

## FEUILLES D'EXERCICES N°5

### Diagonalisation

#### 1. EXERCICES

##### Exercice 1. (Solution)

(1) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ .

(b) Diagonalisez  $A$  et en déduire une formule pour  $A^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

(2) Mêmes questions pour la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

##### Exercice 2. (Solution)

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  par

$$f(e_1) = -e_1 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 - e_2, \quad f(e_3) = e_2 - e_3.$$

Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

##### Exercice 3. (Solution)

Trouver les éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres) des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables ? Si c'est le cas, déterminer une base de diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

##### Exercice 4. (Solution)

Trouver une matrice  $A$  de taille  $2 \times 2$  admettant comme valeurs propres 2 et 3, comme 2-vecteur propre  $(1, 3)$  et comme 3-vecteur propre  $(6, -1)$ . Quels sont les vecteurs propres et valeurs propres de  $A^{100}$  ?

##### Exercice 5. (Solution)

Soient  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $R_\theta$  la matrice (dans la base canonique) d'une rotation d'angle  $\theta$  dans  $\mathbb{R}^2$ . La matrice  $R_\theta$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , sur  $\mathbb{R}$  ? On discutera selon les valeurs de  $\theta$ .

##### Exercice 6. (Solution)

Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre pour  $A$ , alors  $\lambda + 1$  est une valeur propre pour  $A + \text{Id}$ . Que peut-on dire pour  $A + A^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ? Si  $B$  est une matrice quelconque, que peut-on dire sur les valeurs propres de  $A + B$  ?

**Exercice 7. (Solution)**

Expliquer sans calcul pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & -1 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8. (Solution)**

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  une base de  $E$ . Soient

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

et  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $M$ .

- (1) Déterminer une matrice  $P$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}MP$  soit diagonale.
- (2) En déduire la matrice de  $f^5$  dans la base  $\mathcal{B}$ , puis calculer les coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  du vecteur  $f^5(v)$  où  $v = 2e_1 - e_2$ .
- (3) Calculer  $f^m$  suivant les valeurs de  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ).

**Exercice 9. (Solution)**

On considère la suite de FIBONACCI, définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

- (1) Calculer  $F_2, F_3, F_4$  et  $F_5$ .
- (2) Déterminer une matrice  $A$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

- (3) Déterminer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et en déduire une expression de  $F_n$ .

**Exercice 10. (Solution)**

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 14y' + 49y = 0$$

où  $y$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- (1) Soit  $y$  une solution de  $(E)$ . En posant  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$  et  $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$ , montrer qu'il existe une matrice  $A$  telle que

$$Y' = AY.$$

- (2) Trigonaliser la matrice  $A$  et en déduire l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 11. (Solution)**

- (1) On considère l'application  $\Delta$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par

$$\Delta : P(X) \mapsto P'(X).$$

Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $\Delta$ . L'endomorphisme  $\Delta$  est-il diagonalisable ?

- (2) Mêmes questions avec  $P(X) \mapsto P(X+1)$  et  $P(X) \mapsto X(P(X+1) - P(X))$ .

**Exercice 12.** (Solution)

On considère  $f$  l'endomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$  défini par  $f(M) = {}^tM$ . Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

**Exercice 13.** (Solution)

(1) Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ ). On pose

$$M = \begin{pmatrix} -XI_n & -B \\ A & I_n \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & -XI_n \end{pmatrix}$$

Calculer  $MN$  et  $NM$  et en déduire que  $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$ .

(2) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Déduire de 1) que  $\chi_{A\bar{A}}(X) \in \mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 14.** (Solution)

(1) Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme de degré  $n$ . Montrez que  $X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$  est un polynôme et exprimez ses coefficients en fonction de ceux de  $P$ .

(2) Soit  $A$  une matrice complexe. Montrez que  $\chi_A(0) = \det(A)$ .

(3) On suppose maintenant  $A$  inversible. Montrer que

$$\chi_{A^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n}{\chi_A(0)} \left( X^n \chi_A \left( \frac{1}{X} \right) \right).$$

**Exercice 15.** (Solution)

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

(1) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de dimension 1 de  $E$  stable par  $f$ .

