Université de Bordeaux
Mathématiques

L2, Algèbre linéaire 2
Année 2024–2025

FEUILLE D'EXERCICES n° 5

Polynômes d'endomorphisme, réduction de Jordan

Exercice 1. (Solution)
Soit A une matrice carrée. On note χ_A son polynôme caractéristique et μ_A son polynôme minimal. On considère les hypothèses

H_1 : $\chi_A(X) = (X-1)^2(2-X)$.
H_2 : $\mu_A(X) = (X-1)^2(X-2)$.
H_3 : $(A - \mathrm{Id})(A - 2\,\mathrm{Id}) = 0$.

Quelles hypothèses parmi H_1, H_2 et H_3 sont suffisantes pour prouver chacune des affirmations ci-dessous

(1) A est une matrice carrée d'ordre 3.
(2) A est diagonalisable.
(3) Le spectre de A est inclus dans $\{1, 2\}$.
(4) Le spectre de A est $\{1, 2\}$.
(5) $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 1$.
(6) A est inversible.

Exercice 2. (Solution)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. On suppose que $f^2 + \mathrm{Id} = 0$ et que f n'est pas une homothétie. Montrez que f est diagonalisable de valeurs propres i et $-i$.

Exercice 3. (Solution)
Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(On pourra commencer par déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres associés.)

Exercice 4. (Solution)
Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. (Solution)

On pose $j = \exp(2\pi i/3)$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer le noyau et l'image de A (considéré comme endomorphisme de $\mathbb{C}^3$). En déduire que $A^2 = 0$.

(2) Déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. (Solution)
Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_3$.
(1) Trouver un polynôme annulateur de M de degré 4.
(2) Montrer que M est semblable à une matrice diagonale D.
(3) Montrer que D^2 et $I_3 - D$ sont semblables.
(4) En déduire qu'il n'existe pas de matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_3$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Exercice 7. (Solution)
Soit A une matrice carrée d'ordre n et polynôme minimal μ_A. Soit $P \in K[X]$ un polynôme. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(1) $P(A)$ est inversible.
(2) $\mathrm{pgcd}(P, \mu_A) = 1$.

Exercice 8. (Solution)
Soit A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$.
(1) Calculer $P(M)$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.
(2) Démontrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $B = 0$.

Exercice 9. (Solution)
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) A est nilpotente.
(2) Le spectre de A est $\{0\}$.
(3) $A^n = 0$.

Exercice 10. (Solution)
Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in M_3(\mathbb{C})$ telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. (Solution)
Soit A une matrice carrée d'ordre n nilpotente d'indice d, c'est-à-dire

$$d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid A^k = 0\}.$$

(1) Montrer que zéro est la seule valeur propre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Quel est son polynôme caractéristique ? Son polynôme minimal ? En déduire que $d \leq n$.

(2) On note $V(A) = \mathrm{Vect}\{A^k, k \geq 0\}$. Montrer que $\{I_n, A, A^2, \dots, A^{d-1}\}$ est une base de de $V(A)$.

(3) Montrer que $I_n - A$ est inversible et trouver son inverse.

(4) Montrer que deux matrices nilpotentes d'indice égal à n sont semblables. Est-ce encore vrai pour deux matrices nilpotentes de même indice d, $1 \leq d < n$?

Exercice 12. (Solution)
Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme de E, $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \ / \ v \circ u = u \circ v\}$, le commutant de u, et $K[u] = \{P(u) \text{ où } P \in K[X]\}$.

(a) Montrer que $\dim K[u] \leq n$.

(b) On suppose u cyclique i.e. tel qu'il existe x_0 de E avec $\{x_0, u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\}$ base de E. Montrer que $C(u) = K[u]$ et que $\{\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\}$ est une base de $C(u)$.

(c) Exemples: prouver que dans chaque cas u est cyclique,

- u est nilpotent d'indice n ($u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$),
- u a n valeurs propres distinctes dans K.

Exercice 13. (Solution)
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
(1) Montrer que A^2 est diagonalisable et que $A - A^2$ est nilpotente.
(2) Déterminer la décomposition de Dunford de A.

