Questions et exercices sur la leçon 230 : Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Laurent Montaigu

Ce document vise à regrouper quelques questions qui peuvent être posées par le jury pour la leçon 230 : Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

1 Questions

Voici une liste de questions auxquelles il faudrait être capable de répondre (relativement) rapidement :

- Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

- Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- Rappeler pour quelles valeurs de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge.

- Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$.

et un VRAI/FAUX :

- Si $(u_n)_n$ tend vers 0, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

- Si $u_n \sim v_n$ alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

- La somme de deux séries divergentes est divergente.

- La somme de deux séries convergentes est convergente.

- La somme d'une série convergente et d'une série divergente est convergente.

- Si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.

- Si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

- Si $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et si σ est une permutation de $\mathbb{N}$, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_{\sigma(n)}$ converge et est de même somme.

- Si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2 Exercices

Exercice 1 (Solution)
Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{e^{in\theta}}{n}$, $\theta\in\mathbb{R}$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}+(-1)^n}$.
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^n}{(2n)!}$.
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n}$

Exercice 2 (Solution)
Soit $\alpha<1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

1. En faisant une comparaison série/intégrale.
2. En montrant d'abord que :
$$(n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}(1-\alpha)n^{-\alpha}.$$

Exercice 3 (Solution)
Soit $(u_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ converge.

1. On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ est positive, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n^2$ converge.
2. Donner un exemple où $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n^2$ diverge.

Exercice 4 (Solution)
Soit pour $n\geq 1$, $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

1. Montrer que la série de terme général $(u_n)_n$ converge et que $\displaystyle R_n=\sum_{k=n}^{\infty}u_k=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
2. Montrer que pour $N\geq 1$:
$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}.$$
3. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}R_k$ en fonction de nR_{n+1} et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}R_n$.

Exercice 5 (Solution)
Le but de cet exercice est de donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n^{\frac{1}{3}}$ converge mais $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ diverge.

1. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ peut-elle être positive ?

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par :

$$u_{3n} = \frac{4}{3(n+1)}, \quad u_{3n+1} = u_{3n+2} = -\frac{1}{6(n+1)}.$$

On note pour $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^{\frac{1}{3}}$.

2. Simplifier pour $n \geq 0$,
$$u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}.$$
En déduire que $S_{3n-1} = H_n$ où H_n désigne la série harmonique.

3. En déduire que $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

4. Montrer que pour $n \geq 0$,
$$u_{3n}^{\frac{1}{3}} + u_{3n+1}^{\frac{1}{3}} + u_{3n+2}^{\frac{1}{3}} = 0.$$
En déduire que $T_{3n-1} = 0$ pour tout $n \geq 1$.

5. Montrer que les suites $(T_{3n})_{n\geq 1}$ et $(T_{3n+1})_{n\geq 1}$ sont convergentes de limites nulles.

6. Conclure que $\sum_{n\geq 1} u_n^{\frac{1}{3}}$ converge.

7. Donner une suite $(u_n)_n$ à valeurs complexes telle que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et $\sum_{n\geq 1} u_n^3$ diverge.

Exercice 6 (Solution)

Donner un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$ à 3 termes.

Exercice 7 (Solution)

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' soit intégrable sur $[1, +\infty[$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$:
$$\left| \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \right| \leq \int_n^{n+1} |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire que $\sum_{n\geq 1} f(n)$ et $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

3. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\ln(n))}{n}$.

Exercice 8 (Solution)

Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^\star$ telle que $\sum_{n\geq 0} z_n$ converge. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{z_n}{n}$ converge et $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{z_k}{k} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 9 (Solution)

Soit $(r, \theta) \in]-1, 1[\times \mathbb{R}$. Montrer l'existence et calculer $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$.

Exercice 10 (Solution)

Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{N}^\star)^3$ et $z \in \mathbb{C}$ avec $|z|< 1$. Montrer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{bn}}{1-z^{an+c}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{cn}}{1-z^{an+b}}$.

