Questions et exercices sur la leçon 213 : Espaces de HILBERT. Exemples d'applications.

LAURENT MONTAIGU

Ce document vise à regrouper quelques questions qui peuvent être posées par le jury pour la leçon 213 : Espaces de HILBERT. Exemples d'applications. Il y a aussi des exercices. Le niveau de difficulté donné (de 1 à 5 étoiles) est subjectif.

Contents

1 Questions

Voici une liste de questions auxquelles il faudrait être capable de répondre (relativement) rapidement :

- Montrer que l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est un espace de HILBERT.
- Démontrer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ ainsi que le cas d'égalité.
- Que dire d'une norme vérifiant l'inégalité du parallélogramme ?
- Montrer l'existence et l'unicité de l'adjoint d'un opérateur et rappeler ses différentes propriétés.
- Donner un exemple de base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$.
- Donner un exemple de base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
- Donner la définition d'une famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ sommable.
- Donner la définition d'une famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ normalement sommable.

et un VRAI/FAUX :

- Si M est la matrice d'une application linéaire f dans une base quelconque de H, alors M^T est la matrice de f^* dans cette meme base.
- La composition de deux endomorphismes auto-adjoint est un endomorphisme auto-adjoint.
- L'application $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{C}_m^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues par morceaux sur $[0, 1]$.
- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de F, alors la projection p sur F a pour expression $p(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle\, e_k$.
- Soit $A \subset H$ une partie d'un espace pré-hilbertien H. L'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.
- Une famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ sommable est normalement sommable.

2 Exercices

Exercice 1 ★☆☆☆☆ (Solution)
Montrer que $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty)$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 2 ★★☆☆☆ (Solution)
On considère H un espace de Hilbert et on note B la boule unité fermée. Donner l'expression du projecteur orthogonal sur B.

Exercice 3 ★★☆☆☆ (Solution)
Soit $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ défini par :

$$\forall u = (u_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad T(u) = (u_{n+1})_{n\geq 0}.$$

1. Montrer que T est continu et calculer sa norme d'opérateur.
2. Déterminer $T^\star$.

Exercice 4 ★★☆☆☆ (Solution)
Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace de Hilbert des suites de carrés sommables. On note :

$$C = \{(x_n)_{n\geq 0} \in H \mid \forall n \geq 0,\ x_n \geq 0\}.$$

Montrer que C est un convexe fermé de H et déterminer la projection orthogonale sur C.

Exercice 5 ★★☆☆☆ (Solution)
Calculer :

$$I = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^\infty (x^3 + ax^2 + bx + x)^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6 ★★☆☆☆ (Solution)
Soit $H = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. On munit H du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^\infty u_n \overline{v_n}$ et on définit une forme linéaire f sur H par :

$$\forall u = (u_n)_{n\geq 0} \in H, \quad f(u) = \sum_{n=0}^\infty \frac{u_n}{n+1}.$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Déterminer $\ker(f)^\perp$.
3. A-t-on $H = \ker(f) \oplus \ker(f)^\perp$? Commenter.

Exercice 7 ★★☆☆☆ (Solution)
Soit H un espace de Hilbert et $x \in H$. Montrer que :

$$\|x\| = \max\{|f(x)| \in H' \mid \|f\| \leq 1\}.$$

Exercice 8 ★★☆☆☆ (Solution)
Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et F l'ensemble suivant :

$$F = \mathrm{Vect}\left(\{(\lambda^n)_{n\geq 0} \mid |\lambda| < 1\}\right).$$

Montrer que F est dense dans H.

Exercice 9 ★★★☆☆ (Solution)
Soit $H = L^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des fonction 2π-périodiques de carrés intégrables sur $[0, 2\pi]$. On définit pour $\varphi \in H$ et $a \in \mathbb{R}$, l'élément $\tau_a \varphi \in H$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\tau_a \varphi)(x) = \varphi(x - a).$$

Soit $\varphi \in H$, trouver une CNS pour que l'ensemble suivant :

$$F_\varphi = \text{Vect}\left(\{\tau_a \varphi \mid a \in \mathbb{R}\}\right)$$

soit dense dans H.

