

## FEUILLES D'EXERCICES N°4

### Révisions d'algèbre linéaire

#### 1. EXERCICES

##### Exercice 1. (Solution)

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  est  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (1) Calculer  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$ ,  $f(e_1 + e_2)$ .
- (2) On se donne la base  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$  où  $e'_1 = e_1 + e_2$  et  $e'_2 = e_1 - e_2$ . Quelle est la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  ?
- (3) Soit  $g$  l'endomorphisme défini par  $g(u) = 2u$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^2$ . Quelles sont les matrices de  $g$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  ?
- (4) Quel est le noyau de  $f$  ? De  $g$  ?

##### Exercice 2. (Solution)

Les questions sont indépendantes.

- (1) Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux droites de  $\mathbb{R}^2$ , à quelles conditions a-t-on  $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$  ?
- (2) Soit  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  trois droites de  $\mathbb{R}^3$ , à quelles conditions a-t-on  $\mathbb{R}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$  ? Donnez un exemple simple de trois droites qui ne sont pas en somme directe.
- (3) Soit dans  $\mathbb{C}^n$  les sous-espaces suivants :  $U = \text{Vect}((1, \dots, 1))$  et  $V = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ . Montrez que  $\mathbb{C}^n = U \oplus V$ . Pour tout  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ , déterminez  $\vec{x}_U \in U$  et  $\vec{x}_V \in V$  tels que  $\vec{x} = \vec{x}_U + \vec{x}_V$ .
- (4) Soit  $p$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  tel que  $p^2 = p$ . Montrez que  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ .

##### Exercice 3. (Solution)

Soit  $\mathbb{R}_3[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On rappelle que  $\mathbb{R}_3[X]$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, de base  $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ . Soit  $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$  l'application définie par :

$$f(P) = (X^2 - 1)P'' - 2XP' + 2P.$$

- (1) Montrez que  $f$  est linéaire, puis que  $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_3[X]$ . On considère désormais  $f$  comme une application linéaire de  $\mathbb{R}_3[X]$  dans lui-même.
- (2) Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- (3) Déterminez la dimension et une base du noyau de  $f$ , ainsi que de l'image de  $f$ .
- (4) Soit  $Q(X) = X^3 - 3X + 1$ . Déterminez  $f^{-1}(Q)$ .

##### Exercice 4. (Solution)

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par :  $f((x_1, \dots, x_n)) = (0, x_1, \dots, x_{n-1})$ .

- (1) Montrez que  $f$  est une application linéaire.
- (2) Déterminez la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Est-elle inversible ?
- (3) Déterminez  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .
- (4) Montrez que  $f^n = 0$  (on dit que  $f$  est nilpotente).

**Exercice 5. (Solution)**

Les résultats suivants sont à connaître, ils font partie du cours d'Algèbre Linéaire 1. Exercez-vous à les redémontrer, vous les réviserez ainsi que les notions de base sur les espaces vectoriels. Soit  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie, et soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

- (1) Soit  $\text{Ker}(f) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$ . Montrez que  $\text{Ker}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- (2) Soit  $\text{Im}(f) = \{f(\vec{u}) \mid \vec{u} \in E\}$ . Montrez que  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
- (3) Montrez que  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ .
- (4) Montrez que  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ .
- (5) Montrez que si  $f$  est bijective alors  $\dim(E) = \dim(F)$  (appliquez le théorème du rang).
- (6) Montrez que si  $U$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors  $f(U)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
- (7) Montrez que si  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  alors  $f^{-1}(V) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) \in V\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- (8) Soit  $U$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une base de  $U$ .
  - a) Montrez que  $(f(e_1), \dots, f(e_k))$  est une famille génératrice de  $f(U)$ .
  - b) En déduire que  $\dim(f(U)) \leq \dim(U)$ .
  - c) Montrez que si  $f$  est injective alors  $\dim(f(U)) = \dim(U)$ .

**Exercice 6. (Solution)**

Soit  $\Delta : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X]$  l'application définie par  $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ .

- (1) Montrez que  $\Delta$  est une application linéaire.
- (2) Soit  $\mathbb{C}_n[X]$  l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à  $n$ . On rappelle que  $\mathbb{C}_n[X]$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, de base  $\{1, X, \dots, X^n\}$ . Montrez que la restriction de  $\Delta$  à  $\mathbb{C}_n[X]$  est une application linéaire de  $\mathbb{C}_n[X]$ .
- (3) Déterminez la matrice de  $\Delta_n$  dans la base  $\{1, X, \dots, X^n\}$  de  $\mathbb{C}_n[X]$ .
- (4) En déduire le rang de  $\Delta_n$ , puis son noyau et son image.

