e + g_n \in (F \oplus G)^\mathbb{N}$ convergent vers $x \in E$. Si la suite λ_n n'est pas bornée, on peut en extraire une sous suite $\lambda_{\varphi(n)}$ qui tend vers $+\infty$, on a alors $\frac{x_{\varphi(n)}}{\lambda_{\varphi(n)}} = e + \frac{g_{\varphi(n)}}{\lambda_{\varphi(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $(x_n)_n$ bornée), donc $\frac{g_{\varphi(n)}}{\lambda_{\varphi(n)}} \in G^\mathbb{N}$ est convergente de limite $g \in G$ car G fermé mais converge vers $e \in F$ donc $e \in G$ ce qui est exclu.

La suite (λ_n) est donc bornée, on extrait une sous suite qui converge vers $\lambda \in \mathbb{K}$, donc $g_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - \lambda_{\varphi(n)}e$ converge vers $g \in G$ car G fermé et $x = \lambda e + g \in F + G$ est fermé.

Solution 95. (Enoncé)

On prend $E = \mathbb{R}^n$. Pour $n = 1$, C est un intervalle de \mathbb{R} est le seul intervalle dense est \mathbb{R} donc $C = \mathbb{R}$.

Il suffit de montrer que $C \cap H$ est dense dans H pour tout hyperplan H de \mathbb{R}^n pour conclure. Soit alors H un hyperplan de \mathbb{R}^n et $a \notin H$. Soit $x \in H$, il existe des suites $(y_k)_{k \geq 0}$ et $(z_k)_{k \geq 0}$ d'éléments de C qui convergent vers $x + a$ et $x - a$. En écrivant $y_k = h_k + \lambda_k a$ et $z_k = h'_k + \mu_k a$ on a $\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$ et $\mu_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -1$

(regarder les coordonnées sur une base de \mathbb{R}^n adaptée à H et a). Alors $x_k = \frac{\lambda_k z_k - \mu_k y_k}{\lambda_k - z_k}$ est bien défini pour k assez grand, est dans $C \cap H$ par convexité de C et tend vers x , d'où le résultat.

Solution 96. (Enoncé)

L'unicité est claire. Soit $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$ qui est continue sur le compact X donc admet un minimum en $x_0 \in X$, si $g(x_0) > 0$ alors $f(x_0) \neq x_0$ et donc :

$$g(f(x_0)) = \|f(f(x_0)) - f(x_0)\| < \|f(x_0) - x_0\| = g(x_0)$$

ce qui contredit la minimalité de x_0 , donc $g(x_0) = 0$ et x_0 point fixe de f .

Solution 97. (Enoncé)

Il existe $A > 0$ tel que pour tout $\|x\| \geq A$, $\|f(x)\| \geq f(0) + 1$. La fonction f est continue sur le compact $B(0, A)$ donc atteint un minimum en $x \in B(0, A)$ et x est en fait un minimum global de f .

Solution 98. (Enoncé)

Soit $(x_n)_n \in K^n$, si $(x_n)_n$ prend une infinité de fois la même valeur, alors $(x_n)_n$ admet bien une sous-suite convergente. Sinon, montrons que $(x_n)_n$ converge vers $l \in K$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n - l\| < \varepsilon$

pour tout $n \geq n_0$. Mais l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in \{u_0, \dots, u_{n_0}\}\}$ est fini par hypothèse sur la suite $(x_n)_n$ et donc pour tout n assez grand $\|x_n - l\| < \varepsilon$.

Solution 99. (Enoncé)

L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ est fermé car image réciproque de $\{1\}$ par le déterminant qui est continu. Si $M \in SL_n(\mathbb{R})$, le polynôme $P = \det(M + XI_n) - 1$ admet un nombre fini de racine donc pour $\varepsilon > 0$ assez proche de 0, $M + \varepsilon I_n \notin SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{R})$ est d'intérieur vide et finalement $SL_n(\mathbb{R})$ est égal à sa frontière.

Solution 100. (Enoncé)

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, il suffit de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné. Cet ensemble est fermé par image réciproque de $\{I_n\}$ par l'application continue $I_n \mapsto I_n$ et borné car si $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\sup_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}| \leq 1$.

Solution 101. (Enoncé)

Pour $r = n$, on sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense non borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose maintenant $r < n$. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $GL_n(\mathbb{R}) \subset \Omega_r(\mathbb{R})^c$, Ω_r est d'intérieur vide. Ω_r . L'ensemble Ω_r est clairement non borné car $pJ_r \in \Omega_r$ pour tout $n \geq 1$.

Soit $B_r = \bigcup_{i=0}^r \Omega_i$.

B_r est fermé : Le complémentaire de B_r est $\bigcup_{i=r+1}^n \Omega_i$ qui est ouvert, car si $M \in \bigcup_{i=r+1}^n \Omega_i$, alors M est de rang $\geq r + 1$ donc possède une matrice extraite de taille $r + 1$ inversible donc de déterminant non nul. Par continuité du déterminant, si N est une matrice suffisamment proche de M , alors N possède une matrice extraite inversible de taille $r + 1$ et donc sera dans $\bigcup_{i=r+1}^n \Omega_i$.

B_r contient l'adhérence de Ω_r : Soit M une matrice de rang $k \leq r$. On écrit $M = PJ_kQ$ avec P et Q inversibles. On pose alors $M_p = PD_pQ$ avec $D_p = \text{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}}_{r-k}, 0, \dots, 0)$. Alors M_p est de rang r car

D_p l'est. De plus $(M_p)_p$ tend vers M et cela conclut.

Solution 102. (Enoncé)

1. L'ensemble $S(A)$ est inclus dans l'hyperplan affine $\text{Tr}(A) + \ker(\text{Tr})$, or un hyperplan (affine) est d'intérieur vide en effet si $B(x, r) \subset F$ où F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E , alors pour $y \in E$, $y \neq x$ $x + \frac{r}{2} \frac{y-x}{\|y-x\|} \in B(x, r) \subset F$, donc $y \in F$ et $F = E$.

2. Le sens retour est clair. Inversement, si A n'est pas une homothétie il existe $X \neq 0$ tel que (X, AX) libre, en complétant (kX, AX) en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, A est semblable à une matrice donc le coefficient en position en $(2, 1)$ est k donc $S(A)$ est non borné.

3. Sens direct : Soit $(A_p)_p \in S(A)^\mathbb{N}$ telle que $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, alors par continuité du polynome caractéristique, $\chi_{A_p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \chi_0 = X^n$. Mais comme $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $S(A)$ on a $\chi_A = X^n$ et donc A est nilpotente.

Sens réciproque : Si A est nilpotente, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte T . En

notant $D_p = \begin{pmatrix} p & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p^n \end{pmatrix}$, la suite $(D_p T D_p^{-1})_p$ est à valeurs dans $S(A)$ et tend vers la matrice nulle (le

coefficient en position (i, j) est divisé par p^{j-i} , ce qui conclut.

4. Sens direct : Soit $(A_p)_p$ une suite d'éléments de $S(A)$ qui tend vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme A est diagonalisable π_A est scindé à racines simples, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\pi_A(A_p) = 0$ et donc $\pi_A(B) = 0$ et B est diagonalisable, de plus $M \mapsto \chi_M$ est continue et $\chi_{A_p} = \chi_A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et donc $\chi_A = \chi_B$ en passant à la limite. B est donc semblable à A .

Sens réciproque : Comme A est à coefficients complexes, on peut trigonaliser A : il existe une matrice T

triangulaire supérieure dans $S(A)$. En notant $D_p = \begin{pmatrix} p & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p^n \end{pmatrix}$, la suite $(D_p T D_p^{-1})_p$ est à valeurs dans

$S(A)$ et tend vers une matrice diagonale D . Comme $S(A)$ est fermé, $D \in S(A)$ et donc A est diagonalisable.

Solution 103. (Enoncé)

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|p(e_i)\|^2 = \langle p(e_i), p(e_i) \rangle = \langle p(e_i), e_i \rangle$. Donc $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle p(e_i), e_i \rangle = \text{Tr}(p) = \text{rg}(p) = \dim(F)$.

Solution 104. (Enoncé)

Le sens direct est clair car $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$. Pour le sens retour, soit $(x, y) \in \ker(p) \times \text{Im}(p)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|x + ty\|^2 \geq \|p(x + ty)\|^2 = t^2 \|y\|^2$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle \geq 0$, une fonction affine étant de signe constant si et seulement si elle est constante, $\langle x, y \rangle = 0$ et cela conclut.

Solution 105. (Enoncé)

Soit (e_1, \dots, e_n) une bon de E , alors pour $i \neq j$, $e_i - e_j \perp e_i + e_j$ donc $\langle f(e_i) - f(e_j), f(e_i) + f(e_j) \rangle = 0$ et donc $\|f(e_i)\|^2 = \|f(e_j)\|^2$. Notons k la valeur commune des $\|f(e_i)\|$, alors l'endomorphisme $\frac{f}{k}$ envoie une base orthonormée sur une base orthonormée donc c'est une isométrie et f est bien la composée d'une homothétie avec une isométrie vectorielle.

Solution 106. (Enoncé)

Il suffit de montrer que (e_1, \dots, e_n) est génératrice. Soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $x \in F^\perp$, l'hypothèse donne $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle^2 = 0$ donc $x = 0$, comme F est de dimension finie, $F \oplus F^\perp = E$ et finalement $F = E$.

Solution 107. (Enoncé)

Si $M \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$, alors les colonnes de M sont orthonormées et donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $ab + bc + ac = 0$, enfin la condition $\det(M) = 1$ donne $3abc - (a^3 + b^3 + c^3) = 1$ donc,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + ac + bc = 0 \\ 3abc - (a^3 + b^3 + c^3) = 1 \end{cases}$$

En notant $\sigma_3 = abc$, $\sigma_2 = ab + bc + ac$ et $\sigma_1 = a + b + c$, les réels a, b et c sont racines de $P = X^3 - \sigma_1 X^2 + X\sigma_2 - \sigma_3$. On a $\sigma_2 = 0$, et :

$$\begin{aligned} \sigma_1^3 &= (a + b + c)^3 \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + b^2c + ac^2 + bc^2) + 6abc \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a(ab + bc) + b(ab + bc) + c(ac + bc) + 6abc \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = -1 \end{aligned}$$

D'où $\sigma_3 = -1$ et donc a, b et c sont racines de $P = X^3 + X^2 + k$ où k est une constante choisie telle que le polynôme précédent admet bien 3 racines réelles. Une rapide étude de fonction montre que cette dernière condition est vérifiée si et seulement $k \in [-\frac{4}{27}, 0]$. Le sens retour est immédiat en remontant les calculs.

Solution 108. (Enoncé)

La matrice MM^T est symétrique réelle donc diagonalisable, comme elle est nilpotente, elle est nulle. Donc $\|M\|^2 = \langle M, M^T \rangle = 0$ où $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^T)$ et M est nulle.