On suppose dorénavant que le polynôme caractéristique de  $f$  est le polynôme  $(1 - X)(X^2 - 4X + a)$ , où  $a$  est un nombre réel  $> 3$ .

(2) On suppose  $a \neq 4$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  pour que  $f$  soit diagonalisable.

(3) On suppose  $a = 4$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de  $f - 2\text{Id}$  pour que  $f$  soit diagonalisable.

(4) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

**Exercice 16.** (Solution)

Soit  $a$  un nombre réel. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & 1 - a & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique  $\chi_A(X)$  de  $A$ .

(2) Pour quelles valeurs du paramètre  $a$  la matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

(3) Pour ces valeurs de  $a$ , calculer une matrice  $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

(4) On suppose  $a = 0$ . Montrer que les vecteurs  $v_3 = (1, 0, 0)$ ,  $v_2 = Av_3$ ,  $v_1 = Av_2$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par  $f(x) = Ax$  pour  $x \in \mathbb{R}^3$  (vecteur colonne). Calculer la matrice de  $f$  dans la base  $(v_1, v_2, v_3)$ .

**Exercice 17.** (Solution)

Montrez que le déterminant de  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est le produit des valeurs propres complexes de  $A$ , valeurs propres comptées avec multiplicité, et que la trace de  $A$  est la somme des valeurs propres complexes comptées avec multiplicité.

*Application* : si  $n > 1$ , donner sans calcul les valeurs propres de la matrice  $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  n'ayant que des 1 comme coefficients. Retrouver ce résultat en utilisant l'exercice 13 de la feuille de TD 3.

**Exercice 18.** (Solution)

- (1) Montrez qu'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  et de degré impair a au moins une racine réelle.
- (2) En déduire qu'un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension impaire possède au moins une valeur propre réelle.

**Exercice 19.** (Solution)

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et soient  $u_1, \dots, u_n$  des endomorphismes de  $E$  ( $n \geq 2$ ). On suppose que les  $u_i$  commutent deux à deux et sont tous diagonalisables. Montrer qu'il existe une base de  $E$  qui diagonalise simultanément tous les  $u_i$ .

*Indication* : on pourra commencer par montrer que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont stables par tout endomorphisme commutant avec celui-ci.

## 2. SOLUTIONS

### Solution 1. (Enoncé)

(1) (a) Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A = X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$ , donc les valeurs propres de  $A$  sont 1 et 3. Pour déterminer les espaces propres de  $A$ , il faut résoudre  $AX = X$  et  $AX = 3X$ . On obtient alors :

$$\ker(A - I_2) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \ker(A - 3I_2) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On peut donc écrire  $A = PDP^{-1}$  avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  (pour obtenir la matrice  $P$  on met les vecteurs propres trouvés en colonnes).

(b) On a donc :

$$A = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 3^n & -1 + 3^n \\ -1 + 3^n & 1 + 3^n \end{pmatrix},$$

$$\text{car } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) (a) Le polynôme caractéristique de  $B$  est :

$$\begin{aligned} \chi_B &= \begin{vmatrix} 1 - X & 2 & 2 \\ 2 & 1 - X & 2 \\ 2 & 2 & 1 - X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 - X & 2 & 2 \\ 2 & 1 - X & 2 \\ 0 & X + 1 & -X - 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 - X) \begin{vmatrix} 1 - X & 2 \\ X + 1 & -X - 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ X + 1 & -X - 1 \end{vmatrix} \\ &= (X + 1)^2(5 - X). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $B$  sont donc  $-1$  et  $5$ . Pour obtenir des vecteurs propres associés, il faut résoudre  $BX = -X$  et  $BX = 5X$ . Si  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , alors  $BX = -X$  donne le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