**Exercice 7. (Solution)**

Soit  $w$  une racine 5-ième de l'unité dans  $\mathbb{C}$ , avec  $w \neq 1$ . Soit  $\mathbb{C}_4[X]$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à 4 et soit  $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ . Soit  $F_w$  l'application linéaire :

$$F_w : \mathbb{C}_4[X] \rightarrow \mathbb{C}^5$$

$$P \mapsto (P(1), P(w), P(w^2), P(w^3), P(w^4))$$

- (1) Donnez la matrice de  $F_w$  lorsque  $\mathbb{C}[X]_4$  est muni de la base  $\mathcal{B}$  et  $\mathbb{C}^5$  de sa base canonique.
- (2) Montrez que son déterminant est non nul et en déduire que  $F_w$  est un isomorphisme.
- (3) Montrez que  $F_w^{-1} = \frac{1}{5}F_{w^{-1}}$ .

## 2. SOLUTIONS

### Solution 1. (Enoncé)

(1) L'image de  $e_1$  par  $f$  se lit sur la première colonne, ainsi  $f(e_1) = 2e_1 + e_2$ . De même  $f(e_2) = -3e_1$ . Par linéarité de  $f$ , il vient :  $f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = -e_1 + e_2$ .

(2) Il s'agit d'exprimer  $f(e'_1)$  et  $f(e'_2)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . Or,

$$f(e'_1) = f(e_1 + e_2) = -e_1 + e_2 = -e'_2$$

et,

$$f(e'_2) = f(e_1) - f(e_2) = 2e_1 + e_2 + 3e_1 = 5e_1 + e_2 = 5\frac{e'_1 + e'_2}{2} + \frac{e'_1 - e_2 - 2'}{2} = 3e'_1 + 2e'_2.$$

Donc la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

On peut utiliser la formule du changement de base, si  $P$  désigne la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$ , alors :

$$B = P^{-1}AP.$$

(3) La matrice de  $g$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  est  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , car  $g(e_i) = 2e_i$  et  $g(e'_i) = 2e'_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

(4) En utilisant la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ , trouver le noyau de  $f$  revient à résoudre le système  $AX = 0$  avec  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Ce système est :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

qui a pour unique solution  $(0, 0)$ . Donc  $\ker(f) = \{(0, 0)\}$ . De même,  $\ker(g) = \{(0, 0)\}$ .

### Solution 2. (Enoncé)

(1) Comme  $\dim(D_1) + \dim(D_2) = 1 + 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ , on a  $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$  si et seulement si  $D_1 \cap D_2 = \{0\}$ .

(2) Comme

$$\dim(D_1) + \dim(D_2) + \dim(D_3) = 1 + 1 + 1 = 3 \dim(\mathbb{R}^3),$$

on a  $\mathbb{R}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$  si et seulement si

$$D_1 \cap (D_2 + D_3) = D_2 \cap (D_1 + D_3) = D_3 \cap (D_1 + D_2) = \{0\}.$$

Dans  $\mathbb{R}^3$ , les droites  $D_1 = \text{Vect}(1, 1, 0)$ ,  $D_2 = \text{Vect}(0, 0, 1)$  et  $D_3 = \text{Vect}(1, 1, 1)$  ne sont pas en somme directe (car  $D_3 \subset D_1 + D_2$ ) bien que l'on ait  $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{0\}$ .

(3) L'espace  $U$  est une droite vectorielle non nulle, donc est de dimension 1. L'espace  $V$  est un hyperplan car c'est le noyau de la forme linéaire non nulle  $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$  donc  $V$  est de dimension  $n - 1$ . Il suffit alors de prouver que  $U \cap V = \{0\}$  pour avoir  $\mathbb{C}^n = U \oplus V$ . Soit alors  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U \cap V$ , comme  $\vec{x} \in U$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\vec{x} = \lambda(1, \dots, 1)$  donc  $x_i = \lambda$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Or  $\vec{x} \in V$  donc  $\sum_{i=1}^n x_i = 0 = \sum_{i=1}^n \lambda = n\lambda$  donc  $\lambda = 0$  et finalement  $\vec{x} = 0$  et cela conclut.

