

# Questions et exercices sur la leçon 213 : Espaces de HILBERT. Exemples d'applications.

LAURENT MONTAIGU

Ce document vise à regrouper quelques questions qui peuvent être posées par le jury pour la leçon 213 : Espaces de HILBERT. Exemples d'applications. Il y a aussi des exercices.

# Contents

<b>1</b>	<b>Questions</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Exercices</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Solutions</b>	<b>7</b>

# 1 Questions

Voici une liste de questions auxquelles il faudrait être capable de répondre (relativement) rapidement :

- Montrer que l'espace  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  est un espace de HILBERT.
- Démontrer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ ainsi que le cas d'égalité.
- Que dire d'une norme vérifiant l'inégalité du parallélogramme ?
- Montrer l'existence et l'unicité de l'adjoint d'un opérateur et rappeler ses différentes propriétés.
- Donner un exemple de base hilbertienne de  $L^2([0, 2\pi])$ .
- Donner un exemple de base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$ .
- Donner la définition d'une famille  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$  sommable.
- Donner la définition d'une famille  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$  normalement sommable.

et un VRAI/FAUX :

- Si  $M$  est la matrice d'une application linéaire  $f$  dans une base quelconque de  $H$ , alors  $M^T$  est la matrice de  $f^*$  dans cette même base.
- La composition de deux endomorphismes auto-adjoint est un endomorphisme auto-adjoint.
- L'application  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$  est un produit scalaire sur l'espace  $\mathcal{C}_m^0([0, 1], \mathbb{R})$  des fonctions continues par morceaux sur  $[0, 1]$ .
- Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $F$ , alors la projection  $p$  sur  $F$  a pour expression  $p(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ .
- Soit  $A \subset H$  une partie d'un espace pré-hilbertien  $H$ . L'ensemble  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ .
- Une famille  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$  sommable est normalement sommable.

## 2 Exercices

### Exercice 1

Montrer que  $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  n'est pas un espace de HILBERT.

### Exercice 2

On considère  $H$  un espace de HILBERT et on note  $B$  la boule unité fermée. Donner l'expression du projecteur orthogonal sur  $B$ .

### Exercice 3

Soit  $T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$  défini par :

$$\forall u = (u_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad T(u) = (u_{n+1})_{n \geq 0}.$$

1. Montrer que  $T$  est continu et calculer sa norme d'opérateur.
2. Déterminer  $T^*$ .

### Exercice 4

Soit  $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  l'espace de HILBERT des suites de carrés sommables. On note :

$$C = \{(x_n)_{n \geq 0} \in H \mid \forall n \geq 0, x_n \geq 0\}.$$

Montrer que  $C$  est un convexe fermé de  $H$  et déterminer la projection orthogonale sur  $C$ .

### Exercice 5

Calculer

$$I = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^\infty (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-x} dx.$$

### Exercice 6

Soit  $H = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. On munit  $H$  du produit scalaire  $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^\infty u_n \overline{v_n}$  et on définit une forme linéaire  $f$  sur  $H$  par :

$$\forall u = (u_n)_{n \geq 0} \in H, \quad f(u) = \sum_{n=0}^\infty \frac{u_n}{n+1}.$$

1. Montrer que  $f$  est bien définie.
2. Déterminer  $\ker(f)^\perp$ .
3. A-t-on  $H = \ker(f) \oplus \ker(f)^\perp$  ? Commenter.

### Exercice 7

Soit  $H$  un espace de HILBERT et  $x \in H$ . Montrer que :

$$\|x\| = \max\{|f(x)| \in H' \mid \|f\| \leq 1\}.$$

### Exercice 8

Soit  $H$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace de  $H$ . Soit  $x \in F$ , montrer que

$$x \in F^\perp \iff \forall y \in F, \quad \|x - y\| \geq \|x\|.$$

Pour le sens indirect, on considèrera pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\|x - ty\|^2$ .

