

Questions et Exercices sur la leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

LAURENT MONTAIGU

Ce document vise à regrouper quelques questions qui peuvent être posées par le jury pour la leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables. Il y a aussi des exercices. Le niveau de difficulté donné (de 1 à 5 étoiles) est subjectif.

Contents

1	Questions	3
2	Exercices	4
3	Solutions	7

1 Questions

Voici une liste de questions auxquelles il faudrait être capable de répondre (relativement) rapidement :

- Dresser le tableau des primitives usuelles (cos, sin, ln, ...).
- Enoncer les règles de BIOCHE.
- Rappeler la méthode pour intégrer $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, $\int \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}$ et $\int \frac{dx + e}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$.
- Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ est-elle convergente ? Et l'intégrale $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$?
- Pour quels couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale $\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \ln(x)^\beta}$ est-elle convergente ?
- Calculer $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.
- Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx$.
- Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge. (Bonus : donner sa valeur).
- Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, montrer que la transformée de FOURIER de f est bien définie, est continue, et qu'elle tend vers 0 quand $\|\xi\| \rightarrow +\infty$.
- Donner la définition de la fonction Γ d'EULER, montrer que $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ et donner la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \geq 1$.
- Calculer le volume de la boule unité de \mathbb{R}^n .

et un VRAI/FAUX :

- Si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $\int_0^\infty f(x) dx$ converge, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- La fonction ln est intégrable sur $[0, 1]$.
- La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est intégrable sur \mathbb{R} .
- Le produit de deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} est intégrable sur \mathbb{R} .
- Si f est intégrable sur $[0, 1]$, alors f^2 aussi.
- Si f^2 est intégrable sur $[0, 1]$, alors f aussi.
- Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

2 Exercices

Exercice 1 (Solution)

Calculer les primitives suivantes :

$$1. \int e^{3x} \cos^2(x) dx, \quad 2. \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}, \quad 3. \int \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(x)} dx.$$

Exercice 2 (Solution)

Montrer la convergence et calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} dx.$$

Exercice 3 (Solution)

Montrer que :

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \ln(2).$$

On remarquera que pour tout $x \in]0, 1[$, $\frac{x-1}{\ln(x)} = \int_0^1 x^y dy$.

Exercice 4 (Solution)

Calculer pour $n \geq 0$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n dx.$$

On cherchera une relation de récurrence vérifiée par $(I_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 5 (Solution)

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 6 (Solution)

Le but de cet exercice est de calculer de deux manières l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)^2}{x^2} dx$.

1. Montrer que I est bien définie.
2. Calculer la transformée de FOURIER de $\mathbb{1}_{[-1,1]}$, en déduire I par la formule de FOURIER-PLANCHEREL.
3. Retrouver ce résultat en montrant que $I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ en faisant une intégration par parties, on utilisera ensuite le résultat de l'exercice 12.

Exercice 7 (Solution)

Le but de cet exercice est de calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$. On note $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$.

1. Montrer que I est bien définie.
2. Montrer que $I = J$.
3. En calculant de deux manières $I + J$, déterminer I .
4. *Plus difficile* Retrouver ce résultat en passant par des sommes de RIEMANN. (On introduira le polynôme $P = (X + 1)^{2n} - 1$).

Exercice 8 (Solution)

Calculer $\int \frac{1}{1+x^3} dx$.

Exercice 9 Contre-exemple au théorème de FUBINI (Solution)

Soit $f :]0, 1[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[^2, \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ et $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$. Que remarquez-vous ?

Exercice 10 Contre-exemple au théorème de FUBINI 2 (Solution)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 1], \quad f(x, y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}.$$

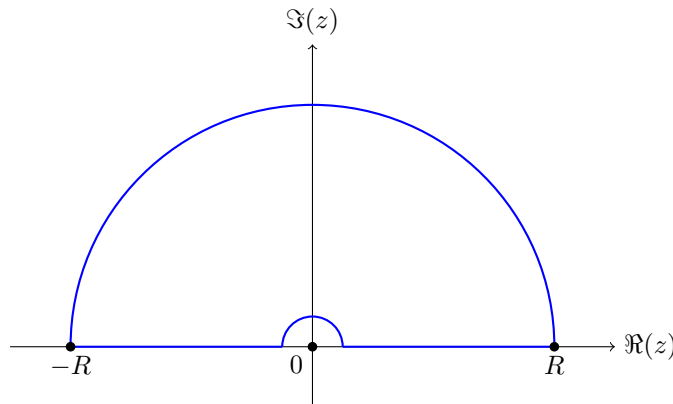
Calculer $\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ et $\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy$. Que remarquez-vous ?
On pourra utiliser le résultat de l'exercice 3.