Soit  $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ , et cherchons  $\vec{x}_U \in U$  et  $\vec{x}_V \in V$  tels que  $\vec{x} = \vec{x}_U + \vec{x}_V$ . On sait que  $\vec{x}_U$  est de la forme  $(\lambda, \dots, \lambda)$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ , et qu'en notant  $\vec{x}_V = (y_1, \dots, y_n)$  on a  $\sum_{i=1}^n y_i = 0$ . Comme on doit avoir pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $x_i = \lambda + y_i$ , en sommant de  $i = 1$  à  $n$  ces inégalités il vient :

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \lambda + \sum_{i=1}^n y_i = n\lambda$$

donc  $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$  et  $y_i = x_i - \lambda$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et on a bien trouvé la décomposition voulue.

(4) Le théorème du rang donne  $\dim(\ker(p)) + \dim(\text{Im}(p)) = \dim(E)$  donc il suffit de prouver que  $\ker(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\}$ . Soit  $\vec{x} \in \ker(p) \cap \text{Im}(p)$ , alors comme  $\vec{x} \in \ker(p)$ ,  $p(\vec{x}) = \vec{0}$ . De même, comme  $\vec{x} \in \text{Im}(p)$ , il existe  $\vec{x}_1 \in E$  tel que  $x = p(\vec{x}_1)$ . On a alors :

$$\vec{x} = p(\vec{x}_1) \underset{p^2=p}{=} p^2(\vec{x}_1) = p(p(\vec{x}_1)) = p(\vec{x}) = \vec{0}$$

et cela conclut.

### Solution 3. (Énoncé)

Soit  $(Q, P) \in \mathbb{R}^3[X]^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (X^2 - 1)(\lambda P + Q)'' - 2X(\lambda P + Q)' + 2(\lambda P + Q) \\ &= (X^2 - 1)(\lambda P'' + Q'') - 2X(\lambda P' + Q') - 2(\lambda P + Q) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

donc  $f$  est bien linéaire. De plus si l'on prend  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$  alors,

$$\begin{aligned} f(P) &= (X^2 - 1)(6aX + 2b) - 2X(3aX^2 + 2bX + c) + 2(aX^3 + bX^2 + cX + d) \\ (\star) \quad &= 2aX^3 - 6aX - 2b + 2d \end{aligned}$$

est bien de degré au plus 3 et donc  $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ .

(2) On calcule  $f(X^i)$  pour  $0 \leq i \leq 3$ . Il vient,

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ f(X) &= -2X + 2X = 0 \\ f(X^2) &= 2(X^2 - 1) - 2X(2X) + 2X^2 = -2 \\ f(X^3) &= (X^2 - 1)6X - 2X(3X^2) + 2X^3 = 2X^3 - 6X, \end{aligned}$$

donc la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

(3) Pour déterminer le noyau de  $f$ , on peut soit résoudre le système  $AX = 0$  avec

$$X = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

ou alors utiliser l'expression  $(\star)$  avec  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ . Dans les deux cas on aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} 2d - 2b = 0 \\ -6a = 0 \\ 2a = 0 \end{cases}$$

donc  $a = 0$ ,  $b = d$  et il n'y a pas de contrainte sur  $c$ . On en déduit que le noyau de  $f$  est :

$$\ker(f) = \{bX^2 + cX + b \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\}.$$

C'est un espace de dimension 2 et de base  $(X, X^2 + 1)$ .

Pour trouver l'image de  $f$  on peut utiliser la formule  $\star$  et écrire :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{f(P) \mid P \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{f(aX^3 + bX^2 + cX + d) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\} \\ &= \{2aX^3 - 6aX - 2b + 2d \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\} \\ &= \{aX^3 - 3aX + b' \mid (a, b') \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

où la dernière égalité se prouve par double inclusion.