Exercice 14. (Solution)
Soit A une matrice de $M_2(\mathbb{R})$. C'est aussi la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme qui à x associe Ax. On notera encore A cet endomorphisme par commodité. On note χ_A le polynôme caractéristique de A et μ_A son polynôme minimal.
(1) Si $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, que vaut μ_A? A est-elle diagonalisable?
(2) Si $\chi_A = (X - \lambda)^2$, on a donc $\mu_A = X - \lambda$ ou $\mu_A = (X - \lambda)^2$.
 (i) Si $\mu_A = X - \lambda$, que vaut A?
 (ii) Si $\mu_A = (X - \lambda)^2$, montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, A(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$. Que vaut la matrice de A dans cette base?
(3) Si $\chi_A = X^2 + bX + c$ est sans racine dans $\mathbb{R}$, que vaut μ_A? Soit $x \in \mathbb{R}^2$ non nul. Montrer que $(x, A(x))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Que vaut la matrice de A dans cette base?
(4) Soit B une autre matrice de $M_2(\mathbb{R})$. Démontrer l'équivalence entre :
(i) A et B ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal,
(ii) A et B sont semblables.

Exercice 15. (Solution)
Soient A et B deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$.
(1) Démontrer l'équivalence entre
 (i) A et B ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal,
 (ii) A et B sont semblables.
(On pourra considérer les différentes factorisations possibles pour le polynôme caractéristique et raisonner comme à l'exercice précédent.)
(2) Cela reste-t-il vrai dans $M_4(\mathbb{R})$?

Exercice 16. (Solution)
Réduire sous la forme de Jordan les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 17. (Solution)
Déterminer la décomposition de Dunford des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Solutions

Solution 1. (Enoncé)
(1) L'hypothèse H_1 suffit car le degré du polynôme caractéristique est la taille de la matrice. Les hypothèses H_2 et H_3 ne suffisent pas car par exemple les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

vérifient respectivement H_2 et H_3 mais ne sont pas de tailles 3.

(2) L'hypothèse H_3 suffit car la matrice A est alors annulée par un polynôme scindé à racines simples donc est diagonalisable. Les hypothèses H_1 et H_3 ne suffisent par car par exemple la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

vérifient H_1 et H_2 mais n'est pas diagonalisable.

(3) Chaque H_i suffit car les valeurs propres d'une matrice sont incluses dans les racines d'un polynôme annulateur.

(4) Les hypothèses H_1 et H_2 suffisent car les valeurs propres d'une matrices sont exactement les racines de son polynôme minimal/caractéristique, par contre l'hypothèse H_3 ne suffit pas comme le montre l'exemple $A = I_n$.

(5) Aucune hypothèse ne suffit à elle seule. En effet, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie H_1 et H_2 mais $\dim(E_1(A)) = 1$. L'hypothèse H_3 ne suffit pas, par exemple avec $A = I_2$. Par contre, les hypothèses H_1 et H_3 suffisent, en effet d'après H_1, A est de taille 3, et ses valeurs propres sont 1 et 2, d'après H_3, on a forcément $\mu_A = (X-1)(X-2)$ qui est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable et H_1 permet d'avoir $\dim(E_1(A)) = 2$ et $\dim(E_2(A)) = 1$.

(6) Chaque hypothèse suffit, en effet les 3 hypothèses impliquent chacune que 0 n'est pas valeur propre de A et donc A inversible.

Solution 2. (Enoncé)
Par hypothèse, le polynôme X^2+1 annule f, donc le polynôme minimal μ_f divise X^2+1, d'où :

$$\mu_f \in \{X+i, X-i, X^2+1\}.$$

Or, si $\mu_f = X+i$, alors $f = -i\,\mathrm{Id}_E$ donc f est une homothétie ce qui est exclu. De même, on ne peut avoir $\mu_f = X - i$. On a alors $\mu_f = X^2+1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc f est diagonalisable et ses valeurs propres sont exactement les racines de μ_f et ce sont donc i et $-i$.

Solution 3. (Enoncé)
Le polynôme caractéristique de A est $(X-1)^2$, par le théorème de Cayley-Hamilton , μ_A vaut $X-1$ ou $(X-1)^2$, comme A ne vaut pas I_2, on a $\mu_A = (X-1)^2$.

Le polynôme caractéristique de B est $-X^2(X-3)$. Comme μ_B divise χ_B, et μ_B, χ_B ont les mêmes facteurs irréductibles, on a nécessairement $\mu_B = X(X-3)$ ou $\mu_B = X^2(X-3)$, on vérifie alors que le noyau de B est de dimension 2, donc nécessairement $\mu_B = X(X-3)$.

