

## FEUILLES D'EXERCICES N°3

### Déterminants

#### 1. EXERCICES

**Exercice 1.** (Solution)

A l'aide de la formule, pouvez-vous dire si le déterminant suivant est a priori entier ?  
Divisible par 2 ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 10 \\ 9 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

**Exercice 2.** (Solution)

Soient  $n \geq 2$  un entier,  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$  et  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ .

On pose  $A = (a_i b_j)_{1 \leq i, j \leq n} = (x_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

- (1) Calculer  $\det(A)$  en utilisant la formule du déterminant.
- (2) Retrouver ce résultat en utilisant le fait que le déterminant est une forme multilinéaire alternée.
- (3) Retrouver ce résultat en montrant que  $A$  est de rang au plus 1.

**Exercice 3.** (Solution)

Donner sans calcul, les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** (Solution)

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5. (Solution)**

Calculer le déterminant de la matrice  $A$  de taille  $n \geq 3$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 6. (Solution)**

Montrer que la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 3 & -2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x-1 & 0 & 2 & -3 \\ 2x+1 & 3 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

est polynomiale de degré inférieur ou égal à deux. Trouver des racines évidentes. Conclure.

**Exercice 7. (Solution)**

Montrer que le système linéaire suivant admet une unique solution dans  $\mathbb{Q}^3$  :

$$\begin{cases} 3x - 2y & = 6 \\ -x + 5y + 2z & = -1 \\ 4y - z & = 2 \end{cases}$$

**Exercice 8. (Solution)**

Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  non nul. On note  $\mathcal{D}$  la droite engendrée par  $\vec{u}$ . Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur quelconque. Traduire avec un déterminant la propriété :  $\vec{v} \in \mathcal{D}$ . En déduire une équation de la droite  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 9. (Solution)**

Soient  $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  non colinéaires. On note  $\mathcal{P}$  le plan engendré par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Soit  $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  un vecteur quelconque. Traduire avec un déterminant la propriété :  $\vec{w} \in \mathcal{P}$ . En déduire une équation de  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 10. (Solution)**

Soit  $K$  un corps quelconque, et soit  $n$  un entier positif. Soit  $(z_0, \dots, z_n) \in K^{n+1}$ . On veut calculer le déterminant

$$V(z_0, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & \dots & z_0^n \\ 1 & z_1 & \dots & z_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^n \end{vmatrix}$$

- (1) Que vaut  $V(z_0, \dots, z_n)$  s'il existe deux indices  $i < j$  tels que  $z_i = z_j$  ?  
On suppose désormais les  $z_i$  deux à deux distincts.
- (2) On suppose  $n \geq 1$ . On définit le polynôme  $P(X) = V(z_0, \dots, z_{n-1}, X)$ .
  - (a) Justifier que  $\deg(P) \leq n$ . Que vaut le coefficient dominant de  $P$  ?
  - (b) En utilisant la question 1), factoriser  $P$  puis en déduire une relation entre  $V(z_0, \dots, z_{n-1})$  et  $V(z_0, \dots, z_n)$ .
- (3) En déduire par récurrence la formule suivante :

$$V(z_0, \dots, z_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i)$$

- (4) *Application.* Soient  $(z_0, \dots, z_n) \in K^{n+1}$  deux à deux distincts et  $(w_0, \dots, w_n) \in K^{n+1}$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in K[X]$  de degré au plus  $n$  tel que  $P(z_i) = w_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

### Exercice 11. (Solution)

Soient un entier  $n \geq 1$ ,  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{2n}$  tels que pour tous  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $a_i + b_j \neq 0$ . On veut calculer le déterminant :

$$\mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

- 1) Que vaut  $\mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$  s'il existe deux indices  $0 \leq i < j \leq n$  avec  $a_i = a_j$  ou  $b_i = b_j$  ? On suppose désormais que les  $a_i$  sont tous deux à deux distincts, de même que les  $b_i$ .
- 2) On suppose  $n \geq 2$  et on définit la fonction  $f : \mathbb{C} \setminus \{-a_1, \dots, -a_n\} \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f(z) = \mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_n, z)$ .