(4) Le polynôme  $Q$  est de la forme  $aX^3 - 3aX + b'$  avec  $a = 1$  et  $b' = 1$  donc est dans  $\text{Im}(f)$ . En utilisant la formule  $\star$ , on voit que :

$$f\left(X^3 + \frac{1}{2}\right) = X^3 - 3X + 1 = Q$$

donc en notant  $P = X^3 + \frac{1}{2}$  on a  $f(P) = Q$ . Si  $P_1$  est un autre polynôme vérifiant  $f(P_1) = Q$ , alors  $f(P_1) = f(P)$  et donc  $f(P_1 - P) = 0$  i.e.  $P_1 - P \in \ker(f) = \{bX^2 + cX + b \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\}$  par la question (3). Donc,

$$f^{-1}(Q) = P + \ker(f) = \left\{X^3 + \frac{1}{2} + bX^2 + cX + b \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

**Solution 4.** (Enoncé)

(1) Soit  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{x} + \vec{y}) &= f((\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)) \\ &= (0, \lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_{n-1} + y_{n-1}) \\ &= \lambda(0, x_1, \dots, x_{n-1}) + (0, y_1, \dots, y_{n-1}) \\ &= \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Donc l'application  $f$  est bien linéaire.

(2) Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  i.e.  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  où le 1 est en  $i$ -ème position. Alors  $f(e_i) = e_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et  $f(e_n) = 0$ . La matrice de  $f$  dans la base canonique est donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $M$  n'est pas inversible, il y a plusieurs manière de le voir. On peut par exemple voir que  $\det(M) = 0$  car c'est une matrice triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale. On peut aussi voir que  $f$  n'est pas injective car  $f(e_n) = 0$  et  $e_n \neq 0$  (il y a plein d'autres arguments possibles).

(3) Soit  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \ker(f)$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . On a

$$\vec{0} = f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n f(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i f(e_i) + x_n f(e_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_{i+1},$$

par linéarité de  $f$ . Comme la famille  $(e_2, \dots, e_n)$  est libre, la dernière égalité force  $x_2 = \dots = x_n = 0$ . Donc  $\vec{x} = x_1 e_1 \in \text{Vect}(e_1)$ . Inversement, si  $\vec{x} \in \text{Vect}(e_1)$ , alors  $f(\vec{x}) = 0$  et donc  $\ker(f) = \text{Vect}(e_1)$ .

Montrons que  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ . Pour l'inclusion directe, soit  $\vec{y} \in \text{Im}(f)$ , alors il existe  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\vec{y} = f(\vec{x})$ . D'où :

$$\vec{y} = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_{i+1} = x_1 e_2 + \dots + x_{n-1} e_n \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$$

par le calcul déjà fait précédemment. Pour l'inclusion réciproque, soit  $\vec{y} \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ , on écrit  $\vec{y} = \sum_{i=2}^n y_i e_i$ . Posons  $\vec{x} = \sum_{i=2}^n x_i e_{i-1}$ , alors :

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=2}^n x_i f(e_{i-1}) = \sum_{i=2}^n x_i e_i = \vec{y} \in \text{Im}(f),$$

ce qui conclut.

(4) Il y a plusieurs manières de faire. On peut montrer que  $M^n = 0$  par un calcul long et fastidieux. On peut montrer que  $\text{Im}(f^{n-1}) = \text{Vect}(e_n)$  et donc  $f^n = 0$ . On peut aussi vérifier que  $f^n(e_i) = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

**Solution 5.** (Enoncé)

(1) L'élément  $\vec{0}$  est dans  $\ker(f)$  car  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ . Ensuite, soit  $(\vec{x}, \vec{y}) \in \ker(f)^2$  et  $\lambda \in K$ , alors  $f(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \lambda\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$  car  $f$  est linéaire. Donc  $\lambda\vec{x} + \vec{y} \in \ker(f)$  et  $\ker(f)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(2) L'élément  $\vec{0}$  est dans  $\text{Im}(f)$  car  $\vec{0} = f(\vec{0})$ . Ensuite, soit  $(\vec{x}, \vec{y}) \in \text{Im}(f)^2$  et  $\lambda \in K$ , alors il existe des éléments  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}_1$  dans  $E$  tels que  $f(\vec{x}_1) = \vec{x}$  et  $f(\vec{y}_1) = \vec{y}$ . On a alors :  $f(\lambda\vec{x}_1 + \vec{y}_1) = \lambda f(\vec{x}_1) + f(\vec{y}_1) = \lambda\vec{x} + \vec{y}$  car  $f$  est linéaire. Donc  $\lambda\vec{x} + \vec{y} \in \text{Im}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(3) Supposons  $f$  injective, et soit  $\vec{v} \in \ker(f)$ , alors  $f(\vec{x}) = \vec{0} = f(\vec{0})$  donc par injectivité de  $f$ ,  $\vec{x} = \vec{0}$  et  $\ker(f) \subset \{\vec{0}\}$ . L'inclusion inverse étant toujours vraie, il vient  $\ker(f) = \{\vec{0}\}$ . Inversement supposons  $\ker(f) = \{\vec{0}\}$  et montrons que  $f$  est injective. Soit  $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$  tels que  $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ , alors :

$$\vec{0} = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{y})$$

donc  $\vec{x} - \vec{y} \in \ker(f) = \{0\}$  et donc  $\vec{x} = \vec{y}$  et  $f$  est injective.