Exercice 10 *Polynômes de* Legendre ★★★☆☆ (Solution)
Soit $H = L^2([-1, 1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f\overline{g}$. On note $(L_n)_n$ la base obtenue après utilisation du procédé d'orthonormalisation de Graam-Schmidt sur la famille libre $(X^n)_{n\geq 0}$. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$L_n = \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}(X^2 - 1)^n.$$

Exercice 11 *Convergence faible* ★★★☆☆ (Solution)
Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x, et l'on note $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ si :

$$\forall y \in H, \quad \langle x_n, y \rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x, y \rangle .$$

1. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement, alors la limite est unique.
2. Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de H. Montrer que $e_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$.
3. Montrer que si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$. Que dire de la réciproque ?
4. Montrer que si $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ et $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|$ alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Exercice 12 ★★★☆☆ (Solution)
Soit H un espace de Hilbert et $T \in B(H)$ tel que :

$$\forall x \in H, \quad \langle Tx, x \rangle \geq \|x\|^2.$$

Montrer que T est un isomorphisme.
On pourra montrer que l'image de T est fermée et dense dans H.

Exercice 13 *Opérateurs de* Hilbert-Schmidt ★★★☆☆ (Solution)
Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit $T \in B(H)$ un opérateur de Hilbert-Schmidt *i.e.* il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$ de H telle que $\sum_{n\geq 0} \|Te_n\|^2$ converge.

1. Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ et $(f_m)_{m\geq 0}$ deux bases hilbertiennes de H montrer que :
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|T^\star f_m\|^2.$$
2. En déduire que la quantité $\sum_{n=0}^\infty \|Te_n\|^2$ ne dépend pas de la base hilbertienne choisie. On la note $\|T\|^2_{HS}$.
3. Montrer que $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$.
4. On considère dans cette question l'espace $H = \ell^2(\mathbb{N})$. Soit $c = (c_n)_{n\geq 0} \in H$. On définit l'opérateur T_c de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$ par :
$$\forall x = (x_n)_{n\geq 0} \in H, \quad T_c x = \left(\sum_{p=0}^{\infty} c_{n+p} x_p\right)_{n\geq 0}.$$
Donner une CNS sur c pour que T_c soit un opérateur de Hilbert-Schmidt.

5. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}_{HS}$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt est un espace de Hilbert.

Exercice 14 ★★★★☆ (Solution)

Soit $T : L^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad T(\tau_x f) = \tau_x(Tf),$$

où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad \tau_x f = f(\cdot - x).$$

Montrer qu'il existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $Tf = f \star g$ où $\star$ désigne le produit de convolution de f et g.

On pourra utiliser le théorème de Riesz *à* $f \mapsto Tf(0)$.

Exercice 15 *Théorème de* Banach-Alaoglu ★★★★★ (Solution)

Il est conseillé de faire cet exercice après avoir fait l'exercice 11. Soit H un espace de Hilbert et $(x_n)_n$ une suite bornée de H, le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge faiblement.

1. On suppose H séparable et on note $(h_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans H. Montrer par extraction diagonale qu'il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\left(\langle x_{\varphi(n)}, h_k\rangle\right)_{n\geq 0}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy et conclure dans le cas où H est séparable.

3. Dans le cas général, on pose $F = \overline{\mathrm{Vect}\left(\{x_n \mid n \geq 0\}\right)}$. En remarquant que F est un espace de Hilbert séparable et que $H = F \oplus F^{\perp}$, conclure.