Le polynôme caractéristique de C est $-(X-1)(X+1)^2$. Comme μ_C divise χ_C, et μ_C, χ_C ont les mêmes facteurs irréductibles, on a nécessairement $\mu_C = (X-1)(X+1)$ ou $\mu_B = (X-1)(X+1)^2$, on vérifie alors que l'espace propre $E_{-1}(C)$ est de dimension 2, donc nécessairement $\mu_C = (X-1)(X+1)$.

Solution 4. (Enoncé)
Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = -(X+1)(X^2-8X+31)$, comme μ_A divise χ_A, et μ_A, χ_A ont les mêmes facteurs irréductibles, on a nécessairement

$$\mu_A = -\chi_A = (X+1)(X^2-8X+21).$$

Le polynôme caractéristique de B est $\chi_B = -(X-2)^3$, comme μ_A divise χ_A, il vient $\mu_A = (X-2)$, ou $\mu_A = (X-2)^2$ ou $\mu_A = (X-2)^3$. On vérifie par calul que $(A-2I_3)^2 \neq 0$, et donc $\mu_A = (X-2)^3$.

Solution 5. (Enoncé)
(1) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A)$, alors :

$$\begin{cases} x + jy + j^2 z = 0 \\ jx + j^2 y + z = 0 \\ j^2 x + y + jz = 0 \end{cases}$$

les 3 équations sont équivalentes (on passe de l'une à l'autre en multipliant par une puissance de j). Le noyau de A est donc engendré (par exemple) par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -j \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -j^2 \end{pmatrix}.$$

Par le théorème du rang, l'image de A est de dimension 1 donc engendré par une ses colonnes non nulles, par exemple la première, d'où

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right).$$

On remarque alors que $\mathrm{Im}(A) \subset \ker(A)$ et donc $A^2 = 0$.

(2) La question revient à trouver une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{C}^3$ telle que $Ae_1 = Ae_2 = 0$ et $Ae_3 = e_1$. Il suffit de prendre un vecteur e_3 non nul, par exemple $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de poser $e_1 := Ae_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et de prendre un vecteur e_2 dans le noyau de A tel que (e_1, e_2, e_3)

forme une famille libre, par exemple $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -j \end{pmatrix}$, la famille (e_1, e_2, e_3) est bien libre car :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j & 0 & 0 \\ j^2 & -j & 0 \end{vmatrix} = -j^2 \neq 0.$$

Par construction, la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j & 0 & 0 \\ j^2 & -j & 0 \end{pmatrix}$ vérifie la condition voulue.

Solution 6. (Enoncé)
(1) On écrit :

$$M^4 = (I_3 - {}^tM)^2 = I_3^2 - 2\,{}^tM + {}^tM^2.$$

Or en transposant la relation $M^2 + {}^tM = I_3$, il vient :

$${}^tM^2 = I_3 - M,$$

d'où :

$$M^4 = I_3 - 2(I_3 - M^2) + I_3 - M.$$

Le polynôme $P = X^4 - 2X^2 + X$ est de degré 4 et annule M.

(2) On a :

$$P = X(X^3 - 2X + 1) = X(X-1)(X^2 + X - 1) = X(X-1)(X-a)(X-\tilde{a})$$

où $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\tilde{a} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Le polynôme P est donc scindé à racines simple dans $\mathbb{R}[X]$ et annule M, la matrice M est donc diagonalisable et donc semblable à une matrice diagonale D.

(3) Soit P une matrice inversible telle que $M = PDP^{-1}$, alors :

$$PD^2P^{-1} = M^2 = I_3 - {}^tM = I_3 - {}^t(P^{-1})D^tP,$$

d'où :

$$D^2 = I_3 - P^{-1t}(P^{-1})D^tPP = P^{-1t}(P^{-1})(I_3 - D)^tPP = Q(I_3 - D^2)Q^{-1},$$

avec $Q = (P^{-1})^t(P^{-1})$, les matrices D et $I_3 - D^2$ sont donc bien semblables.