- (1) Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-a_1, \dots, -a_n\}$ , on a  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  où  $P(X)$  est un polynôme de degré au plus  $n-1$  et  $Q(X) = \prod_{i=1}^n (X + a_i)$ .
- (2) Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  (éventuellement nul) tel que  $P(X) = \alpha \prod_{i=1}^{n-1} (X - b_i)$ .
- (3) Calculer de deux manières différentes  $\lim_{z \rightarrow -a_n} (z + a_n) f(z)$ . En déduire une expression de  $\alpha$  en fonction de  $\mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$ .

- 3) En déduire par récurrence une formule pour  $\mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ .

### Dériver un déterminant

#### Exercice 12. (Solution)

Soient  $a_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (pour  $1 \leq i, j \leq n$ ) des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , et  $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ . Montrer que la fonction  $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $d(x) = \det A(x)$  est dérivable et que sa dérivée est

$$\begin{aligned} d'(x) &= \det(A'_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x)) + \cdots + \det(A_1(x), A_2(x), \dots, A'_n(x)) \\ &= \operatorname{tr}(A'(x)^t \operatorname{com}(A(x))), \end{aligned}$$

où  $A_i$  désigne la  $i$ -ième colonne de  $A$ .

**Exercice 13.** (Solution)

Pour  $x \in \mathbb{R}$  et un entier  $n \geq 1$ , on considère le déterminant  $n \times n$  suivant

$$a_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix}.$$

- 1) Trouver une relation de récurrence reliant  $a'_n(x)$  et  $a_{n-1}(x)$  si  $n \geq 2$ , puis calculer  $a_n(x)$  pour tout  $x$  et pour tout  $n \geq 1$ .
- 2) En utilisant les propriétés du déterminant, retrouver ce résultat sans recours à la dérivation.

**L'anneau des matrices****Exercice 14.** (Solution)

On rappelle que  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$  est un anneau.

- (1) Est-il commutatif ? Quels en sont les éléments inversibles ?
- (2) Montrer que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  sont des sous-anneaux de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Caractériser dans chaque cas le groupe des inversibles.

**Exercice 15.** (Solution)

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente, c'est-à-dire telle qu'il existe un entier  $k \geq 1$  avec  $A^k = 0$ .

- 1) Montrer que  $\det A = 0$ .
- 2) Prouver que  $I_n - tA$  est inversible pour tout  $t \in \mathbb{C}$ .
- 3) Montrez que  $\det(I_n - XA) \in \mathbb{C}[X]$ , puis, en utilisant la question précédente, que  $\det(I_n - XA) = 1$ .

## 2. SOLUTIONS

### Solution 1. (Enoncé)

La formule du déterminant est  $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^4 a_{i,\sigma(i)}$ . Comme  $a_{i,\sigma(i)} \in \mathbb{Z}$  pour tout  $1 \leq i \leq 4$  et  $\varepsilon(\sigma) \in \mathbb{Z}$ , le déterminant est bien entier. Pour la seconde question, on remarque que dans la troisième colonne, tous les éléments sont divisibles par 2. Donc en utilisant la formule suivante pour le déterminant :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^4 a_{\sigma(i),i}$$

alors pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ ,  $a_{\sigma(3),3}$  est pair et donc pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ ,  $\prod_{i=1}^4 a_{\sigma(i),i}$  est pair et donc  $\det(A)$  est pair.

### Solution 2. (Enoncé)

1. La formule du déterminant est  $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ . Or pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $x_{i,\sigma(i)} = a_i b_{\sigma(i)}$  d'où :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)}.$$

Or pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,

$$\prod_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} = \prod_{i=1}^n a_i \prod_{i=1}^n b_{\sigma(i)} = \prod_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^n b_j,$$

car  $\prod_{i=1}^n b_{\sigma(i)} = \prod_{j=1}^n b_j$  par le changement d'indice  $j = \sigma(i)$ , licite car  $\sigma$  est une bijection de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  dans lui-même. On a alors :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left( \prod_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^n b_j \right) = \prod_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^n b_j \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)}_{=0} = 0,$$

d'après l'exercice 13 du TD1.