3 Solutions

Solution 1. (Enoncé)
Il s'agit de montrer que $\|.\|_\infty$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme. Notons f la fonction constante égale à 1 et g la fonction identité. On a alors $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$. De plus,

$$\|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |1-x| = 1$$

et

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |1+x| = 2.$$

On a

$$2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2 = 4 \neq 5 = \|f-g\|_\infty^2 + \|f+g\|_\infty^2$$

Solution 2. (Enoncé)
Soit $x \in H$. Si $x \in B$, alors $p_B(x) = x$. Sinon, on fait un dessin et on conjecture que le vecteur de B qui minimise la distance entre x et B est sur le segment $[0, x]$ et est sur la frontière de B, on a donc $p_B(x) = \frac{x}{\|x\|}$ dans ce cas. On conjecture donc que :

$$p_B(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in B \\ \frac{x}{\|x\|} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour le prouver, on peut utiliser la caractérisation de la projection orthogonale par les angles obtus. Il s'agit donc de prouver que :

$$\forall y \in B, \quad \Re\left(\langle x - p_B(x), y - p_B(x)\rangle\right) \leq 0.$$

Ce produit scalaire est nul quand $x \in B$. Si x n'est pas dans B, on calcule alors :

$$\langle x - p_B(x), y - p_B(x)\rangle = \left\langle \frac{(\|x\|-1)x}{\|x\|}, y - \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \frac{\|x\|-1}{\|x\|^2}\left\langle x, \|x\|y - x\right\rangle.$$

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, \|x\|y\rangle| \leq \|x\|\|x\|\|y\| \leq \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$

car $\|y\| \leq 1$. On a donc :

$$\Re(\langle x, \|x\|y - x\rangle) \leq 0,$$

et cela conclut.

Solution 3. (Enoncé)
1. L'application T est clairement linéaire. Soit $u \in \ell^2(\mathbb{N})$, alors :

$$\|Tu\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 = \|u\|^2,$$

donc T est continu et $\|T\|_{op} \leq 1$. Montrons qu'il y a égalité, par exemple avec la suite $u = (\delta_{1,n})_{n\geq 0} = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ on a :

$$\|Tu\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 = \|u\|,$$

et donc $\|T\|_{op} = 1$.
2. Soit $(u, v) \in \ell^2(\mathbb{N})^2$, alors :

$$\langle Tu, v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}\overline{v_n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\overline{v_{n-1}} = u_0 \times 0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n\overline{v_{n-1}}.$$

L'adjoint de T est donc donné par :

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad T^\star(u) = (0, u_0, u_1, \dots).$$

Solution 4. (Enoncé)
On peut écrire C sous la forme suivante :

$$C = \bigcap_{n\geq 1} C_n,$$

avec

$$C_n = \{(x_k)_{k\geq 0} \mid x_n \geq 0\} = \varphi_n^{-1}([0;+\infty[)$$

où $\varphi_n : x \mapsto x_n$. Les applications φ sont continues, donc $\varphi_n^{-1}([0;+\infty[)$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. La convexité de C_n est immédiate. Finalement, C est un convexe fermé en tant qu'intersections de convexes fermés.
Pour $x \in C$, on définit $p(x) = (p(x)_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p(x)_n = \begin{cases} x_n \text{ si } x_n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrons que p est la projection sur C. On peut utiliser la caractérisation des angles obtus. Soit $x \in H$ et $y \in C$, alors :

$$\langle x - p(x), y - p(x)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - p(x)_n)(y_n - p(x)_n).$$

Or si $x_n \geq 0$,

$$(x_n - p(x)_n)(y_n - p(x)_n) = 0 \times (y_n - x_n) = 0,$$

et si $x_n \leq 0$,

$$(x_n - p(x)_n)(y_n - p(x)_n) = \underbrace{x_n}_{\leq 0}\underbrace{(y_n - x_n)}_{\geq 0} \leq 0,$$

et donc $\langle x - p(x), y - p(x)\rangle \leq 0$ et cela conclut.

