Questions et Exercices sur la leçon 224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Laurent Montaigu

Ce document vise à regrouper quelques questions qui peuvent être posées par le jury pour la leçon 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions. Il y a aussi des exercices.

Contents

1 Questions 3

2 Exercices 4

3 Solutions 6

1 Questions

Voici une liste de questions auxquelles il faudrait être capable de répondre (relativement) rapidement :

- Donner les développements limités usuels (formule explicite et premiers termes) $(\cos, \sin, \ln, \ldots)$.
- Donner deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $u_n - v_n \to 0$ mais $u_n \not\sim v_n$.
- Donner deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n$ ne tende pas vers 0.
- Donner l'exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui domine tout polynôme en $+\infty$ mais est dominée par toutes fonctions de la forme $\exp(\alpha x)$ avec $\alpha > 0$.
- Montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ désigne la série harmonique.
- Donner un exemple d'une fonction admettant un DL d'ordre 2 en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.
- Donner un équivalent de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ pour tout $n \geq 0$. A-t-on $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur un voisinage de 0 ?

et un VRAI/FAUX :

- Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^n \sim v_n^n$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour $\alpha \geq 0$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $(u_n)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang, alors $(v_n)_n$ est aussi décroissante à partir d'un certain rang.
- Si f est deux fois dérivable en 0 et vérifie $f(x) = 1 + ax + bx^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0 alors $f''(0) = b$.

2 Exercices

Exercice 1 (Solution)
Déterminer un équivalent de $u_n = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$.

Exercice 2 (Solution)
Déterminer :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}.$$

Exercice 3 (Solution)
Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites strictement positives qui vérifient : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

1. A-t-on $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$?
2. On suppose que v_n ne tend pas vers 1. Montrer que $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Exercice 4 (Solution)
Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $e^{(n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^\alpha}$.

Exercice 5 (Solution)
Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 (Solution)
Donner un développement asymptotique en $+\infty$ à n termes de $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

Exercice 7 (Solution)
On considère l'équation (E) : $\tan(x) = x$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution x_n dans $]n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
2. Déterminer un équivalent de x_n.
3. Déterminer un développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$. *On utilisera une relation entre x_n et* $\arctan(x_n)$.

Exercice 8 (Solution)
Soit $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ définie sur $]1, +\infty[$. Montrer que :

$$\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

Exercice 9 (Solution)
Déterminer l'ensemble des couples (α, β) de réels strictement positifs tels que, pour une infinité de valeurs de n, on ait :

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^\beta. \qquad (\star)$$

Exercice 10 (Solution)
Montrer que l'équation :

$$\sin(x) = \frac{1}{\ln(x)}$$

admet, pour $n \geq 1$ une unique solution x_n dans $]2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}[$. Donner ensuite un développement asymptotique de x_n à deux termes. *On pourra utiliser la même démarche que pour l'exercice 7.*

Exercice 11 (Solution)
Montrer l'équivalent suivant :

$$\sinh(\sin(x)) - \sin(\sinh(x)) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{x^7}{45}.$$

Exercice 12 (Solution)
Soit pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

1. Etudier la convergence de $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $T_n = \dfrac{\ln(n)^2}{2} + c + o(1)$.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$. *On simplifiera l'expression $S_{2n} + T_{2n}$.*

Exercice 13 (Solution)
Soit $\alpha > 0$. Déterminer une fonction f telle que, pour toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par u_0 suffisamment proche de 0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, on ait :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Exercice 14 (Solution)
Soit pour $x > 0$,

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2(t) + x^2 \cos^2(t)}} \text{ et } g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t) + x^2 \cos^2(t)}} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $f(x) - g(x)$ tend vers une limite finie quand $x \to 0^+$ et la déterminer.
2. En déduire que :

$$f(x) \underset{x \to 0^+}{=} -\ln(x) + 2\ln(2) + o(1).$$

   On fera le changement de variable $u = \sin(t)$ dans $g(x)$.

Exercice 15 (Solution)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $xf'(x) = o(f(x))$ quand $x \to +\infty$.

1. Donner un exemple d'une telle fonction f.
2. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$. Montrer que $f(x) = o(x^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$ au voisinage de $+\infty$.
3. Montrer que la conclusion de la question précédente reste valide même si f n'est pas supposée strictement positive. (On considèrera la fonction g définie par $g(x) = 1 + f(x)^2$).