**Exercice 9**

Soit  $H = \ell^2(\mathbb{N})$  et  $F$  l'ensemble suivant :

$$F = \text{Vect}(\{(\lambda^n)_{n \geq 0} \mid |\lambda| < 1\}).$$

Montrer que  $F$  est dense dans  $H$ .

**Exercice 10**

Soit  $H = L^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  l'espace des fonction  $2\pi$ -périodiques de carrés intégrables sur  $[0, 2\pi]$ . On définit pour  $\varphi \in H$  et  $a \in \mathbb{R}$ , l'élément  $\tau_a \varphi \in H$  défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\tau_a \varphi)(x) = \varphi(x - a).$$

Soit  $\varphi \in H$ , trouver une CNS pour que l'ensemble suivant :

$$F_\varphi = \text{Vect}(\{\tau_a \varphi \mid a \in \mathbb{R}\})$$

soit dense dans  $H$ .

**Exercice 11** *Polynômes de LEGENDRE*

Soit  $H = L^2([-1, 1])$  muni du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f \bar{g}$ . On note  $(L_n)_n$  la base obtenue après utilisation du procédé d'orthonormalisation de GRAHAM-SCHMIDT sur la famille libre  $(X^n)_{n \geq 0}$ . Montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,

$$L_n = \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n} (X^2 - 1)^n.$$

**Exercice 12** *Convergence faible*

Soit  $H$  un espace de HILBERT. On dit qu'une suite  $(x_n)_{n \geq 0} \in H^{\mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $x$ , et l'on note  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$  si :

$$\forall y \in H, \langle x_n, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle x, y \rangle.$$

1. Montrer que si  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge faiblement, alors la limite est unique.
2. Soit  $(e_n)_{n \geq 0}$  une base hilbertienne de  $H$ . Montrer que  $e_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
3. Montrer que si  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$  alors  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ . Que dire de la réciproque ?
4. Montrer que si  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$  et  $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|x\|$  alors  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ .

**Exercice 13**

Soit  $H$  un espace de HILBERT et  $T \in B(H)$  tel que :

$$\forall x \in H, \langle Tx, x \rangle \geq \|x\|^2.$$

Montrer que  $T$  est un isomorphisme.

On pourra montrer que l'image de  $T$  est fermée et dense dans  $H$ .

**Exercice 14** *Opérateurs de HILBERT-SCHMIDT*

Soit  $H$  un espace de HILBERT séparable. Soit  $T \in B(H)$  un opérateur de HILBERT-SCHMIDT *i.e.* il existe une base hilbertienne  $(e_n)_{n \geq 0}$  de  $H$  telle que  $\sum_{n \geq 0} \|Te_n\|^2$  converge.

1. Soit  $(e_n)_{n \geq 0}$  et  $(f_m)_{m \geq 0}$  deux bases hilbertiennes de  $H$  montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|T^* f_m\|^2.$$

2. En déduire que la quantité  $\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2$  ne dépend pas de la base hilbertienne choisie. On la note  $\|T\|_{HS}^2$ .
3. Montrer que  $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$ .
4. On considère dans cette question l'espace  $H = \ell^2(\mathbb{N})$ . Soit  $c = (c_n)_{n \geq 0} \in H$ . On définit l'opérateur  $T_c$  de  $\ell^2(\mathbb{N})$  dans  $\ell^2(\mathbb{N})$  par :

$$\forall x = (x_n)_{n \geq 0} \in H, \quad T_c x = \left( \sum_{p=0}^{\infty} c_{n+p} x_p \right)_{n \geq 0}.$$

Donner une CNS sur  $c$  pour que  $T_c$  soit un opérateur de HILBERT-SCHMIDT.

5. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{L}_{HS}$  des opérateurs de HILBERT-SCHMIDT est un espace de HILBERT.