2. Posons  $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ , alors les colonnes de  $A$  sont  $b_1 C, b_2 C, \dots, b_n C$ . Donc,

$$\det(A) = \det(b_1 C, \dots, b_n C) = \left( \prod_{i=1}^n b_i \right) \det(C, \dots, C)$$

par multilinéarité du déterminant. De plus  $\det(C, \dots, C) = 0$  car  $n \geq 2$  et le fait que le déterminant soit une forme alternée.

3. Toutes les colonnes de  $A$  sont proportionnelles à  $C$ , comme le rang de  $A$  est la dimension de l'espace engendré par ses colonnes, les colonnes étant toutes proportionnelles à  $C$ , la dimension vaut donc au plus 1 (1 si  $C \neq 0$  et il existe un  $a_i$  non nul, 0 sinon), donc  $A$  est de rang au plus 1 donc  $A$  n'est pas inversible car  $A$  est de taille supérieur à 2 et donc  $\det(A) = 0$ .

### Solution 3. (Enoncé)

Dans la première matrice, la deuxième colonne est proportionnelle à la première, donc le déterminant est nul.

Dans la deuxième matrice, la première colonne est égale à la 4ème donc le déterminant est nul. On peut aussi dire que la somme des 3 premières lignes vaut la 4ème.

Dans la troisième matrice, on voit qu'en permutant les colonnes selon la permutation  $\sigma = (1\ 4\ 3)$  on obtient une matrice triangulaire supérieure qui est :

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par les propriétés du déterminant :

$$\det(A_\sigma) = \varepsilon(\sigma) \det(A) = \det(A)$$

et  $\det(A_\sigma) = 4 \times (-1) \times 3 \times 2 = -24$  car le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit des éléments sur la diagonale.

**Solution 4.** (Enoncé)

Il est *a priori* difficile de faire apparaître des zéros sur les lignes ou les colonnes par opération élémentaires, comme c'est un déterminant  $3 \times 3$ , on peut le développer brutalement selon la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} + c(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix} + b(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix},$$

ce qui donne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a(a^2 - bc) - c(ab - c^2) + b(b^2 - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

On ajoute la première ligne à tous les autres, on obtient alors le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

où l'on a développé par rapport à la première colonne. Dans ce déterminant  $3 \times 3$ , on fait  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$  pour obtenir :

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 16$$

donc le déterminant recherché vaut  $-16$ .

Remarque : Pour ce dernier déterminant  $3 \times 3$ , on pouvait remarquer que c'était un cas particulier du précédent avec  $a = 0$ ,  $b = c = 2$ .

On fait l'opération élémentaire  $L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1$  pour obtenir le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -16 & 12 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} -16 & 12 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 16 - 12 = 4.$$

après avoir développé selon la première colonne.

**Solution 5.** (Enoncé)

On développe le déterminant par rapport à la première ligne, il vient alors :

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}.$$

Donc,

$$\det(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Solution 6.** (Enoncé)

En développant le déterminant selon la première colonne, on voit que  $f(x)$  est de la forme :

$$f(x) = ax + bx^2 + c(x - 1) + d(2x + 1),$$

avec  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  et donc  $f$  est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. De plus  $f(1) = 0$  car dans ce cas la première et deuxième colonne sont identiques. De même,  $f(3) = 0$  car la première et troisième colonnes sont identiques. Enfin,  $f(-2) = 0$  car la première et la quatrième colonnes sont identiques, donc  $f$  admet 3 racines alors que  $\deg(f) \leq 2$  et finalement  $f = 0$ .

**Solution 7.** (Enoncé)

Le système est de la forme  $AX = Y$  avec  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Il admet une unique solution dans  $\mathbb{Q}^3$  si et seulement si  $A \in \text{GL}_3(\mathbb{Q})$  i.e.  $\det(A) \neq 0$ . Or,

$$\det(A) \stackrel{L_1 \leftrightarrow L_1 + 3L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 13 & 6 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(-1) \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -37 \neq 0.$$

Donc le système admet bien une unique solution dans  $\mathbb{Q}^3$ .

**Solution 8.** (Enoncé)

Le vecteur  $\vec{v}$  appartient à  $\mathcal{D}$  si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  si et seulement si  $\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 0$ . Une équation de la droite  $\mathcal{D}$  est donc  $ay - bx = 0$ .