Exercice 11 (Solution)

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée et réduite. Déterminer la loi de $\frac{Y}{X}$.

Exercice 12 Intégrale de Dirichlet (Solution)

Montrer la convergence et calculer $I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$. On pourra appliquer le théorème des résidus à la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ au contour $\gamma_{\varepsilon, R}$ formé des segments $[\varepsilon, R]$, $[-R, -\varepsilon]$ et des demi-cercles supérieurs de centre 0 et de rayon R et ε .

**Exercice 13 (Solution)**

Soit (a, b) deux réels strictement positifs montrer la convergence et calculer $I(a, b) = \int_0^\infty e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} dt$.
On introduira une fonction F telle que $I(a, b) = \frac{1}{a} F((ab)^2)$.

Exercice 14 (Solution)

Le but de cet exercice est de calculer $I = \int_0^\infty \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Montrer que I est bien définie. On fera un développement asymptotique en $+\infty$ de $x \mapsto \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$.

2. En simplifiant $\int_0^X \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt dx$, calculer I . On pourra utiliser le résultat de l'exercice 12.

Exercice 15 (Solution)

En utilisant la formule de FOURIER-PLANCHEREL, montrer que pour $x > 0$, $\int_{\mathbb{R}} |\Gamma(x + iy)|^2 dy = \frac{2\pi}{2^{2x}} \Gamma(2x)$.
On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\Re(z) > 0$ par : $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$.

Exercice 16 (Solution)

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_{\|x\| \leq 1} \frac{dx}{\|x\|^\alpha}$ converge ?
2. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_{\|x\| \geq 1} \frac{dx}{\|x\|^\alpha}$ converge ?

où $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

On fera un changement de coordonnées hypersphériques.

Exercice 17 (Solution)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

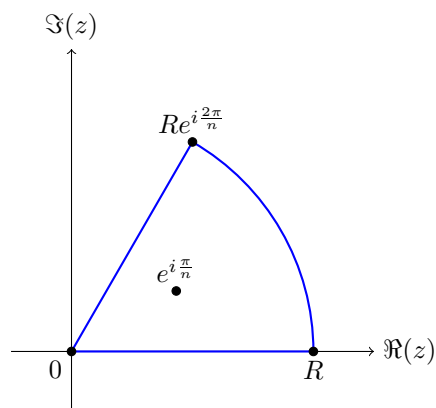
Exercice 18 (Solution)

Soit $n \geq 2$, montrer que :

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

On considèrera la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$, que l'on intégrera sur le bord du compact :

$$K = \left\{ r e^{i\theta} \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n} \right\}.$$



Exercice 19 (Solution)

En vous inspirant de l'exercice 18, déterminer les couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale suivante converge,

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^\beta + 1} dx,$$

et la calculer.

3 Solutions

Solution 1. (Enoncé)

1. On commence par linéariser \cos^2 et on écrit $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. Il vient alors :

$$\int e^{3x} \cos^2(x) dx = \frac{e^{3x}}{6} + \frac{1}{2} \int e^{3x} \cos(2x) dx.$$

Pour calculer $\int e^{3x} \cos(2x) dx$, on peut faire deux intégrations par parties ou alors passer par les complexes :

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \cos(2x) dx &= \Re \left(\int e^{(3+2i)x} dx \right) \\ &= \Re \left(\frac{e^{(3+2i)x}}{3+2i} + C \right) \\ &= \frac{e^{3x}}{13} (3 \cos(2x) + 2 \sin(2x)) + C, \end{aligned}$$

d'où :

$$\int e^{3x} \cos^2(x) dx = \frac{e^{3x}}{6} + \frac{e^{3x}}{26} (3 \cos(2x) + 2 \sin(2x)) + C.$$

2. Le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ est strictement négatif, on le met alors sous forme canonique en complétant le carré :

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right) + C,$$

où l'on a utilisé le résultat "bien connu" :

$$\int \frac{dx}{(x-b)^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x-b}{a} \right).$$

3. Les règles de BIOCHE nous invitent à poser $u = \cos(x)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(x)} dx &= -2 \int \frac{u}{1+u} du \\ &= -2 \left(\int \frac{u+1}{u+1} du - \int \frac{1}{u+1} du \right) \\ &= -2u + 2 \ln(u+1) + C \\ &= -2 \cos(x) + 2 \ln(\cos(x) + 1) + C, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ au début.