### Exercice 15

Soit  $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow C_b(\mathbb{R})$  un opérateur continu de  $L^2(\mathbb{R})$  dans l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad T(\tau_x f) = \tau_x(Tf),$$

où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad \tau_x f = f(\cdot - x).$$

Montrer qu'il existe  $g \in L^2(\mathbb{R})$  tel que pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $Tf = f \star g$  où  $\star$  désigne le produit de convolution de  $f$  et  $g$ .

On pourra utiliser le théorème de RIESZ à  $f \mapsto Tf(0)$ .

### 3 Solutions

**Solution 1. (Enoncé)**

Il s'agit de montrer que  $\|\cdot\|_\infty$  ne vérifie pas l'identité du parallélogramme. Notons  $f$  la fonction constante égale à 1 et  $g$  la fonction identité. On a alors  $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$ . De plus,

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |1 - x| = 1$$

et

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |1 + x| = 2.$$

On a

$$2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2 = 4 \neq 5 = \|f - g\|_\infty^2 + \|f + g\|_\infty^2$$

**Solution 2. (Enoncé)**

Soit  $x \in H$ . Si  $x \in B$ , alors  $p_B(x) = x$ . Sinon, on fait un dessin et on conjecture que le vecteur de  $B$  qui minimise la distance entre  $x$  et  $B$  est sur le segment  $[0, x]$  et est sur la frontière de  $B$ , on a donc  $p_B(x) = \frac{x}{\|x\|}$  dans ce cas. On conjecture donc que :

$$p_B(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in B \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour le prouver, on peut utiliser la caractérisation de la projection orthogonale par les angles obtus. Il s'agit donc de prouver que :

$$\forall y \in B, \quad \Re(\langle x - p_B(x), y - p_B(x) \rangle) \leq 0.$$

Ce produit scalaire est nul quand  $x \in B$ . Si  $x$  n'est pas dans  $B$ , on calcule alors :

$$\langle x - p_B(x), y - p_B(x) \rangle = \left\langle \frac{(\|x\| - 1)x}{\|x\|}, y - \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \frac{\|x\| - 1}{\|x\|^2} \langle x, \|x\|y - x \rangle.$$

Or par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$|\langle x, \|x\|y \rangle| \leq \|x\| \|x\| \|y\| \leq \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

car  $\|y\| \leq 1$ . On a donc :

$$\Re(\langle x, \|x\|y - x \rangle) \leq 0,$$

et cela conclut.

**Solution 3. (Enoncé)**

1. L'application  $T$  est clairement linéaire. Soit  $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ , alors :

$$\|Tu\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 = \|u\|^2,$$

donc  $T$  est continu et  $\|T\|_{op} \leq 1$ . Montrons qu'il y a égalité, par exemple avec la suite  $u = (\delta_{1,n})_{n \geq 0} = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$  on a :

$$\|Tu\| = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 = \|u\|,$$

et donc  $\|T\|_{op} = 1$ .

2. Soit  $(u, v) \in \ell^2(\mathbb{N})^2$ , alors :

$$\langle Tu, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} \overline{v_n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \overline{v_{n-1}} = u_0 \times 0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \overline{v_{n-1}}.$$

L'adjoint de  $T$  est donc donné par :

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad T^*(u) = (0, u_0, u_1, \dots).$$

**Solution 4. (Enoncé)**

On peut écrire  $C$  sous la forme suivante :

$$C = \bigcap_{n \geq 1} C_n,$$

avec

$$C_n = \{(x_k)_{k \geq 0} \mid x_n \geq 0\} = \varphi_n^{-1}([0; +\infty[)$$

où  $\varphi_n : x \mapsto x_n$ . Les applications  $\varphi$  sont continues, donc  $\varphi_n^{-1}([0; +\infty[)$  est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. La convexité de  $C_n$  est immédiate. Finalement,  $C$  est un convexe fermé en tant qu'intersections de convexes fermés.