(4) Supposons qu'il existe une telle matrice M, alors M par la question (1), la matrice M est diagonalisable et ses valeurs propres sont dans $\{0, 1, a, \tilde{a}\}$, si $\operatorname{tr}(M) = 0$, alors $\operatorname{tr}(D) = 0$ et comme D^2 et $I_3 - D$ sont semblables, il vient :

$$\operatorname{tr}(D^2) = \operatorname{tr}(I_3 - D) = 3.$$

Or, $\operatorname{tr}(D^2)$ est de la forme :

$$\operatorname{tr}(D^2) = x^2 + y^2 + z^2$$

avec $(x, y, z) \in \{0, 1, a, \tilde{a}\}^3$. De plus, on doit avoir $x + y + z = 0$, et on vérifie que ces conditions sont incompatibles. En effet, M ne peut avoir une valeur propre nulle car il n'y a pas deux valeurs propres de M qui sont opposées (ce qui contredirait la relation $\operatorname{tr}(M) = 0$). De plus, comme $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, M ne peut avoir que 1 et a en valeurs propres car là encore la relation $\operatorname{tr}(M) = 0$ serait impossible. De même avec $\tilde{a}$. Les valeurs propres de M sont donc 1, a et $\tilde{a}$ mais :

$$1^2 + a^2 + \tilde{a}^2 = 4 - \sqrt{5} \neq 3,$$

et donc ce triplet de valeurs propres ne fonctionne pas non plus et la matrice M n'existe pas.

Solution 7. (Enoncé)
(1) $\Longrightarrow$ (2) : On le fait par contraposée, si $P \wedge \mu_A \neq 1$, on peut écrire $P = QR_1$ et $\mu_A = QR_2$ avec $Q \in K[X]$ de degré supérieur à 1. Il vient alors :

$$0 = \mu_A(A) = (QR_2)(A) = Q(A)R_2(A).$$

Par minimalité de μ_A, $R_2(A)$ ne peut-être nul, donc $Q(A)$ n'est pas inversible, et donc $P(A) = Q(A)R_1(A)$ non plus.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : Par le théorème de Bézout, il existe $(U, V) \in K[X]^2$ tels que $UP + \mu_A V = 1$. En évaluant en A cette relation, il vient :

$$U(A)P(A) + \mu_A(A)V(A) = I_n,$$

soit encore $U(A)P(A) = I_n$ et donc $P(A)$ inversible.

Solution 8. (Enoncé)
Un calcul par bloc donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2AB \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$$

(l'hypothèse $AB = BA$ étant cruciale ici). De même, $M^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^2B \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}$. On conjecture et montre alors par récurrence que :

$$\forall k \geq 0, \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

Soit alors $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$, il vient alors :

$$\begin{aligned} P(M) &= \sum_{k=0}^{r} a_k M^k \\ &= \sum_{k=0}^{r} a_k \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{r} a_k A^k & \sum_{k=0}^{r} a_k k A^{k-1} B \\ 0 & \sum_{k=0}^{r} a_k A^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(A) & BP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) Supposons M diagonalisable, alors le polynôme minimal μ_M de M est scindé à racines simples, par la question précédente, il vient $\mu_M(A) = 0$. Donc la matrice A est annulée par un polynôme scindé à racines simples : la matrice A est bien diagonalisable. Montrons maintenant que $B = 0$. On sait que μ_A divise μ_M. Or, le polynôme caractéristique de M est :

$$\chi_M = \begin{vmatrix} A - XI_n & B \\ 0 & A - XI_n \end{vmatrix} = \det(A - XI_n)^2 = \chi_A^2.$$

Comme μ_A et χ_A ont les mêmes facteurs irréductibles, de même pour μ_M et χ_M, il vient nécessairement $\mu_A = \mu_M$. On peut maintenant conclure. Comme μ_A est scindé à racines simples, μ_A et μ_A' sont premiers entre eux, par l'exercice 7, $\mu_A'(A)$ est inversible. Comme $\mu_A = \mu_M$, $\mu_A(M) = 0$ et donc $B\mu_A'(A) = 0$ et donc $B = 0$ car $\mu_A'(A)$ inversible.

Solution 9. (Enoncé)
(1) $\implies$ (2) : Soit k un entier tel que $A^k = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On sait que $AX = \lambda X$, donc :

$$0 = A^k X = \lambda^k X,$$

donc $\lambda^k = 0$ car $X \neq 0$, et finalement $\lambda = 0$.