**Solution 9.** (Enoncé)

Le vecteur  $\vec{w}$  appartient à  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $\vec{w} \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$  si et seulement si la famille  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est liée (c'est ici qu'intervient l'hypothèse  $(\vec{u}, \vec{v})$  libre) si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a & a' & x \\ b & b' & y \\ c & c' & z \end{vmatrix} = 0$$

En développant le déterminant par rapport à la troisième colonne, une équation de  $\mathcal{P}$  est :

$$x(bc' - cb') - y(ac' - ca') + z(ab' - ba') = 0$$

**Solution 10.** (Enoncé)

(1) S'il existe deux indices  $i < j$  tels que  $z_i = z_j$ , alors les colonnes  $i$  et  $j$  dans  $V(z_0, \dots, z_n)$  sont égales et donc  $V(z_0, \dots, z_n) = 0$ .

(2) (a) En développant  $V(z_0, \dots, z_{n-1}, X)$  selon la dernière ligne, on voit que

$$V(z_0, \dots, z_{n-1}, X) = \sum_{i=0}^r a_i X^i$$

donc  $P(X)$  est bien un polynôme de degré inférieur à  $n$ .

(b) Par la question (1), le polynôme  $P$  admet  $z_0, \dots, z_{n-1}$  pour racines, donc comme  $P$  est de degré inférieur à  $n$ , il vient  $P = \lambda \prod_{i=0}^{n-1} (X - z_i)$ . Or en développant selon la dernière ligne, on voit que le coefficient dominant de  $P$  est de la forme  $(-1)^{n+1+n+1} V(z_0, \dots, z_{n-1})$ , donc  $P = V(z_0, \dots, z_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (X - z_i)$  et finalement :

$$V(z_0, \dots, z_n) = P(z_n) = V(z_0, \dots, z_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (z_n - z_i).$$

(3) Le cas  $n = 0$  est immédiat. On suppose le résultat vrai à un rang  $n \geq 0$ . Alors par la question (2)(b) et par hypothèse de récurrence il vient :

$$\begin{aligned} V(z_0, \dots, z_n) &= P(z_n) \\ &= V(z_0, \dots, z_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (z_n - z_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (z_n - z_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i). \end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie car :

$$\{(i, j) \mid 0 \leq i < j \leq n\} = \{(i, j) \mid 0 \leq i < j \leq n-1\} \cup \{(i, n) \mid 0 \leq i \leq n-1\},$$

d'où l'hérédité et cela termine la récurrence.

(4) Ecrivons  $P$  de la forme  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et cherchons un système linéaire vérifié par les  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ . De l'égalité :

$$P(z_i) = \sum_{k=0}^n a_k z_i^k = w_i$$

On voit que les  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$  vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_n z_0^n = w_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 z_n + \dots + a_n z_n^n = w_n \end{cases}$$

Ce système linéaire se met sous la forme  $VA = W$  avec  $V = (z_i^j)_{0 \leq i, j \leq n}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  et

$W = \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ . La matrice  $V$  est inversible car  $\det(V) = V(z_0, \dots, z_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i)$

$z_i) \neq 0$  car les  $z_i$  sont distincts. Donc le système admet une unique solution et c'est exactement la conclusion voulue.

**Solution 11.** (Énoncé)

1) Si  $a_i = a_j$  avec  $i \neq j$ , alors les lignes  $L_i$  et  $L_j$  sont égales donc le déterminant  $C(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$  est nul. De même, si  $b_i = b_j$  pour  $i \neq j$ , alors les colonnes  $C_i$  et  $C_j$  sont égales et le déterminant  $C(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$  est là encore nul.

2) (1) On développe le déterminant  $C(a_1, b_1, \dots, a_n, z)$  selon la dernière colonne, alors on en déduit que  $f$  est de la forme :

$$f(z) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{z + a_i}, \quad x_i \in \mathbb{C}.$$

En mettant cette somme au même dénominateur, on peut écrire  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  avec  $Q(X) = \prod_{i=1}^n (X + a_i)$  et :

$$P(X) = \sum_{j=1}^n x_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (X + a_i)$$

est bien un polynôme de degré au plus  $n - 1$ .