donc,

$$E_{-1}(B) = \ker(B + I_3) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

De même,

$$E_5(B) = \ker(B - 5I_3) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(b) On peut donc écrire :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 B^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2(-1)^n+5^n}{3} & \frac{(-1)^{n+1}+5^n}{3} & \frac{(-1)^{n+1}+5^n}{3} \\ \frac{(-1)^{n+1}+5^n}{3} & \frac{2(-1)^n+5^n}{3} & \frac{(-1)^{n+1}+5^n}{3} \\ \frac{(-1)^{n+1}+5^n}{3} & \frac{(-1)^{n+1}+5^n}{3} & \frac{2(-1)^n+5^n}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Pour calculer l'inverse de  $P$ , on peut soit résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ -x + z = b \\ -y + z = c \end{cases}$$

en fonction de  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  ou alors utiliser la matrice des cofacteurs.

**Solution 2.** (Enoncé)

On calcule la matrice  $M$  de l'endomorphisme  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $f$  est donc :

$$\begin{aligned}
 \chi_f = \chi_M &= \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0 \\ 0 & X+1 & -1 \\ -1 & 0 & X+1 \end{vmatrix} \\
 &= (X+1) \begin{vmatrix} X+1 & -1 \\ 0 & X+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ X+1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= (X+1)^3 - 1 = X(X^2 + 3X + 3).
 \end{aligned}$$

Or le polynôme  $X^2 + 3X + 3$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$  car son discriminant est strictement négatif, donc  $\chi_f$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$  et donc  $f$  n'est pas diagonalisable.

**Solution 3.** (Enoncé)

Le polynôme caractéristique de  $A$  est :

$$\begin{aligned}
 \chi_A &= \begin{vmatrix} 2-X & 1 & -1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \\
 &= (2-X) \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1-X & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (2-X)X(X-1).
 \end{aligned}$$

La matrice  $A$  possède donc 3 valeurs propres distinctes 0, 1, 2 donc est diagonalisable. Pour trouver des vecteurs propres associés il faut résoudre les systèmes  $AX = 0$ ,  $AX = X$  et  $AX = 2X$ , on trouve :

$$E_0(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_1(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad E_2(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Une base de diagonalisation est :  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  donc on peut écrire :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

et un calcul donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $B$  est :

$$\begin{aligned} \chi_B &= \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 0 & 2-X & 1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X) \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2-X & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(X^2 - 5X + 5) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $B$  sont donc  $1, a, \tilde{a}$  où  $a = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  et  $\tilde{a} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ . Il faut résoudre les systèmes  $BX = X$ ,  $BX = aX$  et  $BX = \tilde{a}X$ , on trouve :

$$E_0(B) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$E_a(B) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1+a \\ 2-a \\ 1-a \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_{\tilde{a}}(B) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1+\tilde{a} \\ 2-\tilde{a} \\ 1-\tilde{a} \end{pmatrix} \right).$$

On peut donc écrire :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1+a & -1+\tilde{a} \\ 1 & 2-a & 2-\tilde{a} \\ -1 & 1-a & 1-\tilde{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1+a & -1+\tilde{a} \\ 1 & 2-a & 2-\tilde{a} \\ -1 & 1-a & 1-\tilde{a} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Le polynôme caractéristique de  $C$  est  $X^3$ , l'unique valeur propre de  $C$  est  $0$ , un calcul immédiat donne :

$$E_0(C) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de  $C$  ne vaut pas  $3$ , donc  $C$  n'est pas diagonalisable.

**Solution 4.** (Enoncé)

Si une matrice  $A$  vérifie ces propriétés, alors elle est diagonalisable. On peut alors écrire

$A = PDP^{-1}$  avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . On a alors :

$$A = PDP^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 56 & -6 \\ -3 & 39 \end{pmatrix}$$

car  $P^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ . On en déduit alors le calcul de  $A^n$  :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 2^n + 2 \times 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ 3 \times 2^n - 3^{n+1} & 9 \times 2^{n+1} + 3^n \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de  $A^{100}$  sont  $2^{100}$  et  $3^{100}$ , et les vecteurs propres de  $A$  sont des vecteurs propres de  $A^{100}$ .