(2) $\implies$ 3) : Comme A est à coefficients dans $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de A est scindé et ses racines sont exactement les valeurs propres de A, comme par hypothèse 0 est la seule valeur propre de A, il vient $\chi_A = (-1)^n X^n$ et le théorème de Cayley-Hamilton permet de conclure que $A^n = 0$.

(3) $\implies$ (1) : Immédiat.

Solution 10. (Enoncé)
Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, remarquons que M est une matrice nilpotente d'indice 3, car $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe A telle que $A^2 = M$, alors :

$$A^6 = (A^2)^3 = M^3 = 0.$$

Donc la matrice A est nilpotente, si l'on note d son indice, alors $d \leq 3$ d'après le cours. On a donc $A^4 = 0$, or $A^4 = M^2 \neq 0$: contradiction et donc la matrice A n'existe pas.

Solution 11. (Enoncé)
(1) La preuve du fait que 0 est la seule valeur propre de A a été faîte dans l'exercice 9. Si A est diagonalisable, alors on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale dont les éléments diagonaux sont nuls, d'où $A = 0$. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (-1)^n X^n$, son polynôme minimal est $\mu_A = X^d$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton , μ_A divise χ_A et donc $d \leq n$.

(2) Montrons que $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{d-1}\}$ est libre et génératrice. Si cette famille n'était pas libre, il existerait des scalaire $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1}) \in K^d$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_i A^i = 0,$$

donc $P = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i X^i$ est un polynôme annulateur non nul de A de degré $< d$, contradiction avec le fait que le polynôme minimal soit de degré d, la famille est donc bien libre. Montrons maintenant qu'elle est génératrice, soit $P(A) = \sum_{k=0}^{r} a_k A^k \in \mathrm{Vect}\{A^k \mid k \geq 0\}$, en faisant le division euclidienne de P par X^d, il existe un couple $(Q, R) \in K[X]^2$ tels que $P = QX^d + R$, d'où :

$$P(A) = Q(A)A^d + R(A) = R(A) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i A^i,$$

et donc la famille est bien génératrice.

(3) On écrit :

$$I_n = I_n - A^d = (I_n - A)(I_n + A \cdots + A^{d-1}),$$

(la factorisation étant licite car A et I_n commutent) donc $I_n - A$ est inversible d'inverse $I_n + A + \cdots + A^{d-1}$.

(4) Soit A une matrice nilpotente d'indice n, alors il existe $X \in K^n$ tel que $A^{n-1}X \neq 0$. Montrons que la famille $(X, \dots, A^{n-1}X)$ est libre. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in K^n$ tels que :

$$(\star) \qquad \lambda_0 X + \cdots + \lambda_{n-1}A^{n-1}X = 0$$

En appliquant A^{n-1}, il vient (en utilisant que $A^n = 0$) :

$$\lambda_0 A^{n-1}X = 0.$$

Or $A^{n-1}X \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$. En reprenant la relation ($\star$) et en appliquant A^{n-2}, on montre que $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ et la famille est libre. En écrivant la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base $(A^{n-1}X, \dots, X)$, on voit que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De même pour la matrice B, les matrices A et B sont semblables à la même matrice donc sont semblables. Le résultat est faux pour $d < n$. Par exemple, considérons les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_1 & \\ & & J_2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} J_2 & \\ & J_2 \end{pmatrix}$$

où $J_1 = (0)$ et $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B sont toutes deux nilpotentes d'indice 2, mais ne sont pas semblables car $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{rg}(B) = 2$.

Solution 12. (Enoncé)
(a) Soit $r = \deg(\mu_u)$, montrons que $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{r-1})$ est une base de $K[u]$. Cette famille est libre, car si $\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^i = 0$, alors le polynôme $P = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i X^i$ annule u, donc μ_u divise P, mais $\deg(\mu_u) > \deg(P)$ et donc $P = 0$ et finalement $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{r-1} = 0$ et la famille est bien libre. Montrons qu'elle est génératrice. Soit $P(u) \in K[u]$, en faisant une division euclidienne de P par μ_u, il existe $(Q, R) \in K[X]^2$ tels que :

$$A = Q\mu_u + R \text{ et } \deg(R) < r = \deg(\mu_u).$$

On écrit $R = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i X^i$ et on a alors :

$$P(u) = (Q\mu_u)(u) + R(u) = R(u) = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i u^i \in \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{r-1}\right),$$

et la famille est bien génératrice. On en déduit $\dim(K[u]) = r$ et $r \leq n$ par le théorème de Cayley-Hamilton.