Solution 2. (Enoncé)

La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-1}$ est continue sur $]0, 1[$ et se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 1$. De plus,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x),$$

et comme \ln est intégrable sur $[0, 1]$, l'intégrale I est bien définie. Pour la calculer, on va faire un développement en série entière et écrire pour $x \in]0, 1[$, $\frac{1}{x-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. On a donc :

$$I = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} -\ln(x) x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 -\ln(x) x^n dx,$$

où l'interversion est justifiée par positivité. Or une intégration par parties donne pour $n \geq 0$:

$$\int_0^1 \ln(x) x^n = \left[\ln(x) \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Donc finalement,

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solution 3. (Enoncé)

La fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$ est continue sur $]0, 1[$ et se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 1$. De plus,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{1}{\ln(x)},$$

et comme $\frac{1}{\ln}$ est intégrable sur $[0, \frac{1}{2}]$ (cette fonction se prolonge en une fonction continue sur cet intervalle), l'intégrale I est bien définie.

Soit $x \in]0, 1[$, une primitive de $y \mapsto x^y = \exp(y \ln(x))$ est donnée par

$$y \mapsto \frac{1}{\ln(x)} \exp(y \ln(x)) = \frac{1}{\ln(x)} x^y.$$

On a donc immédiatement,

$$\int_0^1 x^y dy = \left[\frac{x^y}{\ln(x)} \right]_0^1 = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

On a alors :

$$I = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 x^y dy dx = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 x^y dx dy = \int_{y=0}^1 \frac{dy}{y+1} = [\ln(y+1)]_0^1 = \ln(2).$$

L'interversion des deux intégrales étant justifiée par le théorème de FUBINI-TONELLI.

Solution 4. (Enoncé)

On va chercher une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par $(I_n)_{n \geq 0}$. Soit $n \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2(x) - 1) \tan(x)^n dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan(x)^2) \tan^n(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n dx \\ &= \left[\frac{\tan(x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n \\ &= \frac{1}{n+1} - I_n. \end{aligned}$$

On montre alors par récurrence que :

$$\forall n \geq 0, \quad I_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right)$$

et

$$\forall n \geq 0, \quad I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

Solution 5. (Enoncé)

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement positive, on peut donc légitimement définir la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ par $v_n = \ln(u_n)$. On a alors :

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = \frac{1}{n} (\ln((2n)!) - n \ln(n) - \ln(n!)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \ln(k) - \ln(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k),$$

donc,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \ln(k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(n+k) - \ln(n)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ étant continue sur $[0, 1]$, le théorème des sommes de RIEMANN assure que :

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x) dx = [(x+1) \ln(x+1) - (x+1)]_0^1 = 2 \ln(2) - 1.$$

Et donc,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{e}.$$

Solution 6. (Enoncé)

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)^2}{x^2}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. De plus,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

donc par comparaison, $\int_0^\infty f(x) dx$ converge et I est bien définie.

2. Soit $\xi \in \mathbb{R}$, si $\xi = 0$, alors $\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(0) = \int_{-1}^1 dx = 2$. Sinon :

$$\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) e^{-2i\pi\xi x} dx = \int_{-1}^1 e^{-2i\pi\xi x} dx = \left[\frac{e^{-2i\pi\xi x}}{-2i\pi\xi} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{-2i\pi\xi} - e^{2i\pi\xi}}{-2i\pi\xi} = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

Formule encore valable par continuité en $\xi = 0$. La formule de FOURIER-PLANCHEREL est (avec cette convention de la transformée de FOURIER) :

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(2\pi\xi)}{\pi^2\xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)^2 dx = 2.$$

Ce qui après changement de variable $x = 2\pi\xi$ donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)^2}{x^2} dx = \pi.$$

On en déduit enfin par parité de $x \mapsto \frac{\sin(x)^2}{x^2}$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)^2}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)^2}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