**Solution 5.** (Enoncé)

On sait que  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ . Donc le polynôme caractéristique de  $R_\theta$  est

$$\chi_{R_\theta} = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).$$

Si  $\theta = 0$ , alors  $R_\theta = I_2$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  donc aussi sur  $\mathbb{C}$ , si  $\theta = \pi$ , alors  $R_\theta = -I_2$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  donc aussi sur  $\mathbb{C}$ . Dans les autres cas  $R_\theta$  n'admet pas de valeurs propres réelles donc n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , mais admet deux valeurs propres complexes distinctes donc est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

**Solution 6.** (Enoncé)

Soit  $X$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors :

$$(A + \text{Id})X = AX + X = (\lambda + 1)X,$$

or  $X \neq 0$  donc  $\lambda + 1$  est bien une valeur propre de  $A + \text{Id}$ . De même, on montre que  $\lambda + \lambda^n$  est une valeur propre de  $A + A^n$ .

On ne peut rien dire en général sur les valeurs propres de  $A + B$ , par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors les seules valeurs propres de  $A$  et  $B$  sont 0 mais les valeurs propres de  $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  sont 1 et  $-1$ .

**Solution 7.** (Enoncé)

Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A = (\pi - X)^3$ , donc la seule valeur propre de  $A$  est  $\pi$ . Si  $A$  était diagonalisable, il existerait  $P$  inversible telle que  $A = PDP^{-1}$  avec

$$D = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} = \pi I_3$$

On aurait alors :

$$A = PDP^{-1} = P\pi I_3P^{-1} = \pi PP^{-1} = \pi I_3,$$

ce qui est clairement absurde : la matrice  $A$  n'est donc pas diagonalisable.

**Solution 8.** (Enoncé)

(1) Les valeurs propres de  $M$  sont 1 et  $-1$ , après résolution des systèmes  $MX = X$  et  $MX = -X$ , on montre que :

$$\ker(M - I_2) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \ker(M + I_2) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

donc la matrice  $M$  est diagonalisable et la matrice  $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  vérifie  $P^{-1}MP$  diagonale.

(2) Il suffit de calculer  $M^5$ , or :

$$M^5 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^5 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a donc,

$$f^5(v) = f(v) = 2f(e_1) - f(e_2) = 2(2e_1 - e_2) - (3e_1 - 2e_2) = e_1.$$

(3) Soit  $m \geq 0$ , alors en notant  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , il vient  $M = PDP^{-1}$  et  $D^m = I_2$  si  $m$  pair et  $D^m = D$  si  $m$  impair. On en déduit que  $f^m = \text{Id}_E$  si  $m$  pair et  $f^m = f$  si  $m$  impair.

**Solution 9.** (Enoncé)

(1) On calcule facilement,  $F_2 = 1$ ,  $F_3 = 2$ ,  $F_4 = 3$  et  $F_5 = 5$ .

(2) La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  convient.

(3) On va diagonaliser  $A$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $X^2 - X - 1$  dont les racines sont  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\tilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Après résolution des systèmes  $AX = \varphi X$  et  $AX = \tilde{\varphi}X$ , on montre que :

$$\ker(A - \varphi I_2) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \right) \text{ et } \ker(A - \tilde{\varphi} I_2) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} \right).$$

donc la matrice  $A$  s'écrit  $A = PDP^{-1}$  avec ,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \tilde{\varphi} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi} \end{pmatrix}.$$

On a donc,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{\tilde{\varphi} - \varphi} \begin{pmatrix} \varphi^n \tilde{\varphi} - \varphi \tilde{\varphi}^n & -\varphi^n + \tilde{\varphi}^n \\ \varphi^{n+1} \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}^{n+1} \varphi & \varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}} \begin{pmatrix} \varphi^n - \tilde{\varphi}^n \\ \varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1} \end{pmatrix}$$

donc pour tout  $n \geq 0$ ,

$$F_n = \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}} (\varphi^n - \tilde{\varphi}^n).$$

**Solution 10.** (Enoncé)

(1) La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -49 & -14 \end{pmatrix}$  convient.