(b) Soit $P(u) \in K[u]$, alors :

$$P(u) \circ u = P(u) \circ X(u) = (PX)(u) = (XP)(u) = u \circ P(u),$$

et donc $C(u) \subset K[u]$. Soit maintenant $v \in C[u]$, par hypothèse, il existe des scalaires $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ tels que :

$$v(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(x_0).$$

Montrons alors que $v = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i =: P(u)$, nous allons montrer que ces deux endomorphismes coïncident sur la base $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$. Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$, alors :

$$\begin{aligned} v(u^j(x_0)) &= (v \circ u^j)(x_0) \\ &= (u^j \circ v)(x_0) \\ &= u^j \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(x_0) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} u^{i+j}(x_0) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(u^j(x_0)) \\ &= P(u)(u^j(x_0)). \end{aligned}$$

Donc les endomorphismes v et $P(u)$ coïncident sur une base de E et donc $v = P(u) \in K[u]$. Pour montrer que $(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n-1})$ est une base de $C(u)$, il suffit de montrer que $\deg(\mu_u) = n$. Or si P annule u, alors $P(u)(x_0) = 0$ et donc comme $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ libre, on a nécessairement P de degré $\geq n$. Donc $\mu_u \geq n$ et le théorème de Cayley-Hamilton donne $\deg(\mu_u) = n$ et cela conclut.

(c) Si u est nilpotent d'indice n, alors $u^{n-1} \neq 0$ et donc il existe $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. On montre alors que $(x, \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E en faisant le même raisonnement que la question (4) de l'exercice 11.

Supposons que u ait n valeurs propres distinctes, que l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ des vecteurs propres associés et notons $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Montrons que $(x, \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E, il suffit pour cela de montrer que c'est une famille libre de E. Soit $(\mu_0, ..., \mu_{n-1})$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i u^i(x) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i u^i(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^i e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \lambda_j^i e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \lambda_j^i \right) e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} P(\lambda_j) e_j, \end{aligned}$$

où $P = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i X^i$, et l'on a utilisé la relation :

$$f^i(x) = \sum_{j=1}^{n} f^i(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^i e_j.$$

Le polynôme P est de degré au plus $n-1$ et comme $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, il admet tous les λ_j comme racines donc P admet au moins n racines distinctes et c'est donc le polynôme nul. Ainsi $\mu_0 = \dots = \mu_{n-1} = 0$ et cela conclut.

Solution 13. (Enoncé)
(1) On a $A^3 = A^2$, donc $A^4 = A^3 = A^2$ *i.e.* $(A^2)^2 = (A^2)$, la matrice A^2 est annulée par le polynôme $P = X^2 - X = X(X-1)$ qui scindé à racines simples, donc A^2 est diagonalisable. On remarque enfin,

$$(A^2 - A)^2 = A^4 - 2A^3 + A^2 = 2A^2 - 2A^3 = -2A^2(A - I_n) = 0,$$

et donc la matrice $A^2 - A$ est nilpotente.

(2) Soit $D = A^2$ et $N = A^2 - A$, alors D et N commutent, $A = D + N$, et par la question précédente, D est diagonalisable et N nilpotente, c'est donc la décomposition de DUNFORD de A.

Solution 14. (Enoncé)
(1) Comme μ_A divise χ_A et que ces deux polynômes ont mêmes facteurs irréductibles, on a $\mu_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$. On voit que μ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

(2) (i) On a nécessairement $A = \lambda I_n$.
(ii) Par hypothèse, $\mathbb{R}^2 = \ker((A - \lambda I_n)^2)$, de plus comme $\mu_A \neq X - \lambda$, $A \neq \lambda I_n$ et donc $\mathbb{R}^2 \neq \ker(A - \lambda I_n)$. Soit alors $x \in \ker((A - \lambda I_n)^2) \setminus \ker(A - \lambda I_n)$, montrons que (x, Ax) est une base de $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha x + \beta Ax = 0$. Supposons $\beta \neq 0$, alors $Ax = \gamma x$ avec $\gamma = -\frac{\alpha}{\beta}$. Donc x est un vecteur propre de A, or la seule valeur propre de A est λ et donc $x \in \ker(A - \lambda I_n)$: contradiction. Donc $\beta = 0$ et finalement $\alpha = 0$ car $x \neq 0$ et la famille (x, Ax) est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de A dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