Solution 5. (Enoncé)
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q\rangle = \int_0^{\infty} P(x)Q(x)e^{-x}.$$

Il s'agit de calculer la distance entre le polynôme X^3 et le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$. On peut par exemple (mais ce n'est pas la seule manière) orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ par le procédé de Graam-Schmidt, on obtient alors que :

$$(1, X-1, \frac{X^2 - 4X + 2}{2})$$

est une base orthonormée de F, on en déduit que la distance recherchée vaut :

$$\begin{aligned} I^2 = d(X^3, F)^2 &= \|X^3\|^2 - \|p_F(X^3)\|^2 \\ &= \langle X^3, X^3\rangle - \langle X^3, 1\rangle^2 - \langle X^3, X-1\rangle^2 - \left\langle X^3, \frac{X^2 - 4X + 2}{2}\right\rangle^2 \\ &= 720 - 6^2 - 18^2 - 18^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

On en déduit enfin,

$$I = \sqrt{6}.$$

Solution 6. (Enoncé)
1. Soit $u \in H$, comme $(u_n)_{n\geq 0}$ est à support fini, la série définissant $f(u)$ ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls donc est bien convergente et f est bien définie.
2. Montrons que $\ker(f)^\perp = \{0\}$. Soit $v \in \ker(f)^\perp$, alors pour tout $u \in \ker(f)$, $\langle u, v\rangle = 0$. Comme la suite $(v_n)_n$ est à support fini, il existe m tel que $v_m = 0$. Soit maintenant $n \geq 0$ et montrons que $v_n = 0$. La suite u définie par :

$$u_n = n+1, \quad u_m = -(m+1), \quad \text{et } \forall k \neq n, m, \quad u_k = 0.$$

et dans $\ker(f)$. On a donc :

$$0 = \langle u, v\rangle = (n+1)\overline{v_n},$$

et donc $v_n = 0$ et cela conclut.
3. La forme linéaire f n'est pas nulle donc $\ker(f) \neq H$, on n'a pas $H = \ker(f) \oplus \ker(f)^{\perp}$, on peut donc en déduire que H n'est pas un Hilbert.

Solution 7. (Enoncé)
Le résultat est immédiat si $x = 0$, on suppose maintenant x non nul. Soit $f \in H'$ avec $\|f\| \leq 1$. Alors :

$$|f(x)| \leq \|x\|\|f\| \leq \|x\|,$$

donc

$$\|x\| \geq \max\{|f(x)| \in H' \mid \|f\|_{op} \leq 1\}.$$

Il suffit maintenant de remarquer que la forme linéaire $f : y \mapsto \left\langle y, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle$ est continue et vérifie $|f(x)| = \|x\|$ et $\|f\| \leq 1$.

Solution 8. (Enoncé)
Par le théorème du supplémentaire orthogonal, on sait que $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^{\perp}$, or $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$, il suffit donc de prouver que $F^{\perp} = \{0\}$.
Soit $u \in F^{\perp}$, alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1,\ \langle x_\lambda, u\rangle = \sum_{n=0} \overline{u_n}\lambda^n = 0.$$

La fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \overline{u_n} z^n$ est une série entière de rayon de convergence au moins 1 (car $u_n \in \ell^2(\mathbb{N})$) et est nulle sur le disque unité par hypothèse. Par le principe des zéros isolés, f est nulle et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{u_n} = 0.$$

D'où $u = 0$ et cela conclut.

Solution 9. (Enoncé)
L'ensemble F_φ est un sous-espace vectoriel de H, donc est dense dans H si et seulement si $F_\varphi^{\perp} = \{0\}$ (théorème du supplémentaire orthogonal). Soit $g \in F_\varphi^{\perp}$, alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{2\pi} g(x)\overline{(\tau_a\varphi)(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} g(x)\overline{\varphi(x-a)}\,\mathrm{d}x = 0.$$

On écrit $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{inx}$ et $\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)e^{inx}$, alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{2\pi} g(x)\overline{\varphi(x-a)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in Z} c_n(g)\overline{c_n(\varphi)}e^{ina} = 0.$$