(2) Si l'on regarde  $f(b_i)$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$ , alors les colonnes  $C_i$  et  $C_n$  sont égales donc le déterminant est nul. Donc  $f(z_i) = \frac{P(b_i)}{Q(b_i)} = 0$  i.e.  $P(b_i) = 0$ . Le polynôme  $P$  est de degré au plus  $n - 1$  et l'on connaît  $n - 1$  racines de  $P$ , on peut donc écrire  $P = \alpha \prod_{i=1}^{n-1} (X - b_i)$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

(3) D'une part,

$$(z + a_n)f(z) = (z + a_n) \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\alpha \prod_{i=1}^{n-1} (z - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (z + a_i)} \xrightarrow{z \rightarrow -a_n} \frac{\alpha \prod_{i=1}^{n-1} (-a_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (-a_n + a_i)},$$

d'autre part :

$$(z + a_n)f(z) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i(z + a_n)}{z + a_i} + x_n \xrightarrow{z \rightarrow -a_n} x_n.$$

Or en développant selon la dernière colonne, le coefficient  $x_n$  vaut :

$$(-1)^{n+n} \mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}) = \mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$$

donc par unicité de la limite,

$$\mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}) = \frac{\alpha \prod_{i=1}^{n-1} (-a_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (-a_n + a_i)},$$

soit encore :

$$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (-a_n + a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (-a_n - b_i)} \mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}).$$

(4) On remarque que  $f(b_n) = \mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ , donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) &= f(b_n) \\ &= \alpha \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n + a_i)} \\ (\star) \quad &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n + a_i)} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (-a_n + a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (-a_n - b_i)} \mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}). \end{aligned}$$

On va montrer par récurrence sur  $n \geq 2$  que :

$$\mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

Le cas  $n = 2$  est facile à vérifier en faisant un calcul de déterminant  $2 \times 2$ . Supposons alors le résultat vrai au rang  $n - 1$  et montrons le au rang  $n$ . Par la formule de récurrence ( $\star$ ), il vient :

$$\mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) \prod_{i=1}^{n-1} (-a_n + a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n + a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (-a_n - b_i)} \mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$$

d'où en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) \prod_{i=1}^{n-1} (-a_n + a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n + a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (-a_n - b_i) \prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n + a_i) (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_i) \prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n + a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_i) \prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)} \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)} \end{aligned}$$

d'où l'hérédité, cela termine la récurrence et la question.

**Solution 12.** (Enoncé)

Par définition, le déterminant de  $A$  est  $d(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}(x)$  qui est une somme de produits de fonctions dérivables donc est bien dérivable sur  $\mathbb{R}$ . La dérivée étant linéaire, il vient :

$$d'(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left( \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}(x) \right)'$$

Or pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on peut montrer par récurrence sur  $n$  que :

$$\left( \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}(x) \right)' = \sum_{j=1}^n a'_{j, \sigma(j)}(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_{i, \sigma(i)}(x),$$

donc,

$$\begin{aligned} d'(x) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{j=1}^n a'_{j, \sigma(j)}(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_{i, \sigma(i)}(x) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a'_{1, \sigma(1)}(x) \prod_{i=2}^n a_{i, \sigma(i)}(x) + \dots + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a'_{n, \sigma(n)}(x) \prod_{i=1}^{n-1} a_{i, \sigma(i)}(x) \\ &= \det(A'_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x)) + \dots + \det(A_1(x), A_2(x), \dots, A'_n(x)), \end{aligned}$$

ce qui donne la première expression.

Pour obtenir la seconde expression, on rappelle que le coefficient d'indice  $(i, j)$  de la matrice  ${}^t \text{com}(A(x))$  est  $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(x)$  où  $\Delta_{i,j}(x)$  est le déterminant obtenu en retirant la

$i$ -ème ligne et  $j$ -ème colonne de  $A(x)$ . On développe chaque déterminant selon la colonne qui est déjà dérivée, on obtient alors :

$$\begin{aligned} d'(x) &= \sum_{i=1}^n a'_{i,1}(x)(-1)^{i+1}\Delta_{i,1}(x) + \cdots + \sum_{i=1}^n a'_{i,n}(x)(-1)^{i+n}\Delta_{i,n}(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a'_{i,j}(x)(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(x) \\ &= \text{tr} (A'(x)^t \text{com}(A(x))). \end{aligned}$$

et cela conclut.