(3) Comme μ_A divise χ_A, nécessairement $\mu_A = \chi_A = X^2 + bX + c$. Le même raisonnement que précédemment montre que $(x, A(x))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, la matrice de A dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1 & -b \end{pmatrix}.$$

(4) L'implication $(ii) \implies (i)$ est toujours vraie. Pour le sens réciproque, il suffit de traiter les 3 cas possibles des questions 1), 2) et 3) pour s'apercevoir que dans chaque cas la matrice A était semblable à une matrice dont les coefficients étaient uniquement déterminés par le polynôme minimal et caractéristique de A.

Solution 15. (Enoncé)
(1) L'implication $(ii) \implies (i)$ est toujours vraie.

Pour l'implication (i) $\implies$ (ii), on raisonne comme dans l'exercice précédent :
Si $\chi_A = -X^3 + aX^2 + bX + c$ est sans racines dans $\mathbb{R}$ donc irréductible dans $\mathbb{R}$ (car de degré 3) alors $\mu_A = -\chi_A = X^3 - aX^2 - bX - c$. En prenant $x \in \mathbb{R}^3$ non nul, (x, Ax, A^2x) est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, si la famille était liée, il existerait $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls tels que :

$$\alpha x + \beta Ax + \gamma A^2 x = 0.$$

Soit P le polynôme défini par $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$, alors P est non nul de degré au plus 2, donc premier avec μ_A car μ_A irréductible. Par le théorème de BÉZOUT, il existe $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $UP + V\mu_A = 1$, on a alors :

$$x = UP(A)x + V\mu_A(A)x = 0,$$

contradiction et donc (x, Ax, A^2x) base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de A dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Si $\chi_A = -(X-\lambda)(X^2+bX+c)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et X^2+bX+c sans racines dans $\mathbb{R}$, alors en utilisant le lemme des noyaux il vient :

$$\mathbb{R}^3 = \ker(A-\lambda I_n) \oplus \ker(A^2+bA+cI_n).$$

Si l'on prend $x \in \ker(A^2+bA+cI_n)$ non nul, alors en utilisant le raisonnement de l'exercice précédent, (x, Ax) est une base de $\ker(A^2+bA+cI_n)$, si l'on prend $y \in \ker(A-\lambda I_n)$ non nul, alors (y, x, Ax) est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de A dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{pmatrix}.$$

Si $\chi_A = -(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ avec λ_1, λ_2 et λ_3 distincts deux à deux, alors A est diagonalisable et semblable à :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Si $\chi_A = -(X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_3$, alors par le lemme des noyaux :

$$\mathbb{R}^3 = \ker((A-\lambda_1 I_n)^2) \oplus \ker(A-\lambda_2 I_n)$$

et par un raisonnement similaire à la question (2) (ii) de l'exercice précédent la matrice A est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1^2 & 0 \\ 1 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Si $\chi_A = -(X-\lambda)^3$, alors $\mu_A \in \{X-\lambda, (X-\lambda)^2, (X-\lambda)^3\}$. Dans le premier cas, $A = \lambda I_n$. Dans le second cas, on prend $x \in \ker((A-\lambda I_n)^2) \setminus \ker(A-\lambda I_n)$ et $y \in \ker(A-\lambda I_n)$, on vérifie alors que (y, x, Ax) est une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de A dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Enfin, dans le dernier cas, $\mu_A = (X-\lambda)^3$ et en prenant $x \in \ker((A-\lambda I_n)^3) \setminus \ker((A-\lambda I_n)^2)$ non nul, on montre que (x, Ax, A^2x) est une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de A dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^3 \\ 1 & 0 & -3\lambda^2 \\ 0 & 1 & 3\lambda \end{pmatrix}.$$

Dans chaque cas, la matrice A est semblable à une matrice dont les coefficients sont uniquement déterminés par le polynôme minimal et caractéristique de A, donc si $\chi_B = \chi_A$ et $\mu_B = \mu_A$, alors A et B sont semblables.