Donc par unicité du développement en série de Fourier, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(g)\overline{c_n(\varphi)} = 0.$$

On montre alors facilement que F_φ est dense dans H si et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\varphi) \neq 0.$$

Solution 10. (Enoncé)
Le polynôme $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$, donc L_n est de degré n. Il suffit alors de montrer que :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad \langle L_n, L_m\rangle = \delta_{n,m},$$

où $\delta_{n,m}$ désigne le symbole de KRONECKER. Soit alors $n \geq m \geq 1$ (le cas $n = m = 0$ étant immédiat) deux entiers, il vient :

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{\sqrt{m+\frac{1}{2}}}{2^m m!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x,$$

ce qui en faisant une intégration par parties en dérivant $\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x$ et en intégrant $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \,\mathrm{d}x$ donne :

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{\sqrt{m+\frac{1}{2}}}{2^m m!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x,$$

le terme de bord étant nul car $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ s'annule en 1 et -1. En faisant m intégrations par parties il vient alors :

$$\begin{aligned}\langle L_n, L_m \rangle &= \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{\sqrt{m+\frac{1}{2}}}{2^m m!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{\sqrt{m+\frac{1}{2}}(2m)!}{2^m m!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}(x^2-1)^n \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ainsi, si $n > m$ alors cette dernière intégrale est nulle car :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}(x^2-1)^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{d}^{n-m-1}}{\mathrm{d}x^{n-m-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} = 0.$$

Et si $n = m$, alors

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}(x^2-1)^n \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n = 2\int_{0}^{1} (x^2-1)^n \,\mathrm{d}x = 2 \times 4^n \frac{n!^2}{(2n+1)!}$$

où la dernière intégrale se ramène à une intégrale de WALLIS avec le changement de variable $u = \cos(x)$. On a alors :

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{n+\frac{1}{2}}{4^n n!^2}(2n)! \frac{2 \times 4^n n!^2}{(2n+1)!} = 1,$$

et cela conclut.

Solution 11. (Enoncé)
1. Si x_n converge faiblement vers x et x', alors pour $y \in H$:

$$\langle x - x', y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x', y \rangle = \lim_{n \to \infty} (\langle x_n, y \rangle - \langle x_n, y \rangle) = 0,$$

et donc $x = x'$.
2. Soit $x \in H$, alors la série $\sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2$ est convergente (de somme $\|x\|^2$) et donc en particulier son terme général tend vers 0 et donc la suite $(e_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers 0.
3. Soit $y \in H$ et $n \geq 0$, il suffit d'écrire :

$$|\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n - x\| \|y\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc $(x_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers x. La réciproque est fausse, si $(e_n)_n$ est une base hilbertienne alors $(e_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers 0 mais pas fortement vers 0 car $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \geq 1$.
4. Soit $n \geq 0$, alors :

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\Re(\langle x_n, x \rangle) + \|x\|^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \|x\|^2 - 2\Re\left(\|x\|^2\right) + \|x\|^2 = 0,$$

et donc $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$.

Solution 12. (Enoncé)
Il est clair que T est injectif. Pour montrer que $\mathrm{Im}(T) = H$, on va montrer que $\mathrm{Im}(T)$ est fermé et dense dans H. Commençons par montrer que cet ensemble est dense dans H en montrant que son orthogonal est nul. Soit $x \in \mathrm{Im}(T)^{\perp}$, alors :

$$0 = \langle Tx, x\rangle \geq \|x\|^2,$$

donc $x = 0$ et $\mathrm{Im}(T)^{\perp} = \{0\}$ *i.e.* $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans H. Montrons maintenant que cet ensemble est fermé, soit $(y_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{Im}(T)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $y \in H$. Pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in H$ tel que $y_n = Tx_n$. Montrons que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Soit $n, m \geq 0$, alors :

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq \langle T(x_n - x_m), x_n - x_m\rangle \leq \|y_n - y_m\|\|x_n - x_m\|,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc

$$\|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\|.$$

Comme la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy (elle est convergente), il en est de même pour la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Comme H est un espace de Hilbert, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers $x \in H$ et par continuité de T :

$$y_n = Tx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Tx.$$

Par unicité de la limite, il vient $y = Tx \in \mathrm{Im}(H)$ et cela conclut.