(2) Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A = X^2 + 14X + 49 = (X + 7)^2$ . La matrice  $A$  admet 7 pour unique valeur propre, et comme  $A \neq 7I_2$ ,  $A$  n'est pas diagonalisable. Cherchons deux vecteurs  $X, Y$  tels que  $AX = 7X$  et  $AY = 7Y + X$ . Les vecteurs  $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$  conviennent, on peut alors écrire :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{7} \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{7} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  sont données par  $e^{tA}Y_0$  avec  $Y_0 \in \mathbb{R}^2$  or :

$$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{-7t} & te^{-7t} \\ 0 & e^{-7t} \end{pmatrix}$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$t \mapsto (\alpha + t\beta)e^{-7t}$$

avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

**Solution 11.** (Enoncé)

(1) Il est clair que  $\Delta$  est linéaire, de plus si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , alors  $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$  donc  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\Delta$  et  $P$  un vecteur propre associé, alors  $P' = \lambda P$ , en analysant les degrés, il vient nécessairement  $\lambda = 0$  (car  $P \neq 0$ ). La seule valeur propre de  $\Delta$  est 0, l'espace propre associé est  $\mathbb{R}_0[X]$ , donc  $\Delta$  est diagonalisable si et seulement si  $n = 0$ .

(2) Soit  $\Delta : P \mapsto P(X + 1)$ , alors  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Pour étudier la diagonalisabilité de  $\Delta$ , on calcule la matrice de  $\Delta$  dans la base canonique. Comme pour  $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,

$$\Delta(X^j) = (X + 1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i = X^j + \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} X^i,$$

la matrice de  $\Delta$  dans la base canonique est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Donc 1 est la seule valeur propre de  $\Delta$ . Montrons que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est  $\mathbb{R}_0[X]$  (les polynômes constants). Soit  $P \in E_1(\Delta)$ , alors  $P(X + 1) = P(X)$  et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n) = P(0)$  (récurrence immédiate). Le polynôme  $P - P(0)$  admet donc une infinité de racines donc est nul et  $P$  est bien constant. On en déduit alors que  $\Delta$  est diagonalisable si et seulement si  $n = 0$ .

On procède de manière similaire pour la dernière application, la matrice dans la base canonique de  $\Delta : P \mapsto X(P(X + 1) - P(X))$  est triangulaire supérieure avec comme éléments diagonaux,  $(0, \dots, n)$ . En effet, pour  $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$  :

$$\Delta(X^j) = X((X + 1)^j - X^j) = X \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} X^i = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} X^{i+1} = \sum_{i=1}^j \binom{j}{i-1} X^i.$$

l'endomorphisme  $\Delta$  admet donc  $n + 1$  valeurs propres distinctes donc est diagonalisable car  $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ . De plus tous les espaces propres sont de dimensions 1. Soit alors  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$  tel que  $\Delta(P) = kP$ . Si  $k = 0$  alors  $P(X + 1) = P(X)$  et  $P$  est constant, ainsi  $E_0(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$ , supposons maintenant  $k$  non nul. En écrivant  $P = \sum_{l=0}^n a_l X^l$  il vient :

$$\Delta(P) = \sum_{l=0}^n a_l \Delta(X^l) = \sum_{l=0}^n a_l \sum_{i=1}^l \binom{l}{i-1} X^i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{l=i}^n a_l \binom{l}{i-1} \right) X^i.$$

Donc comme  $\Delta(P) = kP$ , il vient en identifiant les coefficients  $a_0 = 0$  et :

$$(\star) \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \sum_{l=i}^n a_l \binom{l}{i-1} = k a_i.$$