(4) Cela découle des définitions de  $\text{Im}(f)$  et de la surjectivité d'une application.

(5) Supposons  $f$  bijective, alors  $f$  injective donc  $\ker(f) = \{0\}$  et  $f$  surjective donc  $\text{Im}(f) = F$ . Le théorème du rang donne alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 0 + \dim(F) = \dim(F),$$

et cela conclut.

(6) L'élément  $\vec{0}$  est dans  $f(U)$  car  $\vec{0} = f(\vec{0})$  et  $\vec{0} \in U$  car  $U$  sous-espace vectoriel de  $E$ . Ensuite, soit  $(\vec{x}, \vec{y}) \in f(U)^2$  et  $\lambda \in K$ , alors il existe des éléments  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}_1$  dans  $U$  tels que  $f(\vec{x}_1) = \vec{x}$  et  $f(\vec{y}_1) = \vec{y}$ . On a alors :  $f(\lambda\vec{x}_1 + \vec{y}_1) = \lambda f(\vec{x}_1) + f(\vec{y}_1) = \lambda\vec{x} + \vec{y}$  car  $f$  est linéaire. Donc  $\lambda\vec{x} + \vec{y} \in f(U)$  car  $\lambda\vec{x}_1 + \vec{y}_1 \in U$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Donc  $f(U)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(7) L'élément  $\vec{0}$  est dans  $f^{-1}(V)$  car  $f(\vec{0}) = \vec{0} \in V$  car  $V$  sous-espace vectoriel de  $F$ . Ensuite, soit  $(\vec{x}, \vec{y}) \in f^{-1}(V)^2$  et  $\lambda \in K$ . On a alors :

$$f(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \underbrace{f(\vec{x})}_{\in V} + \underbrace{f(\vec{y})}_{\in V} \in V$$

car  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ . Donc  $\lambda\vec{x} + \vec{y} \in f^{-1}(V)$  et  $f^{-1}(V)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(8) a) Il s'agit de montrer que tout élément  $\vec{y} \in f(U)$  est une combinaison linéaire des  $(f(e_i))_{1 \leq i \leq k}$ . Soit alors  $\vec{y} \in f(U)$ , il existe  $\vec{x} \in U$  tel que  $f(\vec{x}) = \vec{y}$ . Or  $(e_1, \dots, e_k)$  est une base de  $U$ , donc  $\vec{x}$  peut s'écrire  $\vec{x} = \sum_{i=1}^k x_i e_i$  avec  $(x_1, \dots, x_k) \in K^k$ . On a alors :

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f\left(\sum_{i=1}^k x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^k x_i f(e_i)$$

car  $f$  est linéaire, on a bien écrit  $\vec{y}$  comme une combinaison linéaire des  $(f(e_i))_{1 \leq i \leq k}$ .

b) Comme  $(e_1, \dots, e_k)$  base de  $U$ ,  $\dim(U) = k$ . De plus,  $(f(e_1), \dots, f(e_k))$  est une famille génératrice de  $f(U)$  qui contient  $k$  éléments. Une base de  $f(U)$  contiendra donc moins de  $k$  éléments et donc  $\dim(f(U)) \leq k = \dim(U)$ .

c) Il suffit de montrer que  $(f(e_1), \dots, f(e_k))$  est une famille libre, comme on sait qu'elle est déjà génératrice par a), on pourra en déduire que c'est une base de  $f(U)$  et donc  $\dim(f(U)) = k = \dim(U)$ . Soit alors  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in K^k$  des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f(e_i) = \vec{0}.$$

Par linéarité de  $f$ , on peut écrire :

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i\right)$$

donc  $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \in \ker(f) = \{\vec{0}\}$  car  $f$  est injective (cf question (3)). Donc  $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = 0$  et comme  $(e_1, \dots, e_k)$  base de  $U$ , il vient  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$  et cela conclut.