3 Solutions

Solution 1. (Enoncé)
On va trouver une autre expression de u_n,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)\frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

On utilise alors la formule de Stirling pour obtenir :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}e^{-2n}}{2^n\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}} = 2^{n+\frac{1}{2}}n^n e^{-n}.$$

Solution 2. (Enoncé)
On va faire un développement limité du numérateur et du dénominateur. Pour le dénominateur, en posant $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ on a :

$$1-\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) = f(1)-f(x) \underset{x\to1}{\sim} -f'(1)(x-1) \underset{x\to1}{\sim} -\frac{\pi}{2}(x-1),$$

Il suffit donc de faire un développement limité à l'ordre 1 au numétateur. On pose $x = 1+h$ et on a alors :

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{4+h} = 2(1+\frac{h}{4})^{\frac{1}{2}} = 2(1+\frac{h}{8}+o(h)) = 2+\frac{h}{4}+o(h) = 2+\frac{x-1}{4}+o(x-1),$$

et

$$\sqrt[3]{3x+5} = \sqrt[3]{8+3h} = 2(1+\frac{3}{8}h)^{\frac{1}{3}} = 2(1+\frac{h}{8}+o(h)) = 2+\frac{h}{4}+o(h) = 2+\frac{x-1}{4}+o(x-1).$$

D'où

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)} = \frac{2+\frac{x-1}{4}+o(x-1)-(2+\frac{x-1}{4}+o(x-1))}{-\frac{\pi}{2}(x-1)+o(x-1)} = \frac{o(x-1)}{-\frac{\pi}{2}(x-1)+o(x-1)} \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0.$$

Solution 3. (Enoncé)
1. Pas forcément, prenons $u_n = 1$ et $v_n = 1+\frac{1}{n}$, alors :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n,$$

mais

$$\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\not\sim} \ln(u_n) = 0.$$

On rappelle qu'une suite est équivalente à 0 si et seulement si elle est nulle à partir d'un certain rang.
2. On écrit $u_n = v_n + o(v_n) = v_n(1+o(1))$, on a alors :

$$\ln(u_n) = \ln(v_n) + \ln(1+o(1)) = \ln(v_n) + o(1).$$

Or $o(1) = o(\ln(v_n))$ car $\ln(v_n)$ ne tend pas vers 0 car v_n ne tend pas vers 1. Donc,

$$\ln(u_n) = \ln(v_n) + o(\ln(v_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n).$$

Solution 4. (Enoncé)
Si $\alpha = 0$, les deux suites $(e^{n^\alpha})_{n\geq1}$ et $(e^{(n+1)^\alpha})_{n\geq1}$ sont égales donc équivalentes. Si $\alpha < 0$, alors

$$e^{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{(n+1)^\alpha}.$$

On suppose donc $\alpha > 0$. La suite $(e^{n^\alpha})_n$ ne s'annule pas, donc on a $e^{(n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^\alpha}$ si et seulement si :

$$\frac{e^{(n+1)^\alpha}}{e^{n^\alpha}} = e^{(n+1)^\alpha - n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

si et seulement si $(n+1)^\alpha - n^\alpha$ tend vers 0. Or :

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = \alpha n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1}).$$

On en déduit que $e^{(n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^\alpha}$ si et seulement si

$$\alpha < 1.$$

Solution 5. (Enoncé)
L'idée est de faire une intégration par parties. Soit $x>0$, alors :

$$\begin{aligned}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_x^\infty \frac{2t}{2t}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_x^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or la fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ est positive, intégrable sur $[1,+\infty[$, et

$$\frac{e^{-t^2}}{t^2} = o\left(e^{-t^2}\right)$$

donc par intégrations des relations de comparaisons il vient :

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^\infty e^{-t^2}\right).$$

On en déduit alors :

$$\frac{e^{-x^2}}{2x} = \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + o\left(\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right),$$

et finalement

$$\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Solution 6. (Enoncé)
On va faire des intégrations par parties :

$$\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{\ln(t)}\right]_2^x + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)^2},$$

où l'on a intégré la fonction $x\mapsto 1$ et dériver la fonction $x\mapsto \frac{1}{\ln(x)}$. En faisant n intégrations par parties, il vient :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{(k-1)!t}{\ln(t)^k}\right]_2^x + \int_2^x \frac{n!}{\ln(t)^{n+1}}.$$