Exercice 11 (Solution)

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

On pourra faire une comparaison série/intégrale.

3 Solutions

Solution 1. (Enoncé)
1. On a pour $n \geq 2$:
$$\ln(n)^{\ln(n)} = e^{\ln(n)\ln(\ln(n))} = n^{\ln(\ln(n))}.$$
Donc pour $n \geq e^{e^2}$,
$$\frac{1}{\ln(n)^{\ln(\ln(n))}} \leq \frac{1}{n^2}$$
et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$ converge.

2. On peut se contenter de traiter le cas où $\theta \in [0; 2\pi[$. Il est clair que la série diverge pour $\theta = 0$, montrons que la série converge dans tous les autres cas. On va faire une transformation d'Abel en "intégrant" $e^{in\theta}$ et en "dérivant" $\frac{1}{n}$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$, alors :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} = \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)}.$$
Or un calcul de série géométrique donne pour $n \geq 1$:
$$S_n = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}},$$
car $e^{i\theta} \neq 1$. On en déduit que la suite $(S_n)_n$ est bornée (car $|1 - e^{in\theta}| \leq 2$) et donc :
$$\frac{S_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$
et donc la série $\sum_{k\geq 1} \frac{S_k}{k(k+1)}$ converge. De plus, comme
$$\frac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
là encore car la suite $(S_n)_n$ est bornée, on en déduit que $\sum_{k\geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge.

3. On ne peut pas utiliser le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}} + (-1)^n}\right)_n$ n'est pas décroissante. On va faire un développement asymptotique :
$$\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}} + \left(\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^2 - o\left(\left(\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^2\right)\right),$$
ce qui donne après simplification :
$$\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right).$$
La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}$ est convergente par le critère spécial des séries alternées, et la série :
$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)\right),$$
est divergente car son terme général est équivalent à $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$. Ainsi, la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}} + (-1)^n}$$
est divergente en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente.

4. On peut utiliser la règle de d'Alembert, en montrant que :

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{n^n}{(2n)!}} = \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2(2n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc la série considérée converge.
On peut aussi chercher un équivalent du terme général en utilisant la formule de Stirling :

$$\frac{n^n}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n}{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\frac{e^{2n}}{4^n n^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\left(\frac{e^2}{4n}\right)^n,$$

et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\left(\frac{e^2}{4n}\right)^n$ converge car

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\left(\frac{e^2}{4n}\right)^n \leq \frac{1}{2^n},$$

pour n assez grand.

5. On met le terme général sous une même exponentielle pour y voir plus clair :

$$\frac{n^{\ln(n))}}{\ln(n)^n} = e^{\ln(n)^2 - n\ln(\ln(n))}$$

, comme $\ln(n)^2 - n\ln(\ln(n))$ tend vers $-\infty$, on voit que le terme général tend vers 0 assez vite et l'on peut penser que la série va converger. Pour rendre ça rigoureux, on va montrer que $n^2\frac{n^{\ln(n))}}{\ln(n)^n}$ tend vers 0. Soit $n \geq 2$, alors :

$$n^2\frac{n^{\ln(n))}}{\ln(n)^n} = e^{2\ln(n)+\ln(n)^2 - n\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et l'on conclut que la série converg.

Solution 2. (Enoncé)
1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante donc pour $k \geq 1$:

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$

En sommant ces inégalités de $k=1$ à n, il vient :

$$\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_0^n\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$

Ce qui donne encore :

$$\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha}-1\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

en divisant par $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} > 0$, il vient :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leq 1,$$

donc en passant à la limite il vient par encadrement :

$$\frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

soit encore :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

2. On fait un développement limité de $(n+1)^{1-\alpha}$:
$$(n+1)^{1-\alpha} = n^{1-\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = n^{1-\alpha}\left(1+\frac{1-\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^{1-\alpha}+(1-\alpha)n^{-\alpha}+o(n^{-\alpha}).$$