3. Soit $X > \varepsilon > 0$, alors en faisant une intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^X \frac{\sin(x)^2}{x^2} dx = \left[-\frac{\sin(x)^2}{x} \right]_\varepsilon^X + 2 \int_\varepsilon^X \frac{\sin(x) \cos(x)}{x} dx,$$

ce qui en faisant tendre ε vers 0 et X vers $+\infty$ donne :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)^2}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{\sin(2x)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u} du.$$

où dans la dernière intégrale on a fait le changement de variable $u = 2x$. L'exercice 12 permet alors de conclure :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)^2}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque : La fonction $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ est l'exemple classique d'une fonction bornée dont la transformée de FOURIER n'est pas intégrable, il est bon de le retenir.

Solution 7. (Enoncé)

1. La fonction $f : x \mapsto \ln(\sin(x))$ est continue sur $]0, 1]$, de plus :

$$f(x) = \ln(x + o(x)) = \ln(x) + \ln(1 + o(1)) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$$

et comme \ln intégrable sur $[0, 1]$, f est intégrable sur $[0, 1]$ et I est bien définie.

2. Il suffit de faire le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ dans I :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) (-1) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u)) du = J.$$

3. La première manière est de dire que $I + J = 2I$. Pour la seconde on écrit :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x) \cos(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right) dx = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx.$$

Or, le changement de variable $u = 2x$ donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du = \frac{I}{2} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du.$$

Et le changement de variable $x = u - \frac{\pi}{2}$ montre que cette dernière intégrale vaut $J = I$. On a donc $2I = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + I$ soit :

$$I = -\frac{\pi}{2} \ln(2).$$

4. Comme la fonction f est intégrable et croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, l'intégrale de f est limite des sommes de RIEMANN *i.e.* :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right).$$

Calculons donc $a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, le changement de variable $k' = 2n - k$ donne :

$$a_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Donc $a_n = \sqrt{b_n}$ avec :

$$b_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > 0.$$

Pour calculer b_n , on introduit le polynôme $P = (X + 1)^{2n} - 1$, ses racines sont les :

$$z_k = e^{\frac{i\pi k}{n}} - 1, \quad k \in \llbracket 0; 2n - 1 \rrbracket.$$

D'une part,

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = \prod_{k=1}^{2n-1} 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{\frac{i\pi k}{2n}} = (2i)^{2n-1} b_n e^{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{i\pi k}{2n}} = -2^{2n-1} b_n.$$

D'autre part, $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$ est le produit des racines non nulles de P , en factorisant P , on voit que ce produit vaut donc le coefficient constant de $(-1)^{2n-1} \frac{P}{X}$ d'où :

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n$$

donc :

$$b_n = 2n 2^{1-2n}.$$

Donc finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} \ln(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4n} \ln(b_n) = -\frac{\pi}{2} \ln(2).$$

Solution 8. (Enoncé)

La décomposition en élément simple de $\frac{1}{X^3+1}$ dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme :

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$

en multipliant par $X+1$ et en évaluant en -1 il vient : $a = \frac{1}{3}$. En multipliant par X et en regardant en $+\infty$ il vient $b = -a = -\frac{1}{3}$. Enfin, en évaluant en $X = 0$ il vient $c = 1 - a = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^3} &= \int \frac{dx}{3(x+1)} + \frac{1}{3} \int \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \left(\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - 3 \int \frac{dx}{x^2-x+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

Solution 9. (Enoncé)

Soit $x \in]0, 1[$, alors en écrivant :

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

on reconnait la dérivée de $y \mapsto \frac{y}{x^2+y^2}$ donc ,

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{x^2+1}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Comme $f(x, y) = -f(y, x)$, il vient :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}.$$

On voit donc que $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$. Cela ne contredit pas le théorème de FUBINI car :

$$\begin{aligned} \int_{]0,1[^2} |f(x, y)| dx dy &= \int_{x=0}^1 \left(\int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy + \int_{y=x}^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Donc $f \notin L^1(]0, 1[^2)$.