Solution 109. (Enoncé)

Les matrices A, B sont diagonalisables dans \mathbb{R} , et ont les mêmes valeurs propres par injectivité de $x \mapsto x^{2023}$. Il suffit enfin de remarquer que pour λ une valeur propre, $\ker(A - \lambda I_n) = \ker(A^{2023} - \lambda^{2023} I_n)$ en effet :

$$n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(\ker(A - \lambda I_n)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(\ker(A^{2023} - \lambda^{2023} I_n))$$

Comme $\ker(A - \lambda I_n) = \ker(A^{2023} - \lambda^{2023} I_n)$ il y a nécessairement égalité des dimensions et cela conclut.

Solution 110. (Enoncé)

1. Soit (e_1, \dots, e_n) une bon de E , comme $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \langle Me_i, e_i \rangle = 0$, il existe i, j tels que $\langle Me_i, e_i \rangle \geq 0$ et $\langle Me_j, e_j \rangle \leq 0$, la fonction $t \mapsto \langle M(te_i + (1-t)e_j, te_i + (1-t)e_j) \rangle$ est continue et prend des valeurs opposées en 0 et 1 donc s'annule et cela conclut.

2. On fait une récurrence sur n , pour l'hérédité on prend un vecteur X donné par la question précédente, la famille (X, MX) est orthonormée (quitte à renormaliser) et on peut la compléter en une bon de \mathbb{R}^n .

Solution 111. (Enoncé)

Existence : La matrice M est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée : soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $M = PDP^T$, par bijectivité de $x \mapsto x + x^3$, il existe μ_i tel que $\mu_i^3 + \mu_i = \lambda_i$ et alors $H = P \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $H^3 + H = M$.

Unicité : Il suffit de voir que si $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $H^3 + H = M$ alors H est un polynôme en M , donc si une autre matrice $\tilde{H} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ convient alors H, \tilde{H} commutent et un argument de co-diagonalisabilité conclut.

Solution 112. (Enoncé)

Soit $M \in G$ et $M = OS$ la décomposition polaire de M . Comme $O \in O_n(\mathbb{R}) \subset G$, $S \in G$. Comme $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, S est diagonalisable en base orthonormée : il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des réels strictement positifs et

P une matrice orthogonale telles que $S = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. On a $D \in G$ et donc $D^p \in G$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme G est borné car compact, nécessairement $\lambda_i \leq 1$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. De même $D^{-p} \in G$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et donc $\frac{1}{\lambda_i} \leq 1$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Finalement, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$ et donc $S = I_n$ et $M = O \in O_n(\mathbb{R})$ ce qui conclut.

Solution 113. (Enoncé)

1. C'est assez immédiat.

2. Il suffit d'appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille $(1, \dots, X^n, \dots)$.

3. Notons x_1, \dots, x_k les racines réelles d'ordre impairs de L_n , le polynôme $L_n \prod_{i=1}^k (x - x_i)$ est alors de signe constant. Si $k < n$, comme $L_n \perp \text{Vect}(L_0, \dots, L_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on aurait $0 = \int_0^\infty L_n(x) \prod_{i=1}^k (x - x_i) e^{-x} dx$ et finalement $L_n \prod_{i=1}^k (x - x_i) = 0$: contradiction. Donc $k = n$ et L_n est bien scindé à racines simples.

Solution 114. (Enoncé)

1. Soit $Y \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$, alors $Y^T G(x_1, \dots, x_n) Y = \sum_{i,j=1}^k y_i y_j \langle x_i, x_j \rangle = \langle x, x \rangle \geq 0$ où $x = \sum_{i=1}^k y_i x_i$.

2. On reprend le calcul précédent, alors

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R}) &\iff (\forall (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k, Y^T G(x_1, \dots, x_k) Y = 0 \implies (y_1, \dots, y_k) = (0, \dots, 0)) \\ &\iff \left(\forall (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k, \sum_{i=1}^k y_i x_i = 0 \implies (y_1, \dots, y_k) = (0, \dots, 0) \right) \\ &\iff (x_1, \dots, x_k) \text{ libre} \end{aligned}$$

3. On écrit $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$, alors $d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2$. Comme $\|x\|^2 = d^2 + \|x - p_F(x)\|^2$ la multilinéarité du déterminant donne :

$$\det(G(x, x_1, \dots, x_k)) = \det \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 & 0 \\ 0 & G(x_1, \dots, x_k) \end{pmatrix} + G(p_F(x), x_1, \dots, x_k)$$

Mais $G(p_F(x), x_1, \dots, x_k) = 0$ car $(p_F(x), x_1, \dots, x_k)$ liés. Donc $\det(G(x, x_1, \dots, x_k)) = d^2 \det(G(x_1, \dots, x_k))$ et cela conclut.

Solution 115. (Enoncé)

Le sens direct vient du cours, pour le sens retour il suffit d'utiliser $F = (F^\perp)^\perp$.

Solution 116. (Enoncé)

Soit X le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1, alors $\left| \sum_{i,j} a_{i,j} \right| = |\langle AX, X \rangle| \leq \|M\| \leq n$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution 117. (Enoncé)

La matrice A est diagonalisable de valeur propre $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité. Quitte à réordonner on peut supposer $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ non nulles. On écrit alors

$$\text{Tr}(A)^2 = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^r 1 \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 = \text{rg}(A) \text{Tr}(A^2)$$

Solution 118. (Enoncé)

1. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E , comme $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \langle Me_i, e_i \rangle = 0$, il existe i, j tels que $\langle Me_i, e_i \rangle \geq 0$ et $\langle Me_j, e_j \rangle \leq 0$, la fonction $t \mapsto \langle M(te_i + (1-t)e_j, te_i + (1-t)e_j) \rangle$ est continue et prend des valeurs opposées en 0 et 1 donc s'annule et cela conclut.

2. On fait une récurrence sur n , pour l'hérédité on prend un vecteur X donné par la question précédente, la famille (X, MX) est orthonormée (quitte à renormaliser) et on peut la compléter en une base de \mathbb{R}^n .

Solution 119. (Enoncé)

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de vecteur propre de M associée à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

1. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$ unitaire, alors $\langle Mx, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1, \lambda_1 \leq \langle Mx, x \rangle \leq \lambda_n$$

Avec égalité à gauche pour $x = e_1$ et égalité à droite avec $x = e_n$, d'où le résultat.

2. Soit F un espace de dimension k , alors par la formule de Grassman $\dim(F \cap \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)) > 0$, donc il existe $x = \sum_{i=k}^n x_i e_i \in F$ de norme 1. Pour un tel x on a $\langle Mx, x \rangle \geq \lambda_k$. Donc $\min_{\dim(F)=k} \max_{x \in F, \|x\|=1} \langle Mx, x \rangle \geq \lambda_k$ et il y a égalité avec $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ en faisant le même raisonnement qu'à la question précédente.

Solution 120. (Enoncé)

Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^T = (P^{-1})^T D P^T = (P^{-1})^T P D P^{-1} P P^T = S^{-1} A S$ avec $S = (P^{-1})^T P$. Inversement, si $A^T = S^{-1} A S$ avec $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe $R \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = R^2$. On a alors $A^T = R^{-2} A R^2$ donc $R A^T R^{-1} = R^{-1} A R$, la matrice A est donc semblable à la matrice symétrique réelle $R^{-1} A R$ donc est diagonalisable.

Solution 121. (Enoncé)

L'unique solution est $y(x) = y(0) \exp\left(-\int_0^x \tanh(t) dt\right) = \frac{1}{\cosh(x)}$.

Solution 122. (Enoncé)

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto ae^t + bte^t$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $f(t) = a(t)e^t + b(t)te^t$. La méthode de la variation de la constante montre que les fonctions a, b doivent vérifier :

$$\begin{cases} a'(t)e^t + b'(t)te^t = \frac{e^t}{t^2+1} \\ a'(t)e^t + b'(t)e^t(t+1) = 0 \end{cases}$$

Donc $a'(t) = \frac{t+1}{t^2+1}$ et $b'(t) = \frac{1}{t^2+1}$. Donc les solutions sont de la forme :

$$t \mapsto ae^t + bte^t + \frac{e^t \log(t^2+1)}{2} + e^t \arctan(t) + te^t \arctan(t)$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Solution 123. (Enoncé)

Si f est solution, alors en écrivant $f'(x) = e^x - f(-x)$ on voit que f est en fait \mathcal{C}^∞ donc en dérivant l'équation, $f''(x) - f'(-x) = e^x$ i.e. $f''(x) - e^{-x} + f(x) = +e^{-x}$ donc $f''(x) + f(x) = \cosh(x)$. Les solutions sont donc de la forme :

$$x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x) + \cosh(x)$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ a priori. Mais un calcul montre que seule les fonction de cette forme où $a = -b$ conviennent. Les solutions sont donc de la forme :

$$x \mapsto a(\cos(x) - \sin(x)) + \cosh(x).$$

Solution 124. (Enoncé)

Soit $g(x) = f(x) + f'(x)$, alors en résolvant cette équation on peut écrire $f(x) = f(0)e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$. Le premier terme tend vers 0, on s'occupe maintenant du second. Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que $|g(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \geq A$. Alors pour $x \geq A$:

$$\left| e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt \right| \leq e^{-x} \int_0^A e^t |g(t)| dt + e^{-x} \int_A^x e^t |g(t)| dt \leq e^{-x} e^A \|g\|_\infty + \varepsilon < 2\varepsilon$$

Pour x assez grand, cela conclut.

Solution 125. (Enoncé)

Notons que par le théorème de Cauchy linéaire, une solution y de $y' = ay + f$ est T -périodique si et seulement si $y(t + T)$ (appliquer l'unicité à la fonction $t \mapsto y(t + T)$). Les solutions sont de la forme :

$$y : t \mapsto y(0)e^{at} + e^{at} \int_0^s e^{-as} f(s) ds$$

Cette solution est T périodique si et seulement si :

$$y(0) = y(0)e^{aT} + e^{aT} \int_0^T e^{-as} f(s) ds$$

Le seul choix possible est :

$$y(0) = \frac{e^{aT}}{1 - e^{aT}} \int_0^T e^{-as} f(s) ds$$

qui a bien un sens car $a \neq 0$.

Solution 126. (Enoncé)

Les solutions de $X'(t) = AX(t)$ sont les $X(t) = e^{tA}X(0)$, elles sont toutes de normes constantes si et seulement si $\|e^{tA}X(0)\| = \|X(0)\|$ pour tout $X(0) \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $e^{tA} \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A est antisymétrique. Pour la dernière équivalence, le sens retour est clair. Pour le sens direct, la fonction $t \mapsto e^{tA^T} e^{tA}$ est constante donc de dérivée nulle en 0 d'où $A + A^T = 0$ i.e. A antisymétrique.

Solution 127. (Enoncé)

Si f avait un nombre infini de zéros sur $[0, 1]$, par le théorème de Bolzano-Weierstrass au moins un de ces zéros z serait non isolé, il existe alors une suite $(z_n)_n$ de zéros tous distincts de f qui converge vers z . Donc

$$f'(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = 0$$

Donc $f(z) = f'(z) = 0$ et par l'unicité du théorème de Cauchy, f est nulle : contradiction.

Solution 128. (Enoncé)

1. Si f a un zéro z non isolé alors il existe une suite $(z_n)_n$ de zéros tous distincts de f qui converge vers z . On a alors :

$$f'(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = 0$$

Donc $f(z) = f'(z) = 0$ et par l'unicité du théorème de Cauchy, f est nulle : contradiction.

2. Soit $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de f , supposons que g ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$, quitte à considérer $-g$ et/ou $-f$ on peut supposer $f, g > 0$ sur $]\alpha, \beta[$. Dans ce cas on a nécessairement $f'(\alpha) > 0$ et $f'(\beta) < 0$ mais alors le Wronskien $W(t) = f'(t)g(t) - g'(t)f(t)$ prend des valeurs opposées en α et β donc s'annule : contradiction

Solution 129. (Enoncé)

1. On peut écrire $y'(x) = y'(0) - \int_0^x f(t)y(t) dt$ et $\int_0^\infty f(t)y(t) dt$ converge car f intégrable et y bornée. Donc y admet une limite finie en $+\infty$, comme y bornée cette limite est nécessairement nulle.

2. Par l'absurde, soit (f, g) une base de solutions où f, g bornée. Alors le wronskien $W(t) = f'(t)g(t) - g'(t)f(t)$ tend vers 0 en $+\infty$ par la première question mais $W'(t) = f''(t)g(t) - g''(t)f(t) = 0$ donc le wronskien est constant nul : contradiction.

Solution 130. (Enoncé)

Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| > \frac{1}{R}$, alors $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$ donc pour tout $n \geq 1$, il existe $k \geq n$, $|a_n||z|^n \geq 1$ et donc $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ ne peut converger.

Inversement, soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \frac{1}{R}$, alors $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$. Donc il existe $n \geq 1$ tel que pour tout $k \geq n$, $|a_n z^n| < 1$ et cela conclut.

Solution 131. (Enoncé)

1. Par la formule de Stirling, $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$ donc le rayon de convergence est $\frac{1}{e}$.
2. La suite $(a_n)_n$ vérifie $1 \leq a_n \leq n^2 \sum_{d|n} 1 \leq n^3$ donc le rayon de convergence vaut 1.
3. On a la majoration $a_n \geq 2^n$ donc $R \geq \frac{1}{2}$. Soit $\eta > 0$, alors $a_n \geq \int_{1-\epsilon t}^1 (1+t^2)^n dt \geq \eta(1+(1-\eta)^2)^n$ donc $R \leq \frac{1}{1+(1-\eta)^2}$ pour tout $\eta > 0$ et finalement $R = \frac{1}{2}$.

Solution 132. (Enoncé)

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|a_n - lb_n| < \epsilon b_n$. Pour $n \geq n_0$ et $x > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} - l \right| &\leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - lb_n| x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} + \frac{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n - lb_n| x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \\ &\leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - lb_n| x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} + \epsilon \end{aligned}$$

Le premier terme est plus petit que ϵ pour x assez grand et cela conclut.

Solution 133. (Enoncé)

Soit $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$, alors f est développable en série entière par produit de fonctions qui le sont, de plus $f'(x) = -2xf(x) + 1$, donc si on écrit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ l'unicité des coefficients du développement en série entière donne :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 0, \quad a_{n+2} = -\frac{2}{n+2} a_n$$

D'où $a_{2n} = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

Solution 134. (Enoncé)

Soit $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, alors pour $x \in]-1; 1[$, $g'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{xg(x)}{1-x^2}$. Donc, g satisfait l'EDO $y'(1-x^2) - xy = 1$, en écrivant $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ l'unicité des coefficients du développement en série entière donne :

$$-a_0 - 1 + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n)x^{n+1} = 0$$

Comme g est impaire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$ donc $a_1 = 1$ et pour $n \geq 1$ $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n$ d'où :

$$a_{2n+1} = \frac{a_{2n+1}}{a_1} = \prod_{k=1}^n \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = 2^n n! \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k(2k+1)} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Donc, $\forall x \in]-1; 1[$, $g(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Solution 135. (Enoncé)

Analyse : Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une solution développable en série entière en 0 de $xy'' + y' + xy = 0$. L'identification des coefficients conduit à :

$$\forall n \geq 1, \quad n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

Soit encore,

$$a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)^2} a_{n-1}$$

D'où comme $a_1 = 0$, on a $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = a_0 \frac{(-1)^n}{4^n} n!^2$.

Synthèse : On définit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!^2} x^{2n}$, la fonction f est la somme d'une série entière de rayon infini et en remontant les calculs on voit que f est solution sur \mathbb{R} , de $xy'' + y' + xy = 0$. Les solutions développables en série entière sont donc de la forme λf avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution 136. (Enoncé)

On présente deux méthodes et on calcule plus généralement $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn)!}$.

Première méthode Introduisons la série entière de rayon de convergence infini suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{pn}}{(pn)!}$$

Comme f est une série entière de rayon de convergence infini elle est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . On va donc la dériver p fois, pour x dans \mathbb{R} on a alors :

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} pn(pn-1)\dots(pn-p+1) \frac{x^{p(n-1)}}{(pn)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{p(n-1)}}{(p(n-1))!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{pn}}{(pn)!} = f(x)$$

f est donc solution de l'équation différentielle $y^{(p)} = y$ qui a pour polynôme caractéristique $X^p - 1$. Il existe donc d'uniques scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_{j=1}^p \lambda_j e^{x \omega_j}$ où $\omega_j = e^{\frac{2ij\pi}{p}}$. Or f vérifie les conditions suivantes :

- $f(0) = 1$
- $\forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket f^{(k)}(0) = 0$

Les $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ vérifient donc le système linéaire $A\Lambda = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{p-1} & \dots & \omega_p^{p-1} \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notons que A est une matrice de Vandermonde. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p e^{x \omega_j}$. La somme recherchée vaut $f(1)$ et on obtient le résultat suivant :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn)!} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p e^{e^{\frac{2ij\pi}{p}}}$$

Seconde méthode : On va maintenant faire une deuxième méthode qui permet d'obtenir un résultat plus général.

Soit $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $p > 0$, $0 \leq k \leq p-1$ deux entiers. On s'intéresse à la série entière lacunaire suivante :

$$f_{p,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{pn+k} z^{pn+k}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in D(0, R)$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{pn+k} z^{pn+k}| \leq \sum_{l=0}^{\infty} |a_l z^l| < \infty$ Donc $f_{p,k}$ est une série entière de rayon de convergence au moins R . Le but va être d'exprimer sa somme en fonction de f .

Montrons que pour $|z| < R$: $f_{p,k}(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \omega_p^{-jk} f(\omega_p^j z)$. Il s'agit d'une simple interversion de symbole somme (licite car les familles considérées sont sommables) et d'un calcul de somme géométrique.

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \omega_p^{-jk} f(\omega_p^j z) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_p^{-jk} \omega_p^{jn} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \omega_p^{(n-k)j} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{pn+k} z^{pn+k} = f_{p,k}(z)$$

Si on prend $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ alors,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn)!} = f_{p,0}(1) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p f(\omega_p^j) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p e^{\omega_p^j} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p e^{e^{\frac{2ij\pi}{p}}}.$$

Solution 137. (Enoncé)

1. Pour choisir une partition de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$, on construit l'ensemble qui contient $n+1$, cet ensemble contient $k+1$ éléments avec $0 \leq k \leq n$, et on a $\binom{n}{k} B_{n-k}$ possibilités, les k éléments avec $n+1$ et les B_{n-k} partitions possibles pour les $n-k$ autres éléments. On a alors

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} B_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

2. On montre alors facilement par récurrence que $B_n \leq n!$, donc $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence qui vaut au moins 1.

3. Soit $|x| < 1$, alors

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_k x^k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = e^x f(x)$$

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour $|x| < 1$, $f(x) = \lambda e^{e^x}$, comme $f(0) = B_0 = 1$, $\lambda = \frac{1}{e}$. Donc $f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}$ et donc finalement :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Solution 138. (Enoncé)

1. Il est clair que f n'est pas définie pour $x = \pm 1$. Soit $|x| < 1$, alors $\left| \frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \varphi(n)|x|^n$ donc f est bien définie pour $|x| < 1$. Si $|x| > 1$ alors la série définissant f est grossièrement divergente donc $f(x)$ n'est pas défini.

2. Soit $|x| < 1$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(n)x^{nk} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{nk=p} \varphi(n)x^p = \sum_{p=1}^{\infty} p x^{p-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Où l'on a utilisé le théorème de sommation par paquet avec la parition $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigcup_{p \geq 1} \{(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid nk = p\}$ et $\sum_{nk=p} \varphi(n) = \sum_{n|p} \varphi(n) = p$.

3. On utilise la question précédente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)2^n}{9^n - 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n) \left(\frac{2}{9}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^n} = f\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{18}{49}$$

Solution 139. (Enoncé)

1. Il est clair que f n'est pas définie pour $x = \pm 1$. Soit $|x| < 1$, alors $\left| \frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \varphi(n)|x|^n$ donc f est bien définie pour $|x| < 1$. Si $|x| > 1$ alors la série définissant f est grossièrement divergente donc $f(x)$ n'est pas défini.

2. Soit $|x| < 1$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(n)x^{nk} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{nk=p} \varphi(n)x^p = \sum_{p=1}^{\infty} p x^{p-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Où l'on a utilisé le théorème de sommation par paquet avec la parition $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigcup_{p \geq 1} \{(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid nk = p\}$ et $\sum_{nk=p} \varphi(n) = \sum_{n|p} \varphi(n) = p$.

3. On utilise la question précédente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)2^n}{9^n - 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)\left(\frac{2}{9}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^n} = f\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{18}{49}$$

Solution 140. (Enoncé)

1. Il suffit de faire le changement de variable $u = \sqrt{nt}$ et d'utiliser $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Pour $|x| < 1$:

$$f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = x + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\infty} x^n e^{-nt^2} dt.$$

Or $\sum_{n \geq 2} \int_0^{\infty} |x|^n e^{-nt^2} dt$ converge donc par le théorème d'intégration termes à termes :

$$f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-t^2}}{e^{t^2} - x} dt$$

3. On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres en faisant une majoration sur tout compact $[a, +\infty[$ de $]1, +\infty[$.

Solution 141. (Enoncé)

1. Il est clair que f n'est pas définie pour $t \in \mathbb{N}^*$, si maintenant $t \notin \mathbb{N}^*$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n-t} \right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-t)^2}} < \infty$$

donc $f(t)$ existe.

2. Soit $|t| < 1$, alors :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \frac{1}{1 - \frac{t}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n t^k}{n^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{k+1}} \right) t^k$$

La permutation des sommes étant justifiée par sommabilité (immédiate à vérifier).

3. Si f est nulle sur $] -\alpha, \alpha[$ alors par unicité du DSE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{k+1}} = 0$ pour tout $k \geq 1$. Supposons par l'absurde $(a_n)_n$ non et soit a_{n_0} le premier terme non nul, alors

$$0 = a_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \left(\frac{n_0}{n} \right)^{k+1}$$

Or la somme tend vers 0 par TCD discret quand $k \rightarrow +\infty$ donc a_{n_0} : contradiction.

Solution 142. (Enoncé)

1. C'est du cours.

2. Soit $x > 0$, alors $\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. De plus,

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$$

Où la permutation est licite car $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+x-1}}{n!} dt < \infty$. La fonction $x \mapsto \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est de classe \mathcal{C}^{∞} sur \mathbb{R} par un application immédiate du théorème de dérivation des intégrales à paramètres. De plus, pour tout $n \geq 0$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ est de classe \mathcal{C}^{∞} sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et pour K compact de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $j \geq 0$

$$\|f_n^{(j)}\| \leq \frac{1}{d(x, K)^j n!}$$

Donc on peut dériver terme à terme par convergence normale.

Solution 143. (Enoncé)

Notons que par le théorème de Cauchy linéaire, une solution y de $y' = ay + b$ est T -périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$ (appliquer l'unicité à la fonction $t \mapsto y(t + T)$). Les solutions sont de la forme :

$$y : t \mapsto y(0)e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(s)} f(s) ds$$

où A est une primitive de a . Cette solution est T périodique si et seulement si :

$$y(0) = y(T) = y(0)e^{A(T)} + e^{A(T)} \int_0^T e^{-A(s)} f(s) ds \quad (\star)$$

Il y a maintenant deux cas :

Premier cas : $e^{A(T)} \neq 1$, alors le seul choix possible est :

$$y(0) = \frac{e^{aT}}{1 - e^{aT}} \int_0^T e^{-as} f(s) ds$$

Il y a donc une unique solution T -périodique.

Second cas : Si $e^{A(T)} = 1$ alors l'équation \star n'a pas de solution et il n'existe pas de solution T périodique.

Solution 144. (Enoncé)

Supposons qu'il existe une solution y non nulle s'annulant deux fois en $\alpha < \beta$, quitte à considérer $-y$ on peut supposer $y \geq 0$ sur $[\alpha, \beta]$. Alors comme $(y^2)'' = 2(y'y)' = 2y''y + y^2 = -2qy + y^2 \geq 0$. Donc y^2 est convexe positive sur $[\alpha, \beta]$ et s'annule en α, β donc est constante nulle sur cet intervalle et donc $y'(\alpha) = 0$ et y est la fonction nulle : contradiction.

Solution 145. (Enoncé)

Soit $u \in c_0(\mathbb{N})$, alors $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{2^n}$ converge et :

$$|\varphi(u)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \leq \|u\|_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\|u\|_{\infty}. \quad (\star)$$

Donc φ est continue, de norme subordonnée inférieure à 2. De plus avec $u^{(n)} = (\underbrace{1, \dots, 1}_n, 0, \dots)$, $\|u^{(n)}\| = 1$

pour tout $n \geq 1$ et $\varphi(u^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$ donc la norme subordonnée de φ vaut 2. Elle est atteinte si et seulement toutes les inégalités de (\star) sont des égalités mais un tel u doit vérifier $u_n = 1$ pour tout $n \geq 1$ qui n'est pas dans $c_0(\mathbb{N})$ donc la norme de φ n'est pas atteinte.

Solution 146. (Enoncé)

On prend $E = \mathbb{R}^n$. Pour $n = 1$, C est un intervalle de \mathbb{R} est le seul intervalle dense est \mathbb{R} donc $C = \mathbb{R}$.

Il suffit de montrer que $C \cap H$ est dense dans H pour tout hyperplan H de \mathbb{R}^n pour conclure. Soit alors H un hyperplan de \mathbb{R}^n et $a \notin H$. Soit $x \in H$, il existe des suites $(y_k)_{k \geq 0}$ et $(z_k)_{k \geq 0}$ d'éléments de C qui convergent vers $x + a$ et $x - a$. En écrivant $y_k = h_k + \lambda_k a$ et $z_k = h'_k + \mu_k a$ on a $\lambda_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$ et $\mu_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} -1$

(regarder les coordonnées sur une base de \mathbb{R}^n adaptée à H et a). Alors $x_k = \frac{\lambda_k z_k - \mu_k y_k}{\lambda_k - z_k}$ est bien défini pour k assez grand, est dans $C \cap H$ par convexité de C et tend vers x , d'où le résultat.

Solution 147. (Enoncé)

1. Il s'agit de montrer que $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_{\infty}$ ne sont pas équivalentes. Soit $f_n(x) = x^n$, alors $\sup_{n \geq 1} \frac{\|f_n\|_{\infty}}{\|f_n\|_2} = +\infty$ donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

2. Soit $x \in [0, 1]$, alors

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right| \leq C \left\| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right\|_2 = C \sqrt{\sum_{i=1}^n \|a_i f_i\|_2^2} = C \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

3. Soit $x \in [0, 1]$. On utilise l'inégalité précédente avec $a_i = f_i(x)$, on a alors :

$$\left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \right)^2 \leq C^2 \sum_{i=1}^n f_i^2(x)$$

Donc $\sum_{i=1}^n f_i(x)^2 \leq C^2$, en intégrant entre $[0, 1]$, il vient $n \leq C^2$. On a donc prouvé que toute famille orthonormée de F était de cardinal inférieure à C^2 : F est bien de dimension finie.

Solution 148. (Enoncé)

Soit \mathcal{T} la tribu engendrée par les singletons et \mathcal{T}' l'ensemble des parties de E qui sont au plus dénombrables ou de complémentaire au plus dénombrables. Montrons que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, il est clair que \mathcal{T}' est une tribu, de plus si $A \in \mathcal{T}'$ alors $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ et $A^c = \bigcup_{x \in A^c} \{x\}$ avec au moins une des deux unions au plus dénombrable et donc $A \in \mathcal{T}$ et cela conclut.

Solution 149. (Enoncé)

On raisonne par récurrence sur n , le cas $n = 1$ est immédiat. Supposons le résultat vrai au rang n , alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n \cup A_{n+1}) \geq 1 - n + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - 1.$$

D'où le résultat.

Solution 150. (Enoncé)

On a $Y(\Omega) \subset \bigcup_{n \geq 1} X_n(\Omega)$ qui est bien au plus dénombrable. De plus, pour $y \in Y(\Omega)$, $(Y = y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n = y) \cap (N = n)$ qui est bien dans la tribu \mathcal{F} .

Solution 151. (Enoncé)

Par théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1} = \frac{p}{p-1} \ln(p).$$

Solution 152. (Enoncé)

Comme $(X = Y) = \bigcup_{n \geq 1} (X = n, Y = n)$, l'indépendance donne :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} p(1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-p} e^{-\lambda} (e^{\lambda(1-p)} - 1).$$

Solution 153. (Enoncé)

On utilise l'expression du déterminant avec la somme sur les permutations.

$$\mathbb{E}(\det(M)) = \mathbb{E}\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n X_{i,\sigma(i)}\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_{i,\sigma(i)}) = 0$$

car pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ les variables aléatoires $(X_{i,\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendantes. Comme $\mathbb{E}(M) = 0$, $V(M) = E(M^2)$, d'où :

$$\mathbb{E}(M^2) = \sum_{\sigma, \sigma' \in (\mathfrak{S}_n)^2} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)}\right)$$

Si $\sigma \neq \sigma'$, alors il existe j tel que $\sigma(j) \neq \sigma'(j)$ et donc $X_{j,\sigma(j)}$, $X_{j,\sigma'(j)}$ sont indépendantes et $\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)}) = 0$. Finalement :

$$\mathbb{E}(M^2) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \underbrace{\varepsilon(\sigma)^2}_{=1} \prod_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}(X_{i,\sigma(i)}^2)}_{=1} = n!.$$

Solution 154. (Enoncé)

Soit $k \geq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(X+Y = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k, Y = n-k) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n-k) \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}.$$

Solution 155. (Enoncé)

Soit $n \geq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = n \mid X = k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n p^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q\lambda)^k}{k!} = \frac{e^{-\mu}}{n!} \mu^n.$$

Avec $\mu = \lambda p$.

Solution 156. (Enoncé)

On remarque que $\mathbb{E}(X_i) = p_i$ donc en notant $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, il vient par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| > \varepsilon) \leq \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}$$

Or par indépendance,

$$V(Y) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \underbrace{p_i(1-p_i)}_{\leq \frac{1}{4}} \leq \frac{1}{4n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'où le résultat.

Solution 157. (Enoncé)

1. La suite $(\frac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha})_{n \geq 1}$ est positive de somme 1 donc définit un germe de probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.
2. $\mathbb{P}(m\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(\alpha)(nm)^\alpha} = \frac{1}{m^\alpha}$.
3. Par le lemme de Gauss, $p_k\mathbb{N}^* \cap p_l\mathbb{N}^* = (p_k p_l)\mathbb{N}^*$ pour $p_k \neq p_l$, l'indépendance découle du calcul de la question 2.
4. Par le même raisonnement les événements $(p_k\mathbb{N}^*)_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendants. Donc pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (p_k\mathbb{N}^*)^c\right) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)$$

Or $\bigcap_{k=1}^{\infty} (p_k\mathbb{N}^*)^c = \{1\}$ donc par continuité décroissante d'une probabilité :

$$\frac{1}{\zeta(\alpha)} = \mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right).$$

5. Supposons que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ converge, alors $\sum_{n \geq 1} \ln(1 - \frac{1}{p_n})$ converge donc $\prod_{n \geq 1} (1 - \frac{1}{p_n})$ converge. Par décroissance de $\alpha \mapsto \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_k^\alpha})$ on a :

$$\sup_{\alpha > 1} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) < +\infty.$$

Donc $\sup_{\alpha > 1} \zeta(\alpha) < +\infty$: contradiction.

Solution 158. (Enoncé)

1. Par intersection décroissante :

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0$$

2. Montrons $P((\limsup A_n)^c) = 0$,

$$\mathbb{P}((\limsup A_n)^c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

Or $1 - x \leq e^{-x}$ donc $\prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \exp(-\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)) = 0$ et cela conclut.

3. Si c'était le cas, alors comme les événements $(p_k \mathbb{N}^*)_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendants par le lemme de Gauss, on aurait $P(\limsup(p_n \mathbb{N}^*)) = 1$ alors que $\limsup p_n \mathbb{N}^* = \emptyset$: contradiction.

Solution 159. (Enoncé)

1. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$. Or $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - E(X)^2 \leq \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \leq \frac{1}{4}$ et de même pour $V(Y)$: d'où le résultat.

2. On applique l'inégalité précédente à $X = \mathbf{1}_A$ et $Y = \mathbf{1}_B$. Il y a égalité si et seulement :

- X et Y sont presque sûrement liées (égalité dans Cauchy-Schwarz)
- $X \in \{0, 1\}$ (égalité dans $X^2 \leq X$)
- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ (égalité dans $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \leq \frac{1}{4}$)

Donc il y a égalité si et seulement si $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ et B diffère de A ou \bar{A} à un événement négligeable près.

Solution 160. (Enoncé)

On raisonne avec les fonctions génératrices, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et $G_Y(t) = e^{\mu(t-1)}$ donc par indépendance $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{(\mu+\lambda)(t-1)}$ et $X + Y$ suit une loi de poisson. Inversement en utilisant que $G_Y = \frac{G_{X+Y}}{G_X}$ on obtient la conclusion voulue.

Solution 161. (Enoncé)

Cette matrice est diagonalisable si et seulement si $X \neq Y$, donc la probabilité recherchée est :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = n) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = \frac{p+q-2pq}{p+q-pq}.$$

Solution 162. (Enoncé)

Il est clair que $X(\Omega) = \llbracket r + \infty \rrbracket$. Si $X = n$, alors on a effectué n lancers et le dernier est nécessairement un face. Sur les $n - 1$ autres lancers il y a $r - 1$ faces, on a $\binom{n-1}{r-1}$ possibilités pour ces faces, une fois les lancers faces choisies les autres sont nécessairement des piles. Donc :

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$$

Et en utilisant la formule $\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} x^{n-p}$ il vient :

$$G_X(t) = \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} t^n = p^r t^r \sum_{n=r-1}^{\infty} \binom{n}{r-1} q^{n-(r-1)} t^{n-(r-1)} = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^r$$

Solution 163. (Enoncé)

1. C'est un cas particulier de l'exercice 150

2. Soit $n \geq 1$, alors $\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S = n | N = k)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=1}^k X_i = n)\mathbb{P}(N = k)$. Donc pour $|t| < 1$:

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^k X_i = n\right) \mathbb{P}(N = k) t^n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k X_i = n\right) t^n \right) = \sum_{k=1}^{\infty} G_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) \mathbb{P}(N = k).$$

Comme les (X_i) sont indépendantes, $G_{\sum_{i=1}^k X_i} = G_{X_1}^k$ et cela conclut.

3. Comme X_1 et N sont d'espérances finies, G_{X_1} et G_N sont dérivables à gauche en 1, par composition G_S est dérivable à gauche en 1 et donc S est d'espérance finie. De plus,

$$\mathbb{E}(S) = G'_S(1^-) = (G_N \circ G_{X_1})'(1^-) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$$

Solution 164. (Énoncé)

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n (X_i \geq k)) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n$. Donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$$

De même,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \leq k) - \mathbb{P}(Y \leq k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$$

Solution 165. (Énoncé)

1. Comme $S_n \equiv n[2]$, S_{2n+1} est toujours impair donc jamais nul d'où $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$.

2. Si $S_{2n} = 0$, alors il y a n X_i qui valent 1 et tous les autres valent -1 , on a $\binom{2n}{n}$ pour les X_i qui valent 1 et une fois ce choix fait, les autres X_i sont nécessairement égaux à -1 . D'où :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

3. C'est difficile, On sait que $S_{2n}(\Omega) = \{-2n, -2n+2, \dots, 2n-2, 2n\}$ d'où,

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \sum_{k=-n}^n 2|k| \mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \sum_{k=-n}^n 2|k| \binom{2n}{n+k} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n-1}} \sum_{k=1}^n k \binom{2n}{n+k}$$

Or, $k \binom{2n}{n+k} = (n+k) \binom{2n}{n+k} - n \binom{2n}{n+k} = 2n \binom{2n-1}{n+k-1} - n \binom{2n}{n+k}$. D'où

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \sum_{k=1}^n 2n \binom{2n-1}{n+k-1} - \frac{n}{2} \sum_{p=0, p \neq n}^{2n} \binom{2n}{p} = \frac{2n}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{p} - \frac{n}{2} \sum_{p=0, p \neq n}^{2n} \binom{2n}{p}$$

car $\binom{2n-1}{p} = \frac{1}{2} \left(\binom{2n-1}{p} + \binom{2n-1}{2n-1-p} \right)$. Finalement,

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \frac{1}{4^{n-1}} \left(n 2^{2n-1} - \frac{n}{2} \left(4^n - \binom{2n}{n} \right) \right) = \frac{n}{2} \binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4n}{\pi}}$$

Solution 166. (Énoncé)

1. La suite $\left(\frac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha}\right)_{n \geq 1}$ est positive de somme 1 donc définit un germe de probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

2. $\mathbb{P}(m\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(\alpha)(nm)^\alpha} = \frac{1}{m^\alpha}$.

3. Par le lemme de Gauss, $p_k \mathbb{N}^* \cap p_l \mathbb{N}^* = (p_k p_l) \mathbb{N}^*$ pour $p_k \neq p_l$, l'indépendance découle du calcul de la question 2.

4. Par le même raisonnement les événements $(p_k \mathbb{N}^*)_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendants. On a donc pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n (p_k \mathbb{N}^*)^c \right) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i^\alpha} \right)$$

Or $\bigcap_{k=1}^{\infty} (p_k \mathbb{N}^*)^c = \{1\}$ donc par continuité décroissante d'une probabilité :

$$\frac{1}{\zeta(\alpha)} = \mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha} \right)$$

5. Supposons que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ converge, alors $\sum_{n \geq 1} \ln(1 - \frac{1}{p_n})$ converge donc $\prod_{n \geq 1} (1 - \frac{1}{p_n})$ converge. Par décroissance de $\alpha \mapsto \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_k^\alpha})$ on a :

$$\sup_{\alpha > 1} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_k^\alpha}) \leq \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_k}) < +\infty.$$

Donc $\sup_{\alpha > 1} \zeta(\alpha) < +\infty$: contradiction.

Solution 167. (Enoncé)

Supposons X et Y indépendantes. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $\mathbb{P}(X = \omega) \neq 0$, alors $\mathbb{P}(X = \omega) = \mathbb{P}(X = \omega, Y = f(X(\omega))) = \mathbb{P}(X = \omega)\mathbb{P}(Y = f(X(\omega)))$ d'où $\mathbb{P}(Y = f(\omega)) = 1$ donc nécessairement Y est constante, la réciproque est immédiate.

Solution 168. (Enoncé)

Il s'agit de déterminer le cardinal de $\text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Soit M une matrice inversible, alors sa première colonne est non nulle, il y a $p^n - 1$ choix possibles. Sa deuxième colonne ne doit pas être dans le plan engendré par la première ce qui donne $p^n - p$ choix, et donc

$$|\text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i)$$

et la proba recherchée vaut :

$$\frac{|\text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|}{p^{n^2}} = \prod_{i=1}^n (1 - \frac{1}{p^i})$$

Solution 169. (Enoncé)

Soit $Y = X_1 - X_2$, alors

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) - 2\text{Cov}(X_1, X_2) = 2V(X) - 2\text{Cov}(X_1, X_2)$$

mais $4V(X) = V(2X) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2) = 2V(X) + 2\text{Cov}(X_1, X_2)$. Donc $\text{Cov}(X_1, X_2) = V(X)$ et $V(Y) = 0$ et Y est constante nulle (car $\mathbb{E}(Y) = 0$) d'où le résultat.

Solution 170. (Enoncé)

1. La suite $(\frac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha})_{n \geq 1}$ est positive de somme 1 donc définit un germe de probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.
2. $\mathbb{P}(m\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(\alpha)(nm)^\alpha} = \frac{1}{m^\alpha}$.
3. Par le lemme de Gauss, $p_k\mathbb{N}^* \cap p_l\mathbb{N}^* = (p_k p_l)\mathbb{N}^*$ pour $p_k \neq p_l$, l'indépendance découle du calcul de la question 2.
4. Par le même raisonnement les événements $(p_k\mathbb{N}^*)_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendants. On a donc pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (p_k\mathbb{N}^*)^c\right) = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)$$

Or $\bigcap_{k=1}^{\infty} (p_k\mathbb{N}^*)^c = \{1\}$ donc par continuité décroissante d'une probabilité :

$$\frac{1}{\zeta(\alpha)} = \mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)$$

5. Supposons que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ converge, alors $\sum_{n \geq 1} \ln(1 - \frac{1}{p_n})$ converge donc $\prod_{n \geq 1} (1 - \frac{1}{p_n})$ converge. Par décroissance de $\alpha \mapsto \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_k^\alpha})$ on a :

$$\sup_{\alpha > 1} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_k^\alpha}) \leq \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_k}) < +\infty.$$

Donc $\sup_{\alpha > 1} \zeta(\alpha) < +\infty$: contradiction.

6. Si c'était le cas, alors comme les événements $(p_k \mathbb{N}^*)_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendants par le lemme de Gauss, on aurait par le lemme de Borell-Cantelli : $P(\limsup(p_n \mathbb{N}^*)) = 1$ mais $\limsup p_n N^* = \emptyset$: contradiction.

Solution 171. (Enoncé)

Il est clair que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $n \geq 1$, $(Y = n) = (X = 2n - 1) \cup (X = 2n)$ donc,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(X = 2n - 1) + \mathbb{P}(X = 2n) = p(1-p)^{2n-2} + p(1-p)^{2n-1} = (p+p(1-p))((1-p)^2)^{n-1} = (1-(1-p)^2)((1-p)^2)^{n-1}$$

Donc Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1 - p)^2$.

2. Soit $Z = 2Y - X$, alors $Z(\Omega) = \{0, 1\}$ et $Z = 0$ si et seulement si X est pair. Donc, $\mathbb{P}(Z = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{2n-1} = \frac{1-p}{2-p}$

$$\mathbb{P}(Z = 0, Y = n) = \mathbb{P}(X = 2n) = p(1-p)^{2n-1} = \mathbb{P}(Z = 0)\mathbb{P}(Y = n)$$

Les autres calculs sont similaires et cela donne le résultat.

Solution 172. (Enoncé)

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de point fixe de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et soit X_i la variable aléatoire sur \mathfrak{S}_n qui vaut 1 si $\sigma(i) = i$ et 0 sinon. Alors $X = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\mathbb{E}(X_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ d'où $\mathbb{E}(X) = 1$.

Solution 173. (Enoncé)

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n (X_i \geq k)) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n$. Donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1) = \left(\frac{N - k + 1}{N}\right)^n - \left(\frac{N - k}{N}\right)^n$$

De même,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \leq k) - \mathbb{P}(Y \leq k - 1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k - 1}{N}\right)^n$$

Solution 174. (Enoncé)

Il est clair que $X(\Omega) = \llbracket r + \infty \rrbracket$. Si $X = n$, alors on a effectué n lancers et le dernier est nécessairement un face. Sur les $n - 1$ autres lancers il y a $r - 1$ faces, on a $\binom{n-1}{r-1}$ possibilités pour ces faces, une fois les lancers faces choisies les autres sont nécessairement des piles. Donc :

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$$

Et en utilisant la formule $\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} x^{n-p}$ on a :

$$G_X(t) = \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} t^n = p^r t^r \sum_{n=r-1}^{\infty} \binom{n}{r-1} q^{n-(r-1)} t^{n-(r-1)} = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^r$$

Solution 175. (Enoncé)

1. Comme $S_n \equiv n[2]$, S_{2n+1} est toujours impair donc jamais nul d'où $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$.

Si $S_{2n} = 0$, alors il y a n X_i qui valent 1 et tous les autres valent -1 , on a $\binom{2n}{n}$ pour les X_i qui valent 1 et une fois ce choix fait, les autres X_i sont nécessairement égaux à -1 . D'où

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

2. La fonction $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) x^{2n}$ est définie sur $] -1, 1[$ par l'équivalent de la question précédente. De plus,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Il suffit de prouver que $\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_{n-k} = 0)\mathbb{P}(T = k)$. Or,

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0, T = k)$$

Si $k > n$, alors $\mathbb{P}(S_n = 0, T = k) = 0$ par définition de T . Enfin si $k \geq n$, alors

$$\mathbb{P}(S_n = 0, T = k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=k+1}^n X_i = 0, T = k\right) = P\left(\sum_{i=k+1}^n X_i = 0\right)\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(S_{n-k} = 0)\mathbb{P}(T = k).$$

car les événements $(T = n)$ et $\sum_{i=k+1}^n X_i = 0$ sont indépendants et $X_{k+1} + \dots + X_n$ suit la même loi que S_{n-k} .

Solution 176. (Enoncé)

On remarque $S_{2n}(\Omega) = \{-2n, -2n+2, \dots, 2n-2, 2n\}$ d'où

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \sum_{k=-n}^n 2|k|\mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \sum_{k=-n}^n 2|k|\binom{2n}{n+k} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n-1}} \sum_{k=1}^n k \binom{2n}{n+k}$$

Or, $k \binom{2n}{n+k} = (n+k) \binom{2n}{n+k} - n \binom{2n}{n+k} = 2n \binom{2n-1}{n+k-1} - n \binom{2n}{n+k}$. D'où

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \sum_{k=1}^n 2n \binom{2n-1}{n+k-1} - \frac{n}{2} \sum_{p=0, p \neq n}^{2n} \binom{2n}{p} = \frac{2n}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{p} - \frac{n}{2} \sum_{p=0, p \neq n}^{2n} \binom{2n}{p}$$

car $\binom{2n-1}{p} = \frac{1}{2} \left(\binom{2n-1}{p} + \binom{2n-1}{2n-1-p} \right)$. Finalement,

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \frac{1}{4^{n-1}} \left(n2^{2n-1} - \frac{n}{2} \left(4^n - \binom{2n}{n} \right) \right) = \frac{n}{2} \binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4n}{\pi}}.$$

Solution 177. (Enoncé)

On applique la règle de la chaîne, $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

De même $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} + r^2 \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2 \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. D'où

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}.$$

Solution 178. (Enoncé)

Soit $h(t) = f(tx)$, alors $f(x) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt$ et $h'(t) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$ et les g_i sont bien de classe C^∞ par une application immédiate du théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

Solution 179. (Enoncé)

On rappelle $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$. On note $\sigma_k^{(j)}$ le polynôme symétrique élémentaire de degré en les variables $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$. On a alors $\sigma_k = x_j \sigma_{k-1}^{(j)} + \sigma_k^{(j)}$ d'où $\frac{\partial \sigma_k}{\partial x_j} = \sigma_{k-1}^{(j)}$ (où l'on convient $\sigma_0^{(j)} = 1$). Donc le déterminant recherché vaut

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \sigma_{k-1}^{(j)} & \vdots \\ \sigma_{n-1}^{(1)} & \dots & \sigma_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix}$$

On soustrait la dernière colonne à toutes les autres, Le coefficient en (k, j) après cette opération devient :

$$\sigma_{k-1}^{(j)} - \sigma_{k-1}^{(n)} = (x_n - x_j) \sigma_{k-2}^{(j, n)}$$

où $\sigma_k^{(j,n)}$ est le polynôme symétrique élémentaires de degré k en les variables $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$. On peut alors factoriser par $\prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j)$ et développer par rapport à la première ligne pour trouver $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$.

Solution 180. (Enoncé)

On voit en particulier que $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$, donc f admet un minimum global sur \mathbb{R}^n et donc ∇f s'annule.

Si on refait le raisonnement avec $g_a(x) = f(x) - \langle a, x \rangle$ où $a \in \mathbb{R}^b$, alors ∇g s'annule et donc $\nabla f(x) = a$ pour un $x \in \mathbb{R}^2$ ce qui conclut.

Solution 181. (Enoncé)

1. Supposons que u admette son maximum en un point $(x, y) \in \Omega$, alors comme le maximum est atteint en un point de l'ouvert la condition \mathcal{C}^2 montre que la Hessienne de u en (x, y) est dans $\mathcal{S}_n^-(\mathbb{R})$ donc de trace négative. Or $\text{Tr}(\text{Hess}(u)(x, y)) = \Delta u(x, y) > 0$: contradiction.

2. Soit $u_\varepsilon = u + \varepsilon(x^2 + y^2)$, alors $\Delta u_\varepsilon = \Delta u + 4\varepsilon > 0$ donc $\sup_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \sup_{\overline{\Omega} \setminus \Omega} u_\varepsilon$ puis on fait tendre ε vers 0 et une vérification immédiate montre que $\sup u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sup u$.

Solution 182. (Enoncé)

La fonction f est définie sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ elle y est de classe \mathcal{C}^∞ , cherchons les points critiques de f . $\Delta f(x, y) = (2yx, x^2 + \ln(y)^2 + 2\ln(y))$ donc les points critiques de f sont $(0, 1)$ et $(0, e^{-2})$, il est clair que $(0, 1)$ est un minimum global car pour tout $(x, y) \in U$, $f(x, y) \geq 0 = f(0, 1)$. Enfin,

$$\text{Hess}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2\frac{\ln(y)}{y} + \frac{2}{y} \end{pmatrix}$$

Donc $\text{Hess}(f)(0, e^{-2}) = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ donc on ne peut pas conclure mais on sait que si c'est un extremum local alors c'est un minimum local. On vérifie que

$$f(0, e^{-2} + k) = 4e^{-2} - 2k + o(k) < 4e^{-2}$$

pour $k > 0$ assez proche de 0 donc $(0, e^{-2})$ n'est pas un extremum local.

Solution 183. (Enoncé)

Soit $F(x) = \int_0^x f(x, t) dt$. Alors $h(x) = F(x, b(x)) - F(x, a(x))$ d'où :

$$h'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, b(x)) + b'(x) \frac{\partial F}{\partial y}(x, b(x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, a(x)) - a'(x) \frac{\partial F}{\partial y}(x, a(x))$$

Et finalement,

$$h'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + b'(x)f(x, b(x)) - a'(x)f(x, a(x))$$

Solution 184. (Enoncé)

Soit φ une telle fonction, alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 = \Delta f = 2(x^2 + y^2)\varphi''(x^2 + y^2) + 4\varphi'(x^2 + y^2) \quad (\star)$$

Comme la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est surjective de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ dans \mathbb{R}^{+*} , l'équation \star est équivalente à :

$$\forall t > 0, \quad t^2\varphi''(t) + \varphi'(t) = 0$$

En résolvant cette équation on voit que φ est de la forme $\varphi(t) = A \ln(t) + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Inversement si φ est de cette forme alors $\Delta f = 0$.

Solution 185. (Enoncé)

Si $b = 0$, alors $a \frac{\partial f}{\partial x} = f$ donc f est de la forme $f(x, y) = g(y)e^{ax}$ donc si $g \neq 0$, il existe y tel que $g(y) \neq 0$ et $g(y)e^{ax}$ n'est pas borné ce qui est exclu donc $g = 0$ et $f = 0$. On suppose maintenant $b \neq 0$ (et $a \neq 0$ par symétrie) et on fait ensuite un changement de variable affine pour se ramener au cas précédent. On pose $f(x, y) = g(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ et :

$$g(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = f(x, y) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = (a\alpha + b\beta) \frac{\partial g}{\partial x} + (a\gamma + b\delta) \frac{\partial g}{\partial y}$$

Donc on peut prendre $\gamma = 1$, $\delta = -\frac{a}{b}$, $\beta = 0$ et $\alpha = 1$ et cela conclut.

Solution 186. (Enoncé)

soit $h(t) = f(tx)$, alors $f(x) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt$ et $h'(t) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$ et les g_i sont bien de classe C^∞ par une application immédiate du théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

Solution 187. (Enoncé)

1. Supposons que u admette son maximum en un point $(x, y) \in \Omega$, alors comme le maximum est atteint en un point de l'ouvert la condition \mathcal{C}^2 montre que la Hessienne de u en (x, y) est dans $\mathcal{S}^-(\mathbb{R})$ donc de trace négative. Or $\text{Tr}(\text{Hess}(u)(x, y)) = \Delta u(x, y) > 0$: contradiction.

2. Soit $u_\varepsilon = u + \varepsilon(x^2 + y^2)$, alors $\Delta u_\varepsilon = \Delta u + 4\varepsilon > 0$ donc $\sup_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \sup_{\overline{\Omega} \setminus \Omega} u_\varepsilon$ puis on fait tendre ε vers 0 et une vérification immédiate montre que $\sup_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon \rightarrow \sup u$.

Solution 188. (Enoncé)

Pour une telle fonction on a $f(0) = 0$, Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} f(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} (f(0) + df(0) \cdot (x\lambda) + o(\lambda)) = df(0) \cdot x + o(1) = df(0) \cdot x$$

Donc f est bien linéaire.

Solution 189. (Enoncé)

On peut écrire $f(M) = (f_1(M), \dots, f_n(M))$ avec $f_i(M) = \text{Tr}(M^i)$. Donc pour $(M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$df(M) \cdot H = (df_1(M) \cdot H, \dots, df_n(M) \cdot H)$$

Or par différentiation des fonctions composées :

$$df_i(M) \cdot H = d(\text{Tr})(M^i) \cdot (d(X \mapsto X^i)(M) \cdot H) = \text{Tr} \left(\sum_{j=0}^{i-1} M^j H M^{i-j-1} \right) = i \text{Tr}(M^{i-1} H)$$

Solution 190. (Enoncé)

1. Il suffit de l'écrire. 2. Si f convexe, alors $\varphi_{x,y}$ l'est aussi donc comme φ dérivable car f différentiable, $\varphi_{x,y}$ est au dessus de ses tangentes *i.e.*

$$\varphi_{x,y}(1) \geq \varphi_{x,y}(0) + \varphi'_{x,y}(0)$$

Comme $\varphi_{x,y}(1) = f(y)$, $\varphi_{x,y}(0) = f(x)$ et $\varphi'_{x,y}(0) = df(x) \cdot (y - x)$ ce qui conclut le sens direct. Inversement, si \star est vérifié pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ alors $\varphi_{x,y}$ est au-dessus de ses tangentes donc est convexe.

Solution 191. (Enoncé)

1. Soit $(x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $t \in \mathbb{R}$, alors quand $t \rightarrow 0$:

$$\|f(x + th) - f(x)\| = \|df(x) \cdot th + o(t)\| \geq th\|$$

D'où le résultat en faisant $t \rightarrow 0$.

2. La fonction $g(x) = \|f(x) - a\|^2$ vérifie $g(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$ donc g admet un minimum en $x \in \mathbb{R}^n$, comme g est différentiable on a $dg(x) = 0$, donc pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $dg(x) \cdot h = 2 \langle df(x) \cdot h, f(x) - a \rangle$. Par la question précédente, $df(x)$ est injective donc bijective car c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\langle y, f(x) - a \rangle = 0$ et finalement $f(x) = a$.

Solution 192. (Enoncé)

Si $b = 0$, alors $a \frac{\partial f}{\partial x} = f$ donc f est de la forme $f(x, y) = g(y)e^{ax}$ donc si $g \neq 0$, il existe y tel que $g(y) \neq 0$ et $g(y)e^{ax}$ n'est pas borné ce qui est exclu donc $g = 0$ et $f = 0$. On suppose maintenant $b \neq 0$ (et $a \neq 0$ par symétrie) et on fait ensuite un changement de variable affine pour se ramener au cas précédent. On pose $f(x, y) = g(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ et :

$$g(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = f(x, y) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = (a\alpha + b\beta) \frac{\partial g}{\partial x} + (a\gamma + b\delta) \frac{\partial g}{\partial y}$$

Donc on peut prendre $\gamma = 1$, $\delta = -\frac{a}{b}$, $\beta = 0$ et $\alpha = 1$ et cela conclut.

Solution 195. (Enoncé)

Montrons que $T_{I_n}(\text{O}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $\gamma(t) = e^{tA}$ est de classe \mathcal{C}^1 , vérifie $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$, de plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t)\gamma(t)^T = e^{t(A+A^T)} = I_n$$

donc $A \in T_{I_n}(\text{O}_n(\mathbb{R}))$. Inversement si $A \in T_{I_n}(\text{O}_n(\mathbb{R}))$, et γ un chemin tracé dans $\text{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\gamma(0) = I_n$, $\gamma'(0) = A$. On a en dérivant l'application constante $\gamma'(t)\gamma(t)^T$ en 0 on a :

$$0 = \gamma'(0)\gamma(0)^T + \gamma(0)\gamma'(0)^T = A + A^T$$

D'où le résultat.

Solution 196. (Enoncé)

Montrons que $T_{I_n}(\text{SL}_n(\mathbb{R})) = \ker(\text{Tr})$. Si $M \in \ker(\text{Tr})$, alors $\gamma(t) = e^{tM}$ est de classe \mathcal{C}^1 , vérifie $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$, de plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \det(\gamma(t)) = e^{t \text{Tr}(M)} = 1$$

donc $M \in T_{I_n}(\text{SL}_n(\mathbb{R}))$. Inversement si $M \in T_{I_n}(\text{SL}_n(\mathbb{R}))$, et γ un chemin tracé dans $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\gamma(0) = I_n$, $\gamma'(0) = M$. En dérivant l'application constante $\text{Tr}(\gamma(t))$ en 0 on a :

$$0 = d(\text{Tr})(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \text{Tr}(M)$$

D'où le résultat.

Solution 197. (Enoncé)

Non, tous les éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ sont d'ordre au plus 2 alors que $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ possède un élément d'ordre 4.

Solution 198. (Enoncé)

Soit $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ un morphisme de groupes, alors $f(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} donc c'est un $n\mathbb{Z}$, soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) = n$, alors $n = f(x) = 2f(\frac{x}{2}) \in 2n\mathbb{Z}$ donc $n = 0$ et f est nul.

Solution 199. (Enoncé)

L'application $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est un isomorphisme de groupes. Par contre \mathbb{R} et \mathbb{R}^* ne sont pas isomorphes, en effet, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ morphisme de groupes alors pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$ donc -1 n'a pas d'antécédents par f .

Solution 200. (Enoncé)

Soit $n = |G_1|$ et $m = |G_2|$, le théorème chinois nous dit que $n \wedge m = 1$ est une condition suffisante pour que $G_1 \times G_2$ soit cyclique, montrons qu'elle est nécessaire. Si $d := n \wedge m > 1$, alors tout élément de $G_1 \times G_2$ est d'ordre au plus $\frac{nm}{d}$:

$$\forall (x, y) \in G_1 \times G_2 \quad (x, y)^{\frac{nm}{d}} = (x^{\frac{nm}{d}}, y^{\frac{nm}{d}}) = ((x^n)^{\frac{m}{d}}, (y^m)^{\frac{n}{d}}) = (e, e)$$

Or par hypothèse, $\frac{nm}{d} < nm = |G_1 \times G_2|$ donc aucun élément de $G_1 \times G_2$ n'est d'ordre nm et $G_1 \times G_2$ n'est pas cyclique.

Solution 201. (Enoncé)

Soit $k \geq 1$ tel que $(xy)^k = e$, alors $x^k = y^{-k} \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$ par le théorème de Lagrange. Donc $x^k = y^k = e$ et $o(x), o(y) \mid k$ donc par Gauss, $o(x)o(y) \mid k$. Comme $(xy)^{o(x)o(y)} = e$ on a bien $o(xy) = o(x)o(y)$

Solution 202. (Enoncé)

Soit g un générateur de G , il suffit de remarquer que $\psi \in \text{Aut}(G)$ est uniquement déterminé par $\psi(g)$. Comme ψ morphisme injectif, $o(\psi(g)) = o(g)$, donc $\psi(g)$ est un générateur de G et il y en a $\varphi(n)$ donc $|\text{Aut}(G)| = \varphi(n)$.

Solution 203. (Enoncé)

1. On a la partition $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \bigcup_{d|n} \{k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \mid o(k) = d\}$. Or un élément $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est d'ordre d si et seulement si il s'écrit $k = l\frac{n}{d}$ et $l \wedge d = 1$, il y en a donc $\varphi(d)$. Donc $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

2. Soit $\Omega_d = \{x \in G \mid o(x) = d\}$ et $\psi(d) = |\Omega_d|$. Si $\Omega_d \neq \emptyset$, alors pour $x \in \Omega_d$, $\langle x \rangle \subset G_d$ mais comme $|G_d| \leq d$ et $|\langle x \rangle| = d$, on a $\langle x \rangle = G_d$. Donc tout élément de Ω_d est un générateur de $\langle x \rangle$, il y a $\varphi(d)$ tels générateurs et donc $|\Omega_d| \in \{0, \varphi(d)\}$. On a alors

$$n = \sum_{d|n} \psi(d) \leq \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

Donc nécessaire l'inégalité est une égalité et $\psi(n) = \varphi(n) > 0$ et G cyclique. 3. Comme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un corps, tout polynôme $X^p - 1$ a au plus p racines, comme 0 n'est clairement pas racine, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ vérifie les hypothèses de l'énoncé et est donc cyclique.

Solution 204. (Enoncé)

1. Supposons $2^n + 1$ premier, on écrit $n = 2^m(2k + 1)$ et $a^n + 1$ divisible par $a^{2k+1} + 1$ donc $k = 0$ et n puissance de 2.

2. On vérifie que $2^{2^n} = 1$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, or $2^{2^n} = -1$ donc $2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2 = 1$. De plus comme q impair car F_n l'est, $1 \neq -1$ et donc $2^{2^n} \neq 1$ et 2 est bien d'ordre 2^{n+1} .

3. Par le théorème de Lagrange, $2^{n+1} = o(2) \mid |(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times| = q - 1$ et cela conclut.

Solution 205. (Enoncé)

1. Pour tout $x \in G$, $x = x^{-1}$ et donc $(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$ et G est commutatif.

2. On vérifie que G est muni d'une structure de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -espace vectoriel par $\lambda \cdot x = x^\lambda$, comme G est fini, G est de dimension finie en tant que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ espace vectoriel et en notant n cette dimension on a $G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Solution 206. (Enoncé)

Soit G un tel groupe, alors tous les éléments de G sont d'ordres finis. En effet, si ce n'était pas le cas G posséderait un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z} qui possède une infinité de sous-groupes. Donc tous les sous-groupes monogènes de G sont finis, or $G = \bigcup_{x \in G} \langle x \rangle = \bigcup_{\text{finie}} \langle x \rangle$ est fini.

Solution 207. (Enoncé)

1. La réflexivité est immédiate. Pour la symétrie, si $(y_1, \dots, y_p) = (x_k, \dots, x_p, x_1, \dots, x_{k-1})$ alors $(x_1, \dots, x_k) = (y_{p-k}, \dots, y_p, y_1, \dots, y_{p-k-1})$. Pour la transitivité, si $(z_1, \dots, z_p) = (y'_k, \dots, y_p, y_1, \dots, y_{k'-1})$ et $(y_1, \dots, y_p) = (x_k, \dots, x_p, x_1, \dots, x_{k-1})$ alors $(z_1, \dots, z_p) = (x''_k, \dots, x_p, x_1, \dots, x_{k''-1})$ où k'' est le reste de la division euclidienne de $k + k'$ par p .

2. Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$, si $x_i = x_j$ pour tout i, j alors il est clair que la classe d'équivalence de x est de cardinal 1. Sinon, il existe $i \neq j$ tel que $x_i \neq x_j$ et donc tous les $(x_k, \dots, x_p, x_1, \dots, x_{k-1})$ sont distincts et donc la classe d'équivalence est de cardinal p .

3. Il suffit de montrer que E est de cardinal n^{p-1} , c'est clair car l'application $G^{p-1} \rightarrow E$ $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_p, (x_1 \times \dots \times x_p)^{-1})$ est une bijection.

4. Comme $p \mid n$, $p \mid s$ et comme $s \geq 1$ car (e, \dots, e) a une classe d'équivalence de cardinal 1, on a $s \geq 2$ et un élément $x \neq e$ qui a une classe de cardinal 1 est d'ordre p .

Solution 208. (Enoncé)

1. On sait que \mathfrak{S}_n est engendré par les transpositions. Donc tout éléments $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ est engendré produit d'un nombre pairs de transpositions, il suffit donc de voir que tout produits de deux transpositions est un produit de 3 cycles, et on vérifie que pour (a, b, c, d) distincts :

$$(ab)(bc) = (acb) \text{ et } (ab)(cd) = (abd)(acd)$$

2. Deux 3-cycles sont conjugués dans \mathfrak{S}_n pour $n \geq 3$ par le cours. Si $n \geq 5$, quitte à composer la "permutation de passage" par $\tau = (ab)$ où a, b n'est pas le support d'un 3-cycle (possible car $n \geq 5$), on peut supposer la

permutation de passage dans \mathfrak{A}_n .

3. Comme $\varepsilon(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) = 1$, il est clair que $D(\mathfrak{A}_n) \subset D(\mathfrak{S}_n) \subset \mathfrak{A}_n$. Soit $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ un 3-cycle, alors σ^2 est aussi un 3-cycle et donc il existe $\tau \in \mathfrak{A}_n$ tel que $\sigma^2 = \tau\sigma\tau^{-1}$ i.e. $\sigma = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \in D(\mathfrak{A}_n)$. Comme les 3-cycles engendrent \mathfrak{A}_n , on a $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ et cela conclut.

Solution 209. (Enoncé)

1. C'est du cours.

2. On cherche P sous la forme $P = S^{-1}Q$, la matrice Q doit alors vérifier, $Q^T(S^{-1})^TAS^{-1}Q = I_n$ et $Q^TS^{-1}BS^{-1}Q = D$ i.e. $Q^TQ = I_n$ et $Q^T(S^{-1}BS^{-1})Q = D$. Comme la matrice $S^{-1}BS^{-1}$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée ce qui donne l'existence de Q .

3. On prend P donné par la question précédente, comme $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $S^{-1}BS^{-1}$ aussi et donc $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est à coefficients strictement positifs. On a donc,

$$\begin{aligned} \log(\det(\alpha A + (1 - \alpha)B)) &= \log(\det((P^T)^{-1} \det(\alpha I_n + (1 - \alpha)D) \det(P^{-1})) \\ &= \log(\det(P^{-2})) + \sum_{i=1}^n \log(\alpha \times 1 + (1 - \alpha)\lambda_i) \\ &\geq \log(\det(S^2)) + \sum_{i=1}^n \alpha \log(1) + (1 - \alpha) \log(\lambda_i) \\ &\geq \log(\det(A)) + (1 - \alpha) \log(\det(D)) \end{aligned}$$

Par concavité du logarithme. Par passage à l'exponentielle :

$$\det(\alpha A + (1 - \alpha)B) \geq \det(A) \det(D)^{1-\alpha} = \det(A) \det(BP^2)^{1-\alpha} = \det(A)^\alpha \det(B)^{1-\alpha}.$$

Solution 210. (Enoncé)

\implies Ecrivons $A = PDP^T$ avec P orthogonale et D diagonale, pour $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(BA) = \text{Tr}(BPDP^T) = \text{Tr}(P^T BPD)$. Or $M \mapsto P^T M P$ est une bijection de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ sur lui même, donc on peut supposer A diagonale. Donc pour $B = QD'Q^T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\text{Tr}(BD) = \sum_{i=1}^n b_{i,i} d_i \geq 0$$

Car $d_i \geq 0$ et $b_{i,i} = X_i^T B X_i \geq 0$ ou X est le vecteur avec que des 0 sauf un 1 en i -ème position.

\Leftarrow Comme précédemment, on peut supposer A diagonale, il reste à montrer $d_i \geq 0$ en gardant les notations précédentes. Or si on prend $B_i = \text{Diag}(0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est en position i , alors $\text{Tr}(B_i A) = d_i \geq 0$

Solution 211. (Enoncé)

Sens direct: Si A est semblable à $-A$ alors $\text{Tr}(A) = -\text{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) = 0$.

Sens réciproque: Le polynôme caractéristique de A est de la forme $\chi_A = X^3 + aX$ avec $a \in \mathbb{C}$. Plusieurs cas se présentent :

Premier cas : $a \neq 0$ Alors en notant δ et $-\delta$ les deux racines distinctes de a dans \mathbb{C} on a $\chi_A = X(X - \delta)(X + \delta)$

et donc A est diagonalisable sur \mathbb{C} et semblable à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix}$ Donc $-A$ est semblable à $-D =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$. or D et $-D$ sont semblables, il suffit d'échanger les deux derniers vecteurs de bases, ce qui se

traduit par une matrice de passage qui vaut $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Second cas: $a = 0$ on a alors $\chi_A = X^3$ et donc A est nilpotente.

Si $A = 0$ il n'y a rien à faire.

Si $A^2 = 0$ et $A \neq 0$ alors A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $-A$ aussi car A et $-A$ ont le même indice de

nilpotence.

Si $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$ alors A et $-A$ sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution 212. (Enoncé)

Soit $A \in \text{Ker}(\Phi)$, on peut écrire $A = I_n + pB$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Comme $A \in G$ et G fini, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$. A est donc diagonalisable dans \mathbb{C} et ses valeurs propres sont des racines de l'unité,

écrivons $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$. On a alors $B = \frac{A - I_n}{p} = P \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 - 1}{p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\lambda_n - 1}{p} \end{pmatrix} P^{-1}$ et donc

$B^q = P \begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda_1 - 1}{p}\right)^q & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \left(\frac{\lambda_n - 1}{p}\right)^q \end{pmatrix} P^{-1}$. On a pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\left| \frac{\lambda_i - 1}{p} \right| \leq \frac{2}{3} < 1$ donc $B^q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$.

Comme $B^q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que $B^{q_0} = 0$, B est une matrice nilpotente diagonalisable donc $B = 0$ et $A = I_n$ et Φ est bien injective.

Un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ s'identifie donc à un sous-groupe de $\text{GL}_3(\mathbb{F}_3)$, comme ce dernier groupe n'admet qu'un nombre fini de sous-groupes, cela conclut.

Solution 213. (Enoncé)

Comme f est décroissante et intégrable, elle tend vers 0 en $+\infty$, comme elle est décroissante on en déduit qu'elle est positive. La décroissance de f nous invite à faire une comparaison série/intégrale. Soit $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a par décroissance de f :

$$\int_{nt}^{nt+t} f(x) dx \leq t f(nt) \leq \int_{nt-t}^{nt} f(x) dx$$

En sommant ces inégalités de 1 à $+\infty$ on a :

$$\int_t^\infty f(x) dx \leq t S(t) \leq \int_0^\infty f(x) dx$$

Donc S est bien définie et on a l'équivalent $S(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t} \int_0^\infty f(x) dx$

Soit $S(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{e^{tx} - 1} dx$, alors :

$$S(t) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \sin(x) e^{-ntx} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \sin(x) e^{-ntx} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1 + (nt)^2} = \sum_{n=1}^\infty f(nt).$$

Avec $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La permutation est possible car :

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty |\sin(x)| e^{-ntx} dx \leq \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x e^{-ntx} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{n^2 t^2} < \infty$$

La fonction f vérifiant les hypothèses de l'énoncé, l'équivalent recherché vaut donc :

$$S(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2t}$$

Solution 214. (Enoncé)

Soit $|x| < 1$, la fonction $f : t \mapsto \frac{1-t^x}{1-t}$ est continue sur $[0, 1[$ et $f(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} x$ donc f se prolonge par continuité

sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 f(t) dt$ converge. Comme $|\zeta(n)| \leq \zeta(2)$ pour $n \geq 2$, la seconde série converge absolument. On peut maintenant écrire :

$$\sum_{n=2}^\infty (-1)^n \zeta(n) x^{n-1} = \sum_{n=2}^\infty \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^n x^{n-1}}{k^n} = \sum_{k=1}^\infty -\frac{1}{k} \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left(\frac{x}{k}\right)^n = \sum_{k=1}^\infty -\left(\frac{1}{k}\right) \left(-\frac{x}{k}\right) \frac{1}{1 + \frac{x}{k}} = \sum_{k=1}^\infty \frac{x}{k(x+k)}$$

La permutation des sommes est licite car $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{k^{n+1}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|}{k(k-x)} < +\infty$. De même,

$$\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (t^n - t^{n+x}) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+x)}$$

Solution 215. (Enoncé)

1. Les axiomes d'homogénéité et d'inégalité triangulaires sont toujours vérifiés. Montrons que la CNS est : $\varphi^{-1}(\{0\})$ ne contient aucun intervalle non trivial. C'est une condition nécessaire car si $\varphi^{-1}(\{0\})$ contient un intervalle $I =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ alors il est facile de construire une fonction f continue nulle en dehors de I et non nulle en a . On a alors $N(f) = 0$ mais $f \neq 0$. Inversement, cette condition suffit car si $f \neq 0$, il existe $J =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset [0, 1]$ tel que $f(y) \neq 0$ sur J et par hypothèse, il existe $y \in J$ tel que $\varphi(y) \neq 0$ et donc $N(f) \neq 0$.

2. Il est clair que $N(f) \leq \|\varphi\|_{\infty} \|f\|_{\infty}$. Montrons que N et $\|\cdot\|_{\infty}$ sont équivalentes si et seulement si $\min_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)| > 0$. C'est clairement une condition suffisante. Inversement, si φ s'annule en $x \in [0, 1]$ alors pour tout $n \geq 1$, il existe $\varepsilon_n > 0$ tel que $|\varphi(y)| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $y \in J_n :=]x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n[$, on construit alors une suite de fonctions continues f_n telles que $f_n(y) = 0$ pour $y \notin J_n$ et $\|f_n\|_{\infty} = 1$. On a alors $N(f_n) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\|f_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc N et $\|\cdot\|_{\infty}$ ne sont pas équivalentes.

Solution 216. (Enoncé)

On note $\text{Sp}(A) \cup \text{Sp}(B) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ avec les (α_i) tous distincts. Pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ on note n_i la multiplicité (éventuellement nulle) de α_i dans χ_A et m_i dans χ_B .

L'hypothèse se traduit en : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^r n_i \alpha_i^k = \sum_{i=1}^r m_i \alpha_i^k$ soit encore $\sum_{i=1}^r (n_i - m_i) \alpha_i^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc en particulier pour tout $k \in \llbracket 0; r-1 \rrbracket$.

On a donc le système linéaire $V \times N = 0$ avec :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{r-1} & \cdots & \alpha_r^{r-1} \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} n_1 - m_1 \\ \vdots \\ n_r - m_r \end{pmatrix}$$

La matrice V est une matrice de Vandermonde inversible car tous les (α_i) sont distincts deux à deux donc $N = 0$ et cela conclut.

2. On utilise la question précédente, en montrant que pour tout $p \geq 1$ et $t \geq 0$, $\text{Tr}(A(t)^p) = \text{Tr}(A(0)^p)$. Soit $p \geq 1$, l'application $t \mapsto A(t)^p$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ de dérivée :

$$t \mapsto A'(t)A(t)^p + A(t)A'(t)A(t)^{p-1} + \cdots + A(t)^p A'(t)$$

Donc $\frac{d}{dt} \text{Tr}(A(t)^p) = \text{Tr}(pA'(t)A(t)^p) = p \text{Tr}(A(t)A'(t)A(t)^p) - p \text{Tr}(A'(t)A(t)^p) = 0$ d'où le résultat.