L'équation en  $i = n$  donne,

$$a_n \binom{n}{n-1} = k a_n$$

donc  $a_n = 0$  si  $k \neq \binom{n}{n-1} = n$ . Plus généralement, le système d'équation  $\star$  donne nécessairement :

$$\forall j > k, \quad a_j = 0.$$

L'équation  $\star$  en  $i = k$  donne  $\binom{k}{k-1}a_k = ka_k$ , ce qui ne donne pas de condition sur  $a_k$ . On en déduit alors que :

$$\forall 1 \leq j < k, \quad \sum_{l=j}^n a_l \binom{l}{j-1} = ka_j$$

soit encore :

$$\forall 1 \leq j < k, \quad a_j = \frac{1}{k-j} \left( \sum_{l=j+1}^k \binom{l}{j-1} a_l \right)$$

ce qui permet de déterminer les  $(a_j)_{j < k}$  de proche en proche en fonction  $a_k$ . On trouve par exemple,

$$E_1(\Delta) = \text{Vect}(X), \quad E_2(\Delta) = \text{Vect}(X^2 + X) \text{ et } E_3(\Delta) = \text{Vect}(X^3 + 3X^2 + 2X)$$

et,

$$E_4(\Delta) = \text{Vect}(X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X).$$

**Solution 12.** (Enoncé)

Cherchons un polynôme annulateur de  $f$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors :

$$f^2(M) = (f \circ f)(M) = f({}^t M) = {}^t({}^t M) = M = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M).$$

Donc  $f^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$  et un polynôme annulateur de  $M$  est  $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ , les valeurs propres de  $f$  sont donc à chercher parmi 1 et  $-1$ .

On rappelle que l'on a la décomposition  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  où  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices symétriques réelles et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques réelles. On voit donc que :

$$E_1(f) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } E_{-1}(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

L'endomorphisme  $f$  est donc diagonalisable, car  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est la somme directe des sous-espaces propres de  $f$ .

**Solution 13.** (Enoncé)

(1) Un simple calcul donne :

$$MN = \begin{pmatrix} -XI_n & 0 \\ A & AB - XI_n \end{pmatrix} \text{ et } NM = \begin{pmatrix} BA - XI_n & 0 \\ -XA & -XI_n \end{pmatrix},$$

donc en utilisant la relation  $\det(MN) = \det(NM)$  il vient :

$$(-X)^n \chi_{AB} = (-X)^n \chi_{BA},$$

soit encore  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$  par intégrité de  $K[X]$  et le fait que  $(-X)^n \neq 0$ .

(2) Il suffit de remarquer que pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\overline{\chi_{A\bar{A}}(x)} = \overline{\det(A\bar{A} - xI_n)} = \det(\bar{A}A - xI_n) = \chi_{\bar{A}A}(x) = \chi_{A\bar{A}}(x),$$

où la dernière égalité vient de la question (1). Alors en notant  $P = \chi_{A\bar{A}}$ , on a  $\overline{P(x)} = P(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les polynômes  $P$  et  $\overline{P}$  coïncident donc sur un ensemble infini, donc sont égaux d'où  $P = \overline{P}$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

**Solution 14.** (Enoncé)

(1) On écrit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , alors :

$$X^n P \left( \frac{1}{X} \right) = X^n \sum_{k=0}^n a_k \left( \frac{1}{X} \right)^k = X^n \sum_{k=0}^n a_k X^{-k} = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k.$$

(2) On a  $\chi_A(0) = \det(A - 0I_n) = \det(A)$ .

(3) Soit  $x \in K^*$ , alors :

$$\begin{aligned} \chi_{A^{-1}}(x) &= \det(xI_n - A^{-1}) \\ &= \det(xA^{-1}(A - x^{-1}I_n)) \\ &= \det(xA^{-1}) \det(A - x^{-1}I_n) \\ &= \frac{(-1)^n x^n}{\det(A)} \det(x^{-1}I_n - A) \\ &= \frac{(-1)^n}{\det(A)} \left( x^n \chi_A \left( \frac{1}{x} \right) \right). \end{aligned}$$

On vérifie l'égalité en  $x = 0$  en utilisant les questions 1 et 2.

**Solution 15.** (Enoncé)

(1) Par le résultat de l'exercice 18,  $f$  admet une valeur propre réelle, en prenant  $x$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ , l'espace  $\text{Vect}(x)$  est stable par  $f$ .