Solution 10. (Enoncé)

Soit $x > 0$, alors :

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 2xe^{-xy} dy - \int_0^1 e^{-xy} dy = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$$

On a donc :

$$\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx \stackrel{t=e^{-x}}{=} \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt = \ln(2),$$

par le résultat de l'exercice 3. Soit maintenant $y \in]0, 1[$, alors :

$$\int_0^\infty f(x, y) dx = \int_0^\infty 2e^{-2xy} dx - \int_0^\infty e^{-xy} dx = \frac{1}{y} - \frac{1}{y} = 0.$$

Donc,

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy = 0.$$

On voit donc que $\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \neq \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy$. Cela ne contredit pas le théorème de FUBINI car :

$$\int_0^1 \int_0^\infty |f(x, y)| dx dy = \int_0^1 \frac{dy}{y} = +\infty.$$

Solution 11. (Enoncé)

Soit h une fonction mesurable bornée, alors par la formule de transfert :

$$\mathbb{E} \left(h \left(\frac{Y}{X} \right) \right) = \int_{\mathbb{R}^2} h \left(\frac{y}{x} \right) f_{(X,Y)}(x, y) dx dy.$$

Comme X et Y sont de loi normales centrées réduites et indépendantes, il vient :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Donc,

$$\mathbb{E} \left(h \left(\frac{Y}{X} \right) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} h \left(\frac{y}{x} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

On fait un changement de coordonnées polaires en écrivant $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, il vient alors :

$$\mathbb{E} \left(h \left(\frac{Y}{X} \right) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} h(\tan(\theta)) e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\tan(\theta)) d\theta.$$

Par π -périodicité de \tan , il vient :

$$\int_0^{2\pi} h(\tan(\theta)) d\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(\tan(\theta)) d\theta \stackrel{u=\tan(\theta)}{=} 2 \int_{-\infty}^\infty \frac{h(u)}{1+u^2} du.$$

D'où :

$$\mathbb{E} \left(h \left(\frac{Y}{X} \right) \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty h(u) \frac{du}{1+u^2}.$$

On en déduit que $\frac{Y}{X}$ suit une loi de CAUCHY.

Solution 12. (Enoncé)

La fonction $g : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$, donc $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge. Soit maintenant $X > 1$, par intégration par parties il vient :

$$\int_1^X \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[\frac{-\cos(x)}{x} \right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(x)}{x^2} dx,$$

comme $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ converge, il en va de même pour I .

Pour calculer I , on applique le théorème des résidus au contour de l'énoncé, le seul pôle de f est en 0 et 0 n'est pas dans l'intérieur du contour, le théorème des résidus donne alors :

$$\int_{\gamma_{\epsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (\star)$$

On découpe maintenant l'intégrale précédente en 4 morceaux :

$$\int_{\gamma_{\epsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it} dt + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_\pi^0 \frac{e^{i\epsilon e^{it}}}{\epsilon e^{it}} i\epsilon e^{it} dt$$

or,

$$\int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{x} dx = \int_\epsilon^R \frac{2i \sin(x)}{x} dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} 2i \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Il reste à étudier les intégrales $\int_0^\pi e^{iRe^{it}} dt$ et $\int_0^\pi e^{i\epsilon e^{it}} dt$, on utilise pour cela le théorème de convergence dominée. Soit $t \in]0, \pi[$, alors :

$$\left| e^{iRe^{it}} \right| = \left| e^{iR \cos(t) - R \sin(t)} \right| = e^{-R \sin(t)} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

et $\left| e^{i\epsilon e^{it}} \right| = e^{-R \sin(t)} \leq 1 \in L^1(]0, \pi[)$. Donc,

$$\int_0^\pi e^{iRe^{it}} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

De même,

$$\int_0^\pi e^{i\epsilon e^{it}} dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \pi.$$

Donc en passant à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$ dans (\star) il vient,

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx - i\pi = 0,$$

soit encore :

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 13. (Enoncé)

La fonction $f_{(a,b)} : x \mapsto e^{a^2 x^2 - \frac{b^2}{x^2}}$ se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}^+ en posant $f(0) = 0$. De plus $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x \rightarrow +\infty$ donc $I(a,b)$ converge.

On a :

$$I(a,b) = \int_0^\infty e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{(ab)^2}{x^2}} dx = \frac{1}{a} F((ab)^2).$$

où

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{t}{x^2}} dx = \int_0^\infty g(x,t) dx.$$

Montrons que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} . Il suffit de montrer que, pour tout $a > 0$, la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur K_a où $K_a = [a; +\infty[$. On a :

- $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{x^2} e^{-x^2 - \frac{t}{x^2}}$ est continue sur K_a .
- $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{x^2} e^{-x^2 - \frac{t}{x^2}}$ est continue sur $]0; +\infty[$.