Pour  $x \in C$ , on définit  $p(x) = (p(x)_n)_{n \geq 0}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p(x)_n = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que  $p$  est la projection sur  $C$ . On peut utiliser la caractérisation des angles obtus. Soit  $x \in H$  et  $y \in C$ , alors :

$$\langle x - p(x), y - p(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - p(x)_n)(y_n - p(x)_n).$$

Or si  $x_n \geq 0$ ,

$$(x_n - p(x)_n)(y_n - p(x)_n) = 0 \times (y_n - x_n) = 0,$$

et si  $x_n \leq 0$ ,

$$(x_n - p(x)_n)(y_n - p(x)_n) = \underbrace{x_n}_{\leq 0} \underbrace{(y_n - x_n)}_{\geq 0} \leq 0,$$

et donc  $\langle x - p(x), y - p(x) \rangle \leq 0$  et cela conclut.

**Solution 5. (Enoncé)**

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  muni du produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q \rangle \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{\infty} P(x)Q(x)e^{-x}.$$

Il s'agit de calculer la distance entre le polynôme  $X^3$  et le sous-espace vectoriel  $F = \text{Vect}(1, X, X^2)$ . On peut par exemple (mais ce n'est pas la seule manière) orthonormaliser la base  $(1, X, X^2)$  par le procédé de GRAAM-SCHMIDT, on obtient alors que :

$$\left(1, X - 1, \frac{X^2 - 4X + 2}{2}\right)$$

est une base orthonormée de  $F$ , on en déduit que la distance recherchée vaut :

$$\begin{aligned} I^2 &= d(X^3, F)^2 = \|X^3\|^2 - \|p_F(X^3)\|^2 \\ &= \langle X^3, X^3 \rangle - \langle X^3, 1 \rangle^2 - \langle X^3, X - 1 \rangle^2 - \left\langle X^3, \frac{X^2 - 4X + 2}{2} \right\rangle^2 \\ &= 720 - 6^2 - 18^2 - 18^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

On en déduit enfin,

$$I = \sqrt{6}.$$

**Solution 6. (Enoncé)**

1. Soit  $u \in H$ , comme  $(u_n)_{n \geq 0}$  est à support fini, la série définissant  $f(u)$  ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls donc est bien convergente et  $f$  est bien définie.

2. Montrons que  $\ker(f)^\perp = \{0\}$ . Soit  $v \in \ker(f)^\perp$ , alors pour tout  $u \in \ker(f)$ ,  $\langle u, v \rangle = 0$ . Comme la suite  $(v_n)_n$  est à support fini, il existe  $m$  tel que  $v_m = 0$ . Soit maintenant  $n \geq 0$  et montrons que  $v_n = 0$ . La suite  $u$  définie par :

$$u_n = n + 1, \quad u_m = -(m + 1), \quad \text{et } \forall k \neq n, m, \quad u_k = 0.$$

et dans  $\ker(f)$ . On a donc :

$$0 = \langle u, v \rangle = (n + 1)\overline{v_n},$$

et donc  $v_n = 0$  et cela conclut.

3. La forme linéaire  $f$  n'est pas nulle donc  $\ker(f) \neq H$ , on n'a pas  $H = \ker(f) \oplus \ker(f)^\perp$ , on peut donc en déduire que  $H$  n'est pas un HILBERT.

**Solution 7. (Enoncé)**

Le résultat est immédiat si  $x = 0$ , on suppose maintenant  $x$  non nul. Soit  $f \in H'$  avec  $\|f\| \leq 1$ . Alors :

$$|f(x)| \leq \|x\| \|f\| \leq \|x\|,$$

donc

$$\|x\| \geq \max\{|f(x)| \in H' \mid \|f\|_{op} \leq 1\}.$$

Il suffit maintenant de remarquer que la forme linéaire  $f : y \mapsto \left\langle y, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle$  est continue et vérifie  $|f(x)| = \|x\|$  et  $\|f\| \leq 1$ .