On en déduit donc :
$$(n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha} = (1-\alpha)n^{-\alpha}+o(n^{-\alpha}) \underset{n\to+\infty}{\sim} (1-\alpha)n^{-\alpha}.$$

La série $\sum_{n\geq 1}\left((n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\right)$ est divergente car la suite $(n^{1-\alpha})_n$ diverge, on en déduit donc que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ diverge et la sommation des relations de comparaisons donne :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{1-\alpha}-k^{1-\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha}(n+1)^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Solution 3. (Enoncé)
1. Comme la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, la suite $(u_n)_n$ tend vers 0. Comme elle est de plus positive, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$:
$$0 \leq u_n \leq 1.$$

On a donc pour tout $n \geq n_0$:
$$0 \leq u_n^2 \leq u_n,$$

et donc $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ par comparaison avec une série à termes positifs.

2. Le même raisonnement que précédemment montre que la suite $(u_n)_n$ ne peut être négative non plus. Le plus simple est de prendre une suite $(u_n)_n$ qui alterne. Par exemple, prenons la suite $(u_n)_n$ définie par :
$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge par le critère spécial des séries alternées, et $\sum_{n\geq 1} u_n^2$ diverge car c'est la série harmonique.

Solution 4. (Enoncé)
1. On a $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est absolument convergente donc convergente. De plus, la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ est positive décroissante de limite nulle, donc par le critère spécial des séries alternées :
$$|R_n| \leq \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Il suffit d'échanger les deux sommes :
$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{1\leq n\leq k\leq N}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}.$$

3. On a pour $n \geq 1$:
$$\sum_{k=1}^{n} R_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k}^{\infty} u_p.$$

On veut intervertir les deux symboles sommes, on a besoin d'une hypothèse de sommabilité :
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k}^{\infty}|u_p| = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k}^{\infty}\frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\min(n,p)}\frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{p^2} + \sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} + \sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{n}{p^2} < \infty.$$

La famille $\left(\frac{(-1)^p}{p^2}\right)_{1\leq k\leq n, k\leq p}$ est donc sommable et :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k}^{\infty} u_p = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\min(n,p)} \frac{(-1)^p}{p^2} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^p}{p^2} + \sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p} + nR_{n+1}. \qquad (\star)$$

4. Comme $R_{n+1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par la question 1, on a :

$$nR_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc en passant à la limite dans ($\star$), il vient :

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_k = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} = -\ln(2).$$

Solution 5. (Enoncé)

1. Non, comme $\sum_{n\geq 1} u_n^{\frac{1}{3}}$ converge, u_n tend vers 0 donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$|u_n| = u_n \leq 1.$$

Donc pour $n \geq n_0$:

$$0 \leq u_n \leq u_n^{\frac{1}{3}},$$

et finalement $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge par comparaison.

2. Il suffit d'écrire :

$$u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

On a alors :

$$S_{3n-1} = \sum_{k=0}^{3n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{3k} + u_{3k+1} + u_{3k+2}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n.$$

3. La suite extraite $(S_{3n-1})_{n\geq 1}$ diverge, par conséquent $(S_n)_{n\geq 1}$ diverge.

4. Il suffit de montrer que :

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

En passant au cube, cette égalité est équivalente à :

$$\frac{4}{3} = 8 \times \frac{1}{6},$$

qui est bien vraie. L'égalité $T_{3n-1} = 0$ suit le même raisonnement que la preuve de $S_{3n-1} = H_n$.

5. On a pour $n \geq 1$:

$$T_{3n} = T_{3n-1} + u_{3n} = u_{3n} = \frac{4}{3(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On montre de même que la suite $(T_{3n+1})_{n\geq 0}$ tend vers 0.