(2) Supposons  $f$  diagonalisable, alors  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{R}[X]$ . De plus, les valeurs propres de  $f$  sont les racines de  $\chi_f$ . Les racines de  $X^2 - 4X + a$  sont :

$$2 + \sqrt{4 - a} \text{ et } 2 - \sqrt{4 - a}.$$

qui doivent être réelles car  $f$  diagonalisable, cela donne nécessairement  $a < 4$ . Inversement, si  $a < 4$ , alors  $a \in ]3, 4[$  et donc  $\chi_f$  possède 3 racines distinctes, donc  $f$  possède  $3 = \dim(E)$  valeurs propres distinctes, donc  $f$  est diagonalisable. On a donc montré :

$$f \text{ diagonalisable} \iff a \in ]3, 4[.$$

(3) Si  $a = 4$ , alors  $\chi_f = (1 - X)(X - 2)^2$ , donc  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $E$  est la somme directe des espaces  $E_1 = \ker(f - \text{Id}_E)$  et  $E_2 = \ker(f - 2 \text{Id}_E)$ , si et seulement si :

$$\dim(E) = 3 = \dim(E_1) + \dim(E_2).$$

Or 1 est racine simple de  $\chi_f$ , donc  $\dim(E_1) = 1$ . Donc :

$$f \text{ diagonalisable} \iff \dim(E_2) = 2 \iff \text{rg}(f - 2 \text{Id}_E) = 1,$$

où la dernière équivalence vient du théorème du rang.

(4) Le polynôme caractéristique de  $A$  est :

$$\chi_A = (1 - X)(X^2 - 4X + 4).$$

On est donc dans le cas  $a = 4$  de la question précédente, la matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{rg}(A - 2I_3) = 1$ , or :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 car possède le mineur extrait  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  qui est inversible (on pouvait aussi dire que les deux premières colonnes de  $A$  étaient libres). Donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

**Solution 16.** (Enoncé)

(1) Le polynôme caractéristique de  $A$  est :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} -X & 1 & -1 \\ -1 & 1-X & 0 \\ a & 1-a & -1-X \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 1-X \\ a & 1-a \end{vmatrix} - (1+X) \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= -X(a+X^2). \end{aligned}$$

(2) Pour que  $A$  soit diagonalisable, il faut  $\chi_A$  scindé et donc  $a \leq 0$ . Si  $a = 0$ , alors  $\chi_A = -X^3$ , donc  $A$  est nilpotente, mais  $A$  est non nulle donc  $A$  n'est pas diagonalisable. Si  $a < 0$ , alors  $\chi_A$  est scindé à racines simples et donc  $A$  est diagonalisable.

(3) Supposons  $a < 0$ , les valeurs propres de  $A$  sont alors,  $0$ ,  $\sqrt{-a}$  et  $-\sqrt{-a}$ . On résout les systèmes  $AX = 0$ ,  $AX = \sqrt{-a}X$  et  $AX = -\sqrt{-a}X$  pour obtenir une base de diagonalisation de  $A$ . On trouve :

$$E_0(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

et

$$E_{\sqrt{-a}}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} a\sqrt{-a} + 1 \\ \sqrt{-a} + 1 - a \\ a^2 - a + 1 \end{pmatrix} \right) \quad E_{-\sqrt{-a}}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -a\sqrt{-a} + 1 \\ -\sqrt{-a} + 1 - a \\ a^2 - a + 1 \end{pmatrix} \right).$$

donc  $A = PDP^{-1}$  avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a\sqrt{-a} + 1 & -a\sqrt{-a} + 1 \\ 1 & \sqrt{-a} + 1 - a & -\sqrt{-a} + 1 - a \\ 1 & a^2 - a + 1 & a^2 - a + 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-a} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-a} \end{pmatrix}.$$

**Solution 17.** (Enoncé)

Comme  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , on peut voir  $A$  comme une matrice à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Comme le corps  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos, tout polynôme non constant est scindé, en particulier  $\chi_A$  est scindé et donc  $A$  est trigonalisable dans  $\mathbb{C}$ . Il existe une matrice  $P$  inversible et  $T$  triangulaire supérieure telles que :

$$A = PTP^{-1}$$

Notons  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  les éléments diagonaux de  $T$ , qui sont exactement les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicités. On a alors :

$$\det(A) = \det(PTP^{-1}) = \det(P) \det(T) \det(P)^{-1} = \det(T) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

et,

$$\text{tr}(A) = \text{tr}((P)(TP^{-1})) = \text{tr}((TP^{-1})(P)) = \text{tr}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

et cela conclut.