**Solution 8. (Enoncé)**

Commençons par le sens direct, qui est le plus simple. Soit  $y \in F$ , alors

$$\|x\|^2 = \|x - y + y\|^2 = \|x - y\|^2 + 2\langle x - y, y \rangle + \|y\|^2.$$

Or comme  $x$  et  $y$  sont orthogonaux,

$$\langle x - y, y \rangle = -\langle y, y \rangle - \|y\|^2$$

et donc

$$\|x\|^2 = \|x - y\|^2 - \|y\|^2 \leq \|x - y\|^2$$

et on a donc l'inégalité voulue en passant à la racine, qui est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

Passons maintenant au sens retour. Soit  $y \in F$ , on veut montrer que  $\langle x, y \rangle = 0$ . Considérons pour  $t \in \mathbb{R}$

$$\|x - ty\|^2 = \|x\|^2 - 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2.$$

Comme  $ty \in F$  car  $F$  est un sous-espace vectoriel il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|x - ty\|^2 \geq \|x\|^2$$

et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -2t\langle x, y \rangle + t\|y\|^2 \geq 0 \tag{1}$$

Soit  $t > 0$ , alors en divisant par  $t$  l'égalité (1) (ce qui ne change pas le signe de l'inégalité car  $t > 0$ ) on obtient

$$-2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \geq 0.$$

En faisant tendre  $t$  vers  $0^+$  il vient

$$-2\langle x, y \rangle \geq 0.$$

En considérant cette fois-ci  $t < 0$  on montre

$$-2\langle x, y \rangle \leq 0$$

et donc  $-2\langle x, y \rangle = 0$  et finalement

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Comme cette égalité vaut pour tout  $y \in F$ , on en déduit  $x \in F^\perp$ .

**Solution 9. (Enoncé)**

Par le théorème du supplémentaire orthogonal, on sait que  $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp$ , or  $\overline{F}^\perp = F^\perp$ , il suffit donc de prouver que  $F^\perp = \{0\}$ .

Soit  $u \in F^\perp$ , alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1, \langle x_\lambda, u \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{u_n} \lambda^n = 0.$$

La fonction  $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \overline{u_n} z^n$  est une série entière de rayon de convergence au moins 1 (car  $u_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ ) et est nulle sur le disque unité par hypothèse. Par le principe des zéros isolés,  $f$  est nulle et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{u_n} = 0.$$

D'où  $u = 0$  et cela conclut.

**Solution 10. (Enoncé)**

L'ensemble  $F_\varphi$  est un sous-espace vectoriel de  $H$ , donc est dense dans  $H$  si et seulement si  $F_\varphi^\perp = \{0\}$  (théorème du supplémentaire orthogonal). Soit  $g \in F_\varphi^\perp$ , alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{2\pi} g(x) \overline{(\tau_a \varphi)(x)} dx = \int_0^{2\pi} g(x) \overline{\varphi(x-a)} dx = 0.$$

On écrit  $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g) e^{inx}$  et  $\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) e^{inx}$ , alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{2\pi} g(x) \overline{\varphi(x-a)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g) \overline{c_n(\varphi)} e^{ina} = 0.$$

Donc par unicité du développement en série de FOURIER, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(g) \overline{c_n(\varphi)} = 0.$$

On montre alors facilement que  $F_\varphi$  est dense dans  $H$  si et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\varphi) \neq 0.$$

**Solution 11. (Enoncé)**

Le polynôme  $(X^2 - 1)^n$  est de degré  $2n$ , donc  $L_n$  est de degré  $n$ . Il suffit alors de montrer que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad \langle L_n, L_m \rangle = \delta_{n,m},$$

où  $\delta_{n,m}$  désigne le symbole de KRONECKER. Soit alors  $n \geq m \geq 1$  (le cas  $n = m = 0$  étant immédiat) deux entiers, il vient :