6. Par les questions 4 et 5, les trois suites $(T_{3n-1})_{n\geq 1}$, $(T_{3n})_{n\geq 1}$ et $(T_{3n+1})_{n\geq 1}$ convergent vers 0. Montrons alors que $(T_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$ tels que :

$$\forall n \geq n_1, \quad |T_{3n-1}| \leq \varepsilon,$$

$$\forall n \geq n_2, \quad |T_{3n}| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall n \geq n_3, \quad |T_{3n+1}| \leq \varepsilon.$$

Soit $n_0 = 3\max(n_1, n_2, n_3) + 1$ et $n \geq n_0$, n est de la forme $3k-1$, $3k$, $3k+1$ avec $k \geq n_0$, donc dans tous les cas :

$$|T_n| \leq \varepsilon,$$

et cela conclut.

7. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{e^{\frac{2i\pi n}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}},$$

en effet $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge par une transformation d'Abel (voir Exercice 1) et pour tout $n \geq 1$:

$$u_n^3 = \frac{1}{n},$$

donc $\sum_{n\geq 1} u_n^3$ diverge.

Solution 6. (Enoncé)
La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est positive décroissante pour $x \geq e$ et d'intégrale divergente, on a donc par comparaison série-intégrale,

$$T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

Pour trouver le prochain terme du développement asymptotique, on considère la suite $w_n = T_n - \frac{\ln(n)^2}{2}$, on trouve un équivalent de $w_{n+1} - w_n$:

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2}(\ln(n)^2 - \ln(n+1)^2) \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2}\left(-2\ln(n)\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{1}{n})^2)\right) \\
&= \frac{\ln(n)}{n+1} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \\
&= \frac{\ln(n)}{n(n+1)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \\
&= \frac{3\ln(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\sum\limits_{n\geq 1}(w_{n+1} - w_n)$ converge et donc $(w_n)_n$ converge, en notant $c = \lim_{n\to\infty} w_n$ on a :

$$T_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)^2}{2} + c + o(1).$$

Pour trouver le terme suivant, on continue le même processus en considérant la suite $v_n = T_n - \frac{\ln^2(n)}{2} - c = w_n - c$ et on cherche un équivalent de $v_{n+1} - v_n$. On a pour $n \geq 1$:

$$v_{n+1} - v_n = w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\ln(n)}{2n^2},$$

et donc $\sum_{n\geq 1}(v_{n+1}-v_n)$ est convergente. De plus, par sommation des relations de comparaisons on obtient :

$$\sum_{k=n}^{\infty}(v_{k+1}-v_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\ln(k)}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}\int_n^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

où la dernière équivalence vient d'une comparaison série/intégrale.
On calcule enfin cette derniere intégrale en faisant une intégration par parties :

$$\int_n^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

On en déduit enfin :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(n)}{2}+c+\frac{3\ln(n)}{2n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Solution 7. (Enoncé)
1. Soit $n \geq 1$, on a :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) = \int_n^{n+1}(f(t)-f(n))\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1}\int_n^t f'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{n\leq x\leq t\leq n+1} f'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

On intervertit les intégrales avec le théoreme de Fubini et l'on obtient :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) = \int_n^{n+1}\int_x^{n+1} f'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} f'(x)(n+1-x)\,\mathrm{d}x.$$

On a donc par inégalité triangulaire :

$$\left|\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)\right| \leq \int_n^{n+1}|f'(x)|\underbrace{(n+1-x)}_{\leq 1}\,\mathrm{d}x \leq \int_n^{n+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

2. Comme la fonction f' est intégrable, par comparaison, la série de terme général :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n),$$

est absolument convergente. Or pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k)\right) = \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

ce qui montre bien que $\sum_{n\geq 1} f(n)$ et $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

3. On applique le résultat de la question précédente à $f : t \mapsto \frac{\sin(\ln(t))}{t}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ et pour tout $t \geq 1$:

$$f'(t) = -\frac{\sin(\ln(t))}{t^2}+\frac{\cos(\ln(t))}{t^2},$$

qui est clairement intégrable sur $[1:+\infty[$. Pour déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} f(n)$, il suffit de déterminer la nature de $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Or le changement de variable $u = \ln(x)$ (un changement de variable ne change pas la nature d'une intégrale) donne :

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\sin(u)\mathrm{d}u,$$

or l'intégrale $\int_0^\infty \sin(u)\mathrm{d}u$ est clairement divergente, on en déduit que :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(\ln(n))}{n},$$

diverge.