Toutes les colonnes de  $J_n$  sont proportionnelles à la première, qui est non nulle donc  $J$  est de rang 1. Donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins  $n - 1$  de  $J_n$ , la dernière valeur propre est donnée par la trace de  $J_n$ , qui vaut  $n$ . On a alors :

$$\text{Sp} = \{0, n\},$$

où 0 est de multiplicité  $n - 1$  et  $n$  de multiplicité 1. Pour retrouver ce résultat en utilisant l'exercice 13 du TD3, on voit que  $a_n(x)$  est  $\chi_{J_n}(-x)$  et cet exercice montre que  $a_n(x) = x^{n-1}(x + n)$ , d'où :

$$\chi_{J_n}(X) = (-1)^{n-1} X^{n-1}(n - X),$$

et on retrouve le même résultat.

**Solution 18.** (Enoncé)

(1) Soit  $P$  un polynôme de degré impair, quitte à considérer  $-P$ , on peut supposer que le coefficient dominant de  $P$  est strictement positif. On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty,$$

donc par le théorème des valeurs intermédiaires,  $P$  s'annule.

(2) Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension impaire et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On sait  $\chi_f$  est un polynôme de degré  $\dim(E)$  donc est de degré impair, par la question (1),  $\chi_f$  admet une racine  $\lambda$  et donc  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ .

**Solution 19.** (Enoncé)

On procède par récurrence sur  $k = \dim(E)$ . Pour le cas  $k = 1$ ; il n'y a rien à faire. Supposons le résultat vrai au rang  $k$ . Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $k + 1$ , et soit  $(u_1, \dots, u_n)$  des endomorphismes diagonalisables de  $E$  qui commutent deux à deux. Si tous les  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des homothéties, alors le résultat est immédiat. On suppose donc qu'il existe  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $u_i$  ne soit pas homothétie. Comme l'endomorphisme  $u_i$  est diagonalisable, on peut écrire :

$$E = \bigoplus_{l=1}^r E_l,$$

où les  $E_l := \ker(u_i - \lambda_l \text{Id}_E)$  sont les sous-espaces propres de  $u_i$ , qui par hypothèse sur  $u_i$  vérifient :

$$\forall l \in \llbracket 1; r \rrbracket, \quad \dim(E_l) \in \llbracket 1; k \rrbracket.$$

Montrons que les espaces  $E_l$  sont stables par tous les  $(u_j)_{1 \leq j \leq n}$ . Soit  $x \in E_l$ , montrons que  $u_j(x) \in E_l$  i.e.  $u_i(u_j(x)) = \lambda_l u_j(x)$ , or :

$$u_i(u_j(x)) \underset{u_i \circ u_j = u_j \circ u_i}{=} u_j(u_i(x)) \underset{x \in E_l}{=} u_j(\lambda_l x) = \lambda_l u_j(x),$$

ce qui conclut. On sait que les endomorphismes  $(u_j|_{E_l})_{1 \leq j \leq n}$  sont diagonalisables et commutent, donc par hypothèse de récurrence, il existe une base  $(e_{1,l}, \dots, e_{r_l,l})$  qui diagonalise simultanément tous les  $(u_j|_{E_l})_{1 \leq j \leq n}$ . En notant  $\mathcal{B}$  la réunion des bases  $((e_{1,l}, \dots, e_{r_l,l}))_{1 \leq l \leq r}$ , on voit que  $\mathcal{B}$  est une base qui diagonalise tous les  $(u_j)_{1 \leq j \leq n}$ .

Remarque : Une autre démonstration sans récurrence a été vue en cours.