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{\sqrt{m + \frac{1}{2}}}{2^m m!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx,$$

ce qui en faisant une intégration par parties en dérivant  $\frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx$  et en intégrant  $\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx$  donne :

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{\sqrt{m + \frac{1}{2}}}{2^m m!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2 - 1)^m dx,$$

le terme de bord étant nul car  $\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$  s'annule en 1 et -1. En faisant  $m$  intégrations par parties il vient alors :

$$\begin{aligned} \langle L_n, L_m \rangle &= \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{\sqrt{m + \frac{1}{2}}}{2^m m!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2 - 1)^n \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (x^2 - 1)^m dx \\ &= \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{\sqrt{m + \frac{1}{2}} (2m)!}{2^m m!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2 - 1)^n dx. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $n > m$  alors cette dernière intégrale est nulle car :

$$\int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2 - 1)^n dx = \left[ \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 = 0.$$

Et si  $n = m$ , alors

$$\int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2 - 1)^n dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = 2 \int_0^1 (x^2 - 1)^n dx = 2 \times 4^n \frac{n!^2}{(2n+1)!}$$

où la dernière intégrale se ramène à une intégrale de WALLIS avec le changement de variable  $u = \cos(x)$ . On a alors :

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{n + \frac{1}{2}}{4^n n!^2} (2n)! \frac{2 \times 4^n n!^2}{(2n+1)!} = 1,$$

et cela conclut.

**Solution 12. (Enoncé)**

1. Si  $x_n$  converge faiblement vers  $x$  et  $x'$ , alors pour  $y \in H$  :

$$\langle x - x', y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x', y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle x_n, y \rangle - \langle x_n, y \rangle) = 0,$$

et donc  $x = x'$ .

2. Soit  $x \in H$ , alors la série  $\sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2$  est convergente (de somme  $\|x\|^2$ ) et donc en particulier son terme général tend vers 0 et donc la suite  $(e_n)_{n \geq 0}$  converge faiblement vers 0.

3. Soit  $y \in H$  et  $n \geq 0$ , il suffit d'écrire :

$$|\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n - x\| \|y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge faiblement vers  $x$ . La réciproque est fautive, si  $(e_n)_n$  est une base hilbertienne alors  $(e_n)_{n \geq 0}$  converge faiblement vers 0 mais pas fortement vers 0 car  $\|e_n\| = 1$  pour tout  $n \geq 1$ .

4. Soit  $n \geq 0$ , alors :

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\Re(\langle x_n, x \rangle) + \|x\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|x\|^2 - 2\Re(\|x\|^2) + \|x\|^2 = 0,$$

et donc  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ .

**Solution 13. (Enoncé)**

Il est clair que  $T$  est injectif. Pour montrer que  $\text{Im}(T) = H$ , on va montrer que  $\text{Im}(T)$  est fermé et dense dans  $H$ . Commençons par montrer que cet ensemble est dense dans  $H$  en montrant que son orthogonal est nul. Soit  $x \in \text{Im}(T)^\perp$ , alors :

$$0 = \langle Tx, x \rangle \geq \|x\|^2,$$

donc  $x = 0$  et  $\text{Im}(T)^\perp = \{0\}$  i.e.  $\text{Im}(T)$  est dense dans  $H$ . Montrons maintenant que cet ensemble est fermé, soit  $(y_n)_{n \geq 0} \in \text{Im}(T)^\mathbb{N}$  une suite convergente vers  $y \in H$ . Pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $x_n \in H$  tel que  $y_n = Tx_n$ . Montrons que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est de CAUCHY. Soit  $n, m \geq 0$ , alors :

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq \langle T(x_n - x_m), x_n - x_m \rangle \leq \|y_n - y_m\| \|x_n - x_m\|,$$

par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. On a donc

$$\|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\|.$$

Comme la suite  $(y_n)_{n \geq 0}$  est de CAUCHY (elle est convergente), il en est de même pour la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$ . Comme  $H$  est un espace de HILBERT, la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est convergente vers  $x \in H$  et par continuité de  $T$  :

$$y_n = Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Tx.$$

Par unicité de la limite, il vient  $y = Tx \in \text{Im}(H)$  et cela conclut.