Solution 8. (Enoncé)
Faisons une transformation d'Abel. Soit $R_n = \sum_{k=n}^\infty z_k$. On a pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{R_k - R_{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{R_k}{k(k-1)} = R_1 - \frac{R_{n+1}}{n} + \sum_{k=2}^n \frac{R_k}{k(k-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} R_1 + \sum_{k=2}^\infty \frac{R_k}{k(k-1)}.$$

Donc $\sum_{n\geq 1}\frac{z_n}{n}$ converge.

De plus, une autre transformation d'Abel donne pour $n\geq 1$:

$$\sum_{k=n}^\infty \frac{z_k}{k} = \frac{R_n}{n} + \sum_{k=n+1}^\infty \frac{R_k}{k(k-1)}$$

Or $\dfrac{R_k}{k(k-1)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k(k-1)}\right) = o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ et donc par sommation des relations de comparaisons,

$$\sum_{k=n}^\infty \frac{R_k}{k(k-1)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^2}\right).$$

Une comparaison série intégrale donne :

$$\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc,

$$\sum_{k=n}^\infty \frac{z_k}{k} = \frac{R_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

car $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Solution 9. (Enoncé)
La sommabilité de la famille $\left(r^{|n|}e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est immédiate. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^\infty r^{|n|}e^{in\theta} &= 1 + \sum_{n=1}^\infty r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^\infty r^n e^{-in\theta}\\
&= 1 + \frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}}\\
&= 1 + r\frac{e^{i\theta} - r + e^{-i\theta} - r}{1-2r\cos(\theta)+r^2}\\
&= \frac{1-2r\cos(\theta)+r^2+2r\cos(\theta)-2r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}\\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}
\end{aligned}$$

Solution 10. (Enoncé)
On développe $\frac{1}{1-z^{an+c}}$ en série géométrique (possible car $|z|<1$) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{bn}}{1-z^{an+c}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} z^{bn} z^{amn+cm}.$$

La famille $\left(z^{bn}z^{amn+cm}\right)_{m,n\geq 0}$ est sommable car

$$\sum_{m=0}^{\infty} |z^{bn}z^{amn+cm}| = \frac{|z^{bn}|}{1-|z^{an+c}|} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z^{bn}|,$$

et $\sum_{n\geq 0}|z^{bn}|$ converge. On a donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} z^{bn}z^{amn}z^{cm} = \sum_{m=0}^{\infty} z^{cm}\sum_{n=0}^{\infty}(z^{am+b})^n = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{cm}}{1-z^{am+b}}.$$

Solution 11. (Enoncé)
Soit $0<x<1$ fixé. La fonction $t\mapsto x^{t^2}$ est décroissante donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} x^{t^2}\,\mathrm{d}t \leq x^{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} x^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Soit en sommant :

$$\int_1^{\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_0^{\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $\int_1^\infty x^{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to1^-}{\sim} \int_0^\infty x^{t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \int_0^\infty x^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Il reste donc à évaluer cette dernière intégrale, on fait pour cela le changement de variable $u=\sqrt{-\log(x)}t$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\sqrt{-\log(x)}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\sqrt{-\log(x)}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\ &\underset{x\to1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Remarque : On peut procéder autrement. En notant $\theta(t)=\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}$, alors $\sum_{n=1}^\infty x^{n^2} = \theta\left(-\frac{\ln(x)}{\pi}\right)$. La formule sommatoire de Poisson donne $\theta(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(2\theta\left(\frac{1}{t}\right)+1\right)-\frac{1}{2}$. Donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} = \theta\left(-\frac{\ln(x)}{\pi}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln(x)}}\left(2\theta\left(\frac{\pi}{-\ln(x)}\right)+1\right)-\frac{1}{2} \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$