Remarque On peut montrer que pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a l'équivalence suivante :

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad A = PBP^{-1} \Longleftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad A = PBP^{-1}.$$

On aurait alors pu considérer les matrices A et B à coefficients dans $\mathbb{C}$ et utiliser la réduction de Jordan.

(2) Le résultat est faux pour $n = 4$, comme le montre l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_1 & \\ & & J_2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} J_2 & \\ & J_2 \end{pmatrix}$$

où $J_1 = (0)$ et $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B sont toutes deux vérifient toutes les deux $\mu_A = \mu_B = X^2$ et $\chi_A = \chi_B = X^4$, mais ne sont pas semblables car $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{rg}(B) = 2$.

Solution 16. (Enoncé)
Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = -X^3$. La matrice A est donc nilpotente, de plus $\ker(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 1, donc la forme de Jordan de A est :

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver une matrice de passage, on résout $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et ensuite $AY = X$. On trouve alors (par exemple) :

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Une matrice de passage est alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice B est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & (0) \\ (0) & A + I_3 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de B est $\chi_B = (X-1)^3(X-4)$. On en déduit que la forme de Jordan de B est :

$$B \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et une matrice de passage est :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où P est la matrice de passage précédente.

Le polynôme caractéristique de C est $\chi_C = X^4$ (remarquer que la matrice C est triangulaire supérieure par blocs pour simplifier le calcul). De plus,

$$\ker(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

et $\ker(C^2) = \mathbb{R}^4$. La forme de Jordan de C a deux blocs et ces blocs sont nécessairement de taille 2. On choisit un vecteur qui n'est pas dans $\ker(C)$, par exemple $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'on pose $e_2 = Ce_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On prend ensuite un vecteur e_3 qui n'est ni dans $\ker(C)$, ni dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ par exemple $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'on pose $e_4 = Ce_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. La famille (e_2, e_1, e_4, e_3) est alors une base de $\mathbb{R}^4$ et la matrice de l'endomorphisme associé à C dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} J_2 & \\ & J_2 \end{pmatrix},$$

avec $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution 17. (Enoncé)
La matrice A est diagonalisable car possède 2 valeurs propres distinctes, donc la décomposition de Dunford de A est :

$$D = A \text{ et } N = 0.$$

Le polynôme caractéristique de B est $\chi_B = (X-1)^2(2-X)$. Par le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton , on sait que :

$$\mathbb{R}^3 = \ker(B - I_3)^2 \oplus \ker(B - 2I_3).$$

Or on montre que :

$$\ker(B - 2I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker((B - I_3)^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

En notant P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (f_1, f_2, f_3) où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f_1 = (1, 0, 0) = e_1$, $f_2 = (0, 1, 0) = e_2$ et $f_3 = (2, 1, 1)$. On a alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On trouve alors :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$N = B - D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que D est diagonalisable, N est nilpotente, $B = D + N$ et $DN = ND$.

Le polynôme caractéristique de C est $\chi_C = (1 - X)(X - 2)^2$. On montre que :

$$\ker(C - I_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker((C - 2I_3)^2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

En notant P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (f_1, f_2, f_3) où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f_1 = (-3, -1, 1)$, $f_2 = (1, 0, 0)$ et $f_3 = (0, 1, 0)$. On a alors :

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On trouve alors :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$N = C - D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que D est diagonalisable, N est nilpotente, $C = D + N$ et $DN = ND$.

Le polynôme caractéristique de D est $\chi_D = (X - 1)^2(2 - X)$. On montre que :

$$E_2(D) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad E_1(D) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

La matrice D est donc diagonalisable, car la somme des dimensions des sous-espaces propres de D vaut la taille de D, donc la décomposition de Dunford de D est $D = D + 0$.

Le polynôme caractéristique de E est $\chi_E = (X + 1)^2(3 - X)$. On montre que :

$$\ker(E - 3I_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker((E + I_3)^2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

En notant P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (f_1, f_2, f_3) où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f_1 = (1, -1, 1)$, $f_2 = (-2, 1, 0)$ et $f_3 = (2, 0, -1)$. On a alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On trouve alors :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 8 \\ -4 & -9 & -8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

et donc

$$N = E - D = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que D est diagonalisable, N est nilpotente, $E = D + N$ et $DN = ND$.