**Solution 14. (Enoncé)**

1. On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |\langle Te_n, f_m \rangle|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\langle T^* f_m, e_n \rangle|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|T^* f_m\|^2,$$

l'interversion des sommes étant justifiée par positivité.

2. Soit  $(e'_n)_n$  une autre base hilbertienne. En appliquant de nouveau la question précédente, il vient :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|T^* f_m\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|T^{**} e'_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Te'_n\|^2,$$

et cela conclut.

3. Soit  $x \in H$ , alors :

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle Tx, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, T^* e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|T^* e_n\|^2 = \|x\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \|x\|^2 \|T\|_{HS}^2,$$

donc  $\|Tx\| \leq \|x\| \|T\|_{HS}$  et finalement  $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$ .

4. Une base hilbertienne de  $\ell^2(\mathbb{N})$  est donnée par  $e_n = (\delta_{n,k})_{k \geq 0}$ . On a alors pour  $n \geq 0$

$$T_c(e_n) = \left( \sum_{p=0}^{\infty} c_{k+p} \delta_{n,p} \right)_{k \geq 0} = (c_{k+n})_{k \geq 0}.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T_c(e_n)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{k+n}|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} |c_{n+k}|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |c_m|^2 \sum_{n+k=m} 1 = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) |c_m|^2,$$

l'interversion des sommes étant licite car tout est positif. On en déduit alors que  $T_c$  est un opérateur de HILBERT-SCHMIDT si et seulement si

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) |c_m|^2 < \infty.$$

5. Il est clair que  $\mathcal{L}_{HS}$  est un espace préhilbertien pour le produit scalaire :

$$\langle T, S \rangle_{HS} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle Te_n, Se_n \rangle,$$

montrons maintenant que cet espace est complet. Soit  $(T_n)_n \in \mathcal{L}_{HS}$  une suite de CAUCHY pour  $\|\cdot\|_{HS}$ . Par la question 3, la suite  $(T_n)_n$  est de CAUCHY pour  $\|\cdot\|$  donc comme  $B(H)$  est complet, il existe  $T \in B(H)$  tel que :

$$\|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit  $(e_m)_m$  une base hilbertienne de  $H$ , alors pour  $n \geq 1$  il vient par le lemme de FATOU :

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|Te_m\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|Te_m\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \|Te_m\|^2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{HS}^2 < \infty,$$

donc  $T \in \mathcal{L}_{HS}$ , montrons maintenant que  $T_n$  tend vers  $T$  pour  $\|\cdot\|_{HS}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k, n \geq n_0$  :

$$\|T_n - T_k\|^2 < \varepsilon.$$

On a alors :

$$\|T_n - T\|_{HS}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \liminf_{k \rightarrow \infty} \|(T_k - T_n)e_m\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \|(T_k - T_n)e_m\|^2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_k - T_n\|_{HS}^2 < \varepsilon,$$

où l'on a encore utilisé le lemme de FATOU.

**Solution 15.** (Enoncé)

La forme linéaire  $f \rightarrow Tf(0)$  est continue car pour  $f \in L^2(\mathbb{R})$  :

$$|Tf(0)| \leq \|Tf\|_\infty \leq \|T\| \|f\|_2,$$

donc par le théorème de RIESZ, il existe  $g \in L^2(\mathbb{R})$  tel que pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$Tf(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) \, dx.$$

Soit maintenant  $f \in L^2(\mathbb{R})$  quelconque, alors :

$$(Tf)(x) = \tau_{-x}(Tf)(0) = T(\tau_{-x}(f))(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t+x)g(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(u-x) \, du = (f \star \tilde{g})(x),$$

où la fonction  $\tilde{g}$  est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(x) = g(-x).$$