- Pour $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times K_a$, $\left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \right| \leq \frac{e^{-x^2 - \frac{a}{x^2}}}{x^2} \in L^1(]0; +\infty[)$.

Donc F est de classe \mathcal{C}^1 sur K_a et donc F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} . De plus pour $t > 0$:

$$F'(t) = \int_0^\infty -\frac{e^{-x^2 - \frac{t}{x^2}}}{x^2} dx \underset{u=\frac{1}{x}}{=} - \int_0^\infty e^{-\frac{1}{u^2} - tu^2} du \underset{x=\sqrt{tu}}{=} -\frac{F(t)}{\sqrt{t}}.$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > 0$, $F(t) = Ce^{-2\sqrt{t}}$. En prenant la limite quand $t \rightarrow 0^+$ (possible car F continue sur \mathbb{R}^+), on obtient $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On obtient donc le résultat suivant :

$$I(a, b) = \int_0^\infty e^{-a^2x^2 - \frac{b^2}{x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2ab}.$$

Solution 14. (Énoncé)

1. La fonction $x \mapsto \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}^+ , il reste à étudier le comportement de f en $+\infty$. On fait pour cela on fait deux intégrations par parties (impropres) successives :

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt &= \left[\frac{-\cos(t)}{t} \right]_x^\infty - \int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t^2} dt \\ &= \frac{\cos(x)}{x} - \left[\frac{\sin(t)}{t^2} \right]_x^\infty - 2 \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t^3} dt \\ &= \frac{\cos(x)}{x} + \frac{\sin(x)}{x^2} - 2 \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t^3} dt. \end{aligned}$$

On peut majorer la dernière intégrale de la façon suivante :

$$2 \left| \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t^3} dt \right| \leq \int_x^\infty \frac{2 dt}{t^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Donc,

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Comme l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt$ converge (se prouve en faisant une intégration par parties comme l'intégrale de DIRICHLET), on en déduit enfin que l'intégrale $\int_0^\infty f(x) dx$ converge, par somme d'intégrales convergentes.

2. Soit $X > 0$, alors,

$$\int_0^X \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt dx = \int_0^X \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \right) dx = \frac{\pi}{2}X - \int_0^X \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt dx.$$

On utilise le théorème de FUBINI dans la dernière intégrale pour écrire :

$$\int_{x=0}^X \int_{t=0}^x \frac{\sin(t)}{t} dt dx = \iint_{0 \leq t \leq x \leq X} \frac{\sin(t)}{t} dt dx = \int_{t=0}^X \int_{x=t}^X \frac{\sin(t)}{t} dt dx = \int_{t=0}^X (X-t) \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Donc,

$$\int_0^X \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt dx = \frac{\pi}{2}X - X \left(\frac{\pi}{2} - f(X) \right) + 1 - \cos(X) = Xf(X) - \cos(X) + 1.$$

Donc en passant à la limite $X \rightarrow +\infty$ et en utilisant 1. il vient :

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = 1.$$

Solution 15. (Enoncé)

Le but est de faire apparaître la fonction $y \mapsto \Gamma(x + iy)$ comme une transformée de FOURIER. On a par définition :

$$\Gamma(x + iy) = \int_0^\infty t^{x+iy-1} e^{-t} dt.$$

On fait ensuite le changement de variable $u = \ln(t)$, il vient alors :

$$\Gamma(x + iy) = \int_{-\infty}^\infty e^{u(x+iy-1)} e^{-e^u} e^u du = \int_{-\infty}^\infty e^{-e^u + ux} e^{\frac{2\pi i y u}{2\pi}} du.$$

On peut donc écrire $\Gamma(x + iy) = \hat{f}\left(-\frac{y}{2\pi}\right)$ avec $f(u) = e^{-e^u + ux}$ qui est bien intégrable sur \mathbb{R} . La formule de FOURIER-PLANCHEREL donne :

$$\int_{-\infty}^\infty |\Gamma(x + iy)|^2 dy = \int_{-\infty}^\infty \left| \hat{f}\left(-\frac{y}{2\pi}\right) \right|^2 dy = 2\pi \int_{-\infty}^\infty |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^\infty e^{-2e^u + 2ux} du.$$