Or,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)^{n+1}} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)^{n+1}} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)^{n+1}} \leq \frac{\sqrt{x}-2}{\ln(2)^{n+1}} + \frac{x-\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})^{n+1}} = o\left(\frac{x}{\ln(x)^n}\right),$$

on en déduit alors :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n (k-1)!\frac{x}{\ln(x)^k} + o\left(\frac{x}{\ln(x)^n}\right)$$

Solution 7. (Enoncé)
1. La fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ est continue sur $]n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}[$, strictement croissante et :

$$\lim_{x \to (n\pi - \frac{\pi}{2})^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to (n\pi + \frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty,$$

donc par théorème de la bijection, f s'annule en exactement un $x_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}[$ et x_n et solution de (E).
2. De l'inégalité :

$$n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2},$$

on en déduit que :

$$1 - \frac{1}{2n} \leq x_n \leq 1 + \frac{1}{2n},$$

et donc

$$x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n\pi,$$

par encadrement.
3. On a par π-périodicité de tan,

$$x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi).$$

Or $x_n - n\pi \in] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, donc :

$$\arctan(x_n) = \arctan(\tan(x_n - n\pi)) = x_n - n\pi,$$

d'où :

$$x_n = n\pi + \arctan(x_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right),$$

par la formule $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ valable pour $x > 0$. En utilisant que :

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

au voisinage de $+\infty$, il vient :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x_n} + \frac{1}{3x_n^3} + o\left(\frac{1}{x_n^3}\right).$$

Enfin, comme $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n\pi$, on a finalement :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Solution 8. (Enoncé)
On va faire une comparaison série intégrale à $x > 1$ fixé. Soit $x > 1$ fixé, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ donc on a pour tout $n \geq 2$:

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \mathrm{d}t.$$

En sommant les inégalités précédentes de $n = 2$ à $+\infty$ il vient :

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \zeta(x) - 1 \leq \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

En calculant les deux intégrales il vient :

$$\frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}$$

d'où :

$$2^{1-x} \leq (x-1)(\zeta(x) - 1) \leq 1.$$

Et on obtient bien l'équivalent souhaité.

Solution 9. (Enoncé)
Par une comparaison série-intégrale, on sait que pour $\alpha > 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

De plus, pour tout $n \geq 1$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^\beta = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^\beta \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{2\beta}}{2^\beta}.$$

Comme l'équation ($\star$) est vraie pour une infinité de n, les deux équivalents obtenus sont nécessairement équivalents entre eux. On a donc :

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{2\beta}}{2^\beta}.$$

On a donc :

$$\alpha+1 = 2\beta \text{ et } \alpha+1 = 2^\beta.$$

Donc en particulier $2^\beta = 2\beta$ dont les deux solutions positives sont $\beta = 1$ et $\beta = 2$. Mais comme $\beta = \alpha + 1 > 1$, la solution $\beta = 1$ est exclue et on trouve alors comme unique couple solution :

$$(\alpha, \beta) = (1, 2).$$

Inversement, pour ce couple l'égalité ($\star$) est vraie pour tout $n \geq 1$ donc *a fortiori* pour une infinité d'entiers n.

Solution 10. (Enoncé)
La fonction $f : x \mapsto \sin(x) - \frac{1}{\ln(x)}$ est continue et strictement croissante sur $]2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}[$ pour tout $n \geq 1$ et vérifie :

$$f(2n\pi) = -\frac{1}{\ln(2n\pi)} < 0 \text{ et } f(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{\ln(2n\pi + \frac{\pi}{2})} > 0,$$

car $2n\pi + \frac{\pi}{2} > e$. La fonction f s'annule donc en un seul point sur $]2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}[$, que l'on note x_n.
On a immédiatement,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\pi.$$