Solution 13. (Enoncé)
1. On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |\langle Te_n, f_m\rangle|^2 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |\langle T^* f_m, e_n\rangle|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|T^* f_m\|^2,$$

l'interversion des sommes étant justifiée par positivité.
2. Soit $(e'_n)_n$ une autre base hilbertienne. En appliquant de nouveau la question précédante, il vient :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|T^* f_m\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|T^{**} e'_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Te'_n\|^2,$$

et cela conclut.
3. Soit $x \in H$, alors :

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle Tx, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, T^* e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|T^* e_n\|^2 = \|x\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \|x\|^2 \|T\|_{HS}^2,$$

donc $\|Tx\| \leq \|x\|\|T\|_{HS}$ et finalement $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$.
4. Une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$ est donnée par $e_n = (\delta_{n,k})_{k\geq 0}$. On a alors pour $n \geq 0$

$$T_c(e_n) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} c_{k+p}\delta_{n,p}\right)_{k\geq 0} = (c_{k+n})_{k\geq 0}.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T_c(e_n)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |c_{k+n}|^2 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n+k=m} |c_{n+k}|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |c_m|^2 \sum_{n+k=m} 1 = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)|c_m|^2,$$

l'interversion des sommes étant licite car tout est positif. On en déduit alors que T_c est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)|c_m|^2 < \infty.$$

5. Il est clair que $\mathcal{L}_{HS}$ est un espace préhilbertien pour le produit scalaire :

$$\langle T, S\rangle_{HS} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle Te_n, Se_n\rangle,$$

montrons maintenant que cet espace est complet. Soit $(T_n)_n \in \mathcal{L}_{HS}$ une suite de Cauchy pour $\|.\|_{HS}$. Par la question 3, la suite $(T_n)_n$ est de Cauchy pour $\|.\|$ donc comme $B(H)$ est complet, il existe $T \in B(H)$ tel que :

$$\|T_n - T\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $(e_m)_m$ une base hilbertienne de H, alors pour $n \geq 1$ il vient par le lemme de Fatou :

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|Te_m\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \|Te_m\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{HS} < \infty,$$

donc $T \in \mathcal{L}_{HS}$, montrons maintenant que T_n tend vers T pour $\|.\|_{HS}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k, n \geq n_0$:

$$\|T_n - T_k\|^2 < \varepsilon.$$

On a alors :

$$\|T_n - T\|_{HS}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \liminf_{k\to\infty} \|(T_k - T_n)e_m\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \|(T_k - T_n)e_n\|^2 = \liminf_{n\to\infty} \|T_k - T_n\|_{HS} < \varepsilon,$$

où l'on a encore utilisé le lemme de Fatou.

Solution 14. (Enoncé)
La forme linéaire $f \to Tf(0)$ est continue car pour $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$|Tf(0)| \leq \|Tf\|_\infty \leq \|T\| \|f\|_2,$$

donc par le théorème de Riesz, il existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$Tf(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soit maintenant $f \in L^2(\mathbb{R})$ quelconque, alors :

$$(Tf)(x) = \tau_{-x}(Tf)(0) = T(\tau_{-x}(f))(0) = \int_{\mathbb{R}} (\tau_{-x}f)(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t+x)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(u-x)\mathrm{d}u = (f \star \widetilde{g})(x),$$

où la fonction $\widetilde{g}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{g}(x) = g(-x).$$

Solution 15. (Enoncé)
Il s'agit de la preuve du théorème 2 du document suivant : https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/thomas.cavallazzi/assets/pdf/developpements/Optimisation%20Hilbert.pdf.