Le changement de variable $u = \ln(t)$ dans la dernière intégrale donne :

$$\int_{-\infty}^\infty |\Gamma(x + iy)|^2 dy = 2\pi \int_0^\infty e^{-2t} t^{2x-1} dt = \frac{2\pi}{2^{2x}} \Gamma(2x).$$

Solution 16. (Enoncé)

On fait dans les deux intégrales le changement de coordonnées "hypersphériques" et on pose :

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(\theta_1) \\ x_2 &= r \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ x_3 &= r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin(\theta_1) \dots \sin(\theta_{n-2}) \cos(\theta_{n-1}) \\ x_n &= r \sin(\theta_1) \dots \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-1}). \end{aligned}$$

On a ainsi,

$$\int_{\|x\| \leq 1} \frac{dx}{\|x\|^\alpha} = \int_0^1 \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} f(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}.$$

où la fonction f est continue sur $[0, \pi]^{n-1} \times [0, 2\pi]$. Il s'en suit que l'intégrale converge si et seulement si $\alpha < n$. De même, l'autre intégrale converge si et seulement si $\alpha > n$.

Solution 17. (Enoncé)

La matrice A est réelle symétrique définie positive, donc est diagonalisable en base orthonormée : il existe (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de \mathbb{R}^n et des réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ strictement positifs tels que $Ae_i = \lambda_i e_i$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On va maintenant faire un changement de variable dans l'intégrale. Soit P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^n à (e_1, \dots, e_n) , comme P est une matrice de passage entre deux bases orthonormées, la matrice P est orthogonale. L'application $\varphi : x \mapsto Px$ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n donc d'après la formule du changement de variable multi-dimensionnel :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A\varphi(x), \varphi(x) \rangle} |\det \text{Jac}(\varphi(x))| dx.$$

Or, $\text{Jac}(\varphi(x)) = P$ donc $|\det \text{Jac}(\varphi(x))| = 1$. En notant $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A\varphi(x), \varphi(x) \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2} dx_1 \dots dx_n,$$

ce qui en utilisant le théorème de FUBINI-TONELLI et la valeur de l'intégrale de GAUSS :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i x_i^2} dx_i = \prod_{i=1}^n \sqrt{\pi \lambda_i^{-1}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Solution 18. (Enoncé)

L'intégrale est trivialement convergente. Pour la calculer, on applique le théorème des résidus à la fonction f au contour de l'énoncé. La fonction f est méromorphe sur \mathbb{C} avec des pôles simples en $e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Le seul résidu à l'intérieur du contour est $e^{\frac{i\pi}{n}}$. Le théorème des résidus donne donc :

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f(z), z = e^{\frac{i\pi}{n}}). \quad (\star)$$

Comme c'est un pôle simple, le résidu est simple à calculer :

$$\operatorname{Res}(f(z), z = e^{\frac{i\pi}{n}}) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{i\pi}{n}}} \frac{z - e^{\frac{i\pi}{n}}}{1 + z^n} = \frac{1}{n(e^{\frac{i\pi}{n}})^{n-1}} = -\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}.$$

On découpe maintenant l'intégrale précédente en 3 morceaux :

$$\int_{\partial K} f(z) dz = \int_0^R \frac{1}{1+x^n} dx + \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{int}} dt + \int_R^0 \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}}}{1+(xe^{\frac{2i\pi}{n}})^n} dx.$$

On a,

$$\int_0^R \frac{1}{1+x^n} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} I$$

et,

$$\int_R^0 \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}}}{1+(xe^{\frac{2i\pi}{n}})^n} dx = -\int_0^R \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}}}{1+x^n} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} -e^{\frac{2i\pi}{n}} I.$$

On montre enfin que la dernière intégrale tend vers 0, en effet, pour $R > 1$:

$$\left| \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{int}} dt \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R}{|R^n e^{int} - 1|} dt \leq \frac{R}{R^n - 1} \frac{2\pi}{n} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

car $n \geq 2$. En passant à la limite dans (\star) il vient :

$$\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}\right) I = -\frac{1}{n} 2i\pi e^{\frac{i\pi}{n}},$$

ce qui donne finalement,

$$I = \frac{1}{n} \frac{2i\pi e^{\frac{i\pi}{n}}}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Solution 19. (Enoncé)

La fonction $x \mapsto \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} , de plus :

$$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x^\alpha,$$

donc $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ converge si et seulement si $\alpha > -1$. De plus,