De plus, $x_n - 2n\pi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc :

$$\arcsin\left(\frac{1}{\ln(x_n)}\right) = \arcsin(\sin(x_n)) = \arcsin(\sin(x_n - 2n\pi)) = x_n - 2n\pi,$$

donc :

$$x_n = 2n\pi + \arcsin\left(\frac{1}{\ln(x_n)}\right).$$

On sait qu'au voisinage de 0,

$$\arcsin(y) = y + o(y),$$

et donc :

$$\arcsin\left(\frac{1}{\ln(x_n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(2n\pi)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)},$$

où le deuxième équivalent vient du résultat de l'exercice 3. On a alors :

$$x_n = 2n\pi + \frac{1}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$

Solution 11. (Enoncé)
On sait que,

$$\sinh(\sin(x)) = \sin(x) + \frac{\sin^3(x)}{6} + \frac{\sin^5(x)}{120} + \frac{\sin^7(x)}{7!} + o(x^7).$$

Or $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$,

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)\right)^3 \\ &= x^3 - 3 \times \frac{x^5}{6} + x^7\left(3 \times \frac{1}{6^2} + 3 \times \frac{1}{120}\right) + o(x^7) \\ &= x^3 - \frac{x^5}{2} + x^7\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{40}\right) + o(x^7).\end{aligned}$$

On obtient ce développement en un minimum de calculs en raisonnement comme ceci : on note $a+b+c+d+e$ le développement limité de sin à l'ordre 7 ($a = x$, $b = -\frac{x^3}{6}$,$c = \frac{x^5}{120}$,$d = -\frac{x^7}{7!}$,$e = o(x^7)$). On a donc :

$$\sin^3(x) = (a+b+c+d+e)^3.$$

La fonction $\sin^3$ est impaire, donc n'admet que des termes impairs dans son développement limité. Le terme en x est nul (car $\sin^3(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x^3$), celui en x^3 ne peut s'obtenir que par le terme a^3 et il n'y a qu'une possibilité de l'obtenir en développant. Le terme en x^5 ne peut s'obtenir qu'avec le terme a^2b et il y a 3 manières d'obtenir ce terme en développant ($a \times a \times b$, $a \times b \times a$, $b \times a \times a$) d'où le $3 \times \frac{1}{6}$. Enfin, le terme en x^7 peut s'obtenir soit avec ab^2 soit avec a^2c et il y a dans les deux cas 3 façon d'obtenir ces termes.
De même on trouve,

$$\sin^5(x) = x^5 - \frac{5x^7}{6} + o(x^7) \text{ et } \sin^7(x) = x^7 + o(x^7).$$

On a alors,

$$\begin{aligned}\sinh(\sin(x)) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13x^7}{120}\right) + \frac{1}{120}\left(x^5 + \frac{5x^7}{6}\right) + \frac{x^7}{7!} + o(x^7) \\ &= x - \frac{x^5}{15} + \frac{8x^7}{120} + o(x^7).\end{aligned}$$

De même,

$$\sin(\sinh(x)) = x - \frac{x^5}{15} - \frac{8x^7}{120} + o(x^7).$$

Donc,

$$\sinh(\sin(x)) - \sin(\sinh(x)) = \frac{x^7}{45} + o(x^7) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x^7}{45}.$$

Solution 12. (Enoncé)
1. La convergence de $(S_n)_n$ est immédiate par le critère des séries alternées. En effet, la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k\geq 3}$ est positive, décroissante (étudier la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$) et de limite nulle.
Comme pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{\ln(k)}{k} \geq \frac{1}{k},$$

la suite $(T_n)_n$ diverge par comparaison des séries à termes positifs et divergence de la série harmonique.
2. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est décroissante pour $x \geq e$ et d'intégrale divergente, on a donc par comparaison série-intégrale,

$$T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

Soit $w_n = T_n - \frac{\ln(n)^2}{2}$, alors :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2}(\ln(n)^2 - \ln(n+1)^2) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2}\left(-2\ln(n)\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{1}{n})^2)\right) \\ &= \frac{\ln(n)}{n+1} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \frac{\ln(n)}{n(n+1)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n\geq 1}(w_{n+1} - w_n)$ converge et donc $(w_n)_n$ converge, en notant $c = \lim_{n\to\infty} w_n$ on a :

$$T_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)^2}{2} + c + o(1).$$

3. Soit $n \geq 1$, alors :

$$S_{2n} + T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(1+(-1)^k)\frac{\ln(k)}{k} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} = \ln(2)H_n + T_n$$