### Solution 6. (Énoncé)

(1) Soit  $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X + 1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= (\lambda P)(X + 1) + Q(X + 1) - (\lambda P)(X) - Q(X) \\ &= \lambda P(X + 1) + Q(X + 1) - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda \Delta(P) + \Delta(Q) \end{aligned}$$

et donc l'application  $\Delta$  est bien linéaire.

(2) L'application  $\Delta_n$  restreinte à  $\mathbb{C}_n[X]$  est encore linéaire, il s'agit de vérifier que pour  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$ ,  $\Delta(P) \in \mathbb{C}_n[X]$ . Or,

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

est bien un polynôme de degré au plus  $n$  et donc dans  $\mathbb{C}_n[X]$ .

(3). Calculons pour  $0 \leq j \leq n$ ,  $\Delta(X^j)$  :

$$\Delta(X^j) = (X+1)^j - X^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i - X^j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} X^i.$$

Donc la matrice de  $\Delta$  dans la base canonique  $\{1, X, \dots, X^n\}$  de  $\mathbb{C}_n[X]$  est la matrice  $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  où :

$$m_{i,j} = \begin{cases} \binom{j}{i} & \text{si } j > i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

ce qui donne,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & 0 & \binom{2}{1} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

(4) La matrice extraite  $M' = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  est une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont non nuls, donc est inversible. La matrice  $M$  possède une matrice extraite de taille  $n$  inversible donc  $\text{rg}(M) \geq n$ . Comme la première colonne de  $M$  est nulle,  $\text{rg}(M) \leq n+1-1 = n$  et donc  $\text{rg}(M) = n$ . On en déduit  $\text{rg}(\Delta_n) = n$ .

Par le théorème du rang,  $\dim(\ker(\Delta_n)) = \dim(\mathbb{C}_n[X]) - \text{rg}(\Delta_n) = 1$ , or  $1 \in \ker(\Delta_n)$  (polynôme constant) donc  $\ker(\Delta_n) = \text{Vect}(1)$ .

Montrons que  $\text{Im}(\Delta_n) = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ , comme ces deux espaces ont la même dimension qui vaut  $n$ , il suffit de montrer que  $\text{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{C}_{n-1}[X]$  (on rappelle que si  $F \subset E$  sont deux espaces vectoriels qui sont de même dimension finie, alors  $F = E$ ). Or pour  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$  on a :

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= P(X+1) - P(X) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^n a_k X^k \\ &= a_n (X+1)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^n a_k X^k \\ &= a_n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} X^i + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^n a_k X^k \\ &= a_n X^n + a_n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} X^i + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k - a_n X^n \\ &= a_n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} X^i + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \end{aligned}$$

Donc  $\Delta(P) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$  et cela conclut.

**Solution 7. (Énoncé)**

(1) Soit  $j \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$ , alors :

$$F_w(X^j) = (1, w^j, w^{2j}, w^{3j}, w^{4j})$$

donc la matrice de  $F_w$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}_4[X]$  est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & w^4 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} \\ 1 & w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} \end{pmatrix}$$

(2) Le terme général de la matrice  $M$  est  $m_{i,j} = w^{(i-1)(j-1)}$ . On a donc une matrice de Vandermonde  $V(1, w, w^2, w^3, w^4)$  dont le déterminant est non nul car les  $(w^i)_{0 \leq i \leq 4}$  sont distincts car  $w$  est d'ordre 5 dans le groupe  $(\mathbb{C}^*, \times)$ . L'endomorphisme  $F_w$  est donc un isomorphisme car il est inversible.

(3) Soit  $M'$  la matrice de  $F_{w^{-1}}$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}_4[X]$ , alors

$$M' = ((w^{-1})^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i, j \leq 5}$$

Il suffit alors de vérifier que  $MM' = 5I_5$  pour conclure. Or pour  $(i, j) \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} MM'[i, j] &= \sum_{k=1}^5 M[i, k]M'[k, j] \\ &= \sum_{k=1}^5 w^{(i-1)(k-1)}(w^{-1})^{(k-1)(j-1)} \\ &= \sum_{k=1}^5 (w^{i-j})^{k-1} \\ &= \begin{cases} \sum_{k=1}^5 1 = 5 & \text{si } i = j \\ \frac{(w^{i-j})^5 - 1}{w^{i-j} - 1} = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

et cela conclut.