**Solution 13.** (Enoncé)

1. En utilisant la première expression de l'exercice précédent il vient :

$$a'_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a une somme de  $n$  déterminants, on développe le  $i$ -ème déterminant selon la  $i$ -ème

colonne. Cette  $i$ -ème est de la forme  $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  où le 1 est en  $i$ ème position. On a donc :

$$a'_n(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+i} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix}_{(n-1)} = na_{n-1}(x).$$

On calcule,  $a_1(x) = 1+x$ ,  $a_2(x) = (1+x)^2 - 1 = x^2 + 2x$ . On montre alors par récurrence sur  $n$  que  $a_n(x) = x^n + nx^{n-1}$ .

2. Si la première colonne reçoit la somme de toutes les autres alors on obtient :

$$a_n(x) = \begin{vmatrix} n+x & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ n+x & 1+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n+x & \cdots & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix} = (n+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

en utilisant la multilinéarité du déterminant. On retranche maintenant la première ligne à toutes les autres on a :

$$\begin{aligned}
 a_n(x) &= (n+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \\
 &= (n+x)(-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} (n+x)x^{n-1} \\
 &= x^n + nx^{n-1}.
 \end{aligned}$$

**Solution 14.** (Enoncé)

1. Si  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$  est un anneau commutatif. Pour  $n \geq 2$ , cet anneau n'est pas commutatif car par exemple (dans le cas  $n = 2$ )  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ne commutent pas. On adapte facilement cet exemple au cas général. Les éléments inversibles de cet anneau sont les matrices de déterminants non nul.

2. La matrice  $I_n$  est dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ . Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})^2$ , alors  $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$  et  $A - B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$  et donc  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$  est bien un sous-anneau de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On montre de même que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  est un sous-anneau de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On rappelle que si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de déterminant non nul, alors l'inverse de  $M$  est donné par :

$$(\star) \quad M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t \text{com}(M).$$

Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ , alors il est clair que cet inverse est dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$  et donc

$$\text{GL}_n(\mathbb{Q}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}) \mid \det(M) \neq 0\}$$

Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ , ce n'est pas sur que cet inverse est dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . Par exemple si

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

alors

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ .

Montrons alors que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^\times = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \det(M) = \pm 1\}$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^\times$ , alors il existe  $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telle que  $M'M = I_n$ . Alors en prenant le déterminant il vient :

$$\det(MM') = \underbrace{\det(M)}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\det(M')}_{\in \mathbb{Z}} = 1$$

Donc nécessairement  $\det(M) = \pm 1$ . Inversement, si  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  vérifie  $\det(M) = \pm 1$  alors la formule  $(\star)$  assure que  $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  et donc  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^\times$ .

Remarque : Si  $A$  est un anneau commutatif, on peut montrer que  $(\mathcal{M}_n(A), +, \times)$  est un anneau. En faisant le même raisonnement que précédemment, on peut montrer que  $\text{GL}_n(A) := \mathcal{M}_n(A)^\times = \{M \in \mathcal{M}_n(A) \mid \det(M) \in A^\times\}$ .

**Solution 15.** (Enoncé)

1. Il suffit d'écrire :

$$\det(A)^k = \det(A^k) = \det(0) = 0$$

et donc  $\det(A) = 0$ .

2. Soit  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que  $(I_n - tA)X = 0$ , alors  $tAX = X$ . Si  $X \neq 0$ , il existe un entier  $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$  tel que  $A^i X = 0$  et  $A^{i-1} X \neq 0$ , alors en composant par  $A^{i-1}$  dans la relation  $tAX = X$  il vient  $0 = A^{i-1} X$  : contradiction. Donc  $X = 0$  et  $I_n - tA$  inversible.

3. En utilisant la formule du déterminant  $\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i, \sigma(i)}$  il est clair que  $P := \det(I_n - XA) \in \mathbb{C}[X]$ . Si  $\deg(P) \geq 1$ , alors par le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, il existe  $t \in \mathbb{C}$  tel que  $P(t) = 0$  i.e.  $I_n - tA$  non inversible, ce qui contredit la question 2. Donc  $\deg(P) \leq 0$  et comme  $P(0) = 1$  il vient  $P = 1$ .