Donc $S_{2n} = T_n + \ln(2)H_n - T_{2n}$ et :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \ln(2)\ln(n) + \ln(2)\ln(n) + o(1) + c + \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(2n)^2}{2} - c + o(1) \\ &= \ln(2)\ln(n) + \ln(2)\gamma + \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(2)^2}{2} - \ln(2)\ln(n) - \frac{\ln(n)^2}{2} + o(1) \\ &= \ln(2)(\gamma - \frac{\ln(2)}{2}) + o(1) \end{aligned}$$

Et donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n} = \ln(2)\left(\gamma - \frac{\ln(2)}{2}\right).$$

Solution 13. (Enoncé)
Ecrivons très formellement :

$$u_{n+1} \sim \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha} - \alpha\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sim u_n - \alpha u_n^{1+\frac{1}{\alpha}}.$$

Posons alors la fonction f définie par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = x - \alpha x^{\alpha+1}.$$

On peut alors se référer à https://adrienlaurent.net/Agregation/DVP.pdf#page82 pour la preuve du fait que cette fonction convient.

Solution 14. (Enoncé)
1. Soit $x > 0$, alors :

$$f(x) - g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos(t))}{\sqrt{\sin^2(t) + x^2\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t.$$

On va utiliser le théorème de convergence dominée pour calculer cette limite. La fonction $t \mapsto \frac{(1-\cos(t))}{\sqrt{\sin^2(t)+x^2\cos^2(t)}}$ converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction :

$$t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{\sin(t)},$$

quand x tend vers 0^+. De plus, pour $x \in]0,1]$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a :

$$\left|\frac{1-\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+x^2\cos^2(t)}}\right| \leq \frac{1-\cos(t)}{\sin(t)} \in L^1\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right),$$

car la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{\sin(t)}$ se pronlonge en 0 en une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a donc :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) - g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Or, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = -2\left[\ln\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln(2).$$

2. Soit $x \in]0,1[$, alors le changement de variable $u = \sin(t)$ dans l'intégrale g donne :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+x^2(1-u^2)}}$$

or une primitive de $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ est $u \mapsto \ln(u+\sqrt{u^2+1})$ (cela peut se retrouver en posant $u = \sinh(y)$) donc une primitive de $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+a^2u^2}}$ est $\frac{1}{a}\ln(ax+\sqrt{(ax)^2+1})$. On en déduit alors :

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\left(\frac{u\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{1}{x}\right)$$

Il suffit donc de faire un développement asymptotique de g en 0. On a :

$$\ln(1+\sqrt{1-x^2}) = \ln(2+o(x)) = \ln(2)+o(x),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+o(x),$$

donc,

$$g(x) = (\ln(2)+o(x))\,(1+o(x)) - \ln(x)\,(1+o(x)) = -\ln(x)+\ln(2)+o(x).$$

Et on en déduit,

$$f(x) = -\ln(x)+2\ln(2)+o(1).$$

Solution 15. (Enoncé)
1. La fonction $f : x \mapsto \ln(x^2+1)$ convient, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xf'(x) = \frac{2x^2}{x^2+1},$$

et donc $xf'(x) = o(f(x))$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ et $g(x) = \frac{f(x)}{x^\varepsilon}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad g'(x) = \frac{f'(x)x^\varepsilon - \varepsilon x^{\varepsilon-1}f(x)}{x^{2\varepsilon}} = \frac{xf'(x)-\varepsilon f(x)}{x^{\varepsilon+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\varepsilon\frac{f(x)}{x^{\varepsilon+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\varepsilon\frac{g(x)}{x},$$

par hypothèse. Comme la fonction f est supposée strictement positive, on peut écrire :

$$\frac{g'(x)}{g(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\varepsilon}{x},$$

donc par intégration des relations de comparaisons ($x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction positive d'intégrale divergente sur $[1, +\infty[$), on a :

$$\int_1^x \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} -\varepsilon \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

ce qui donne :

$$\ln(g(x)) - \ln(g(1)) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\varepsilon \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

donc

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et cela conclut.

3. La fonction g vérifie les mêmes hypothèses que la fonction f, en effet g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xg'(x) = 2xf'(x)f(x) = o(f(x)^2) = o(g(x)).$$

De plus la fonction g est strictement positive donc par la question 2. on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad g(x) = o(x^\varepsilon),$$

et on en déduit facilement le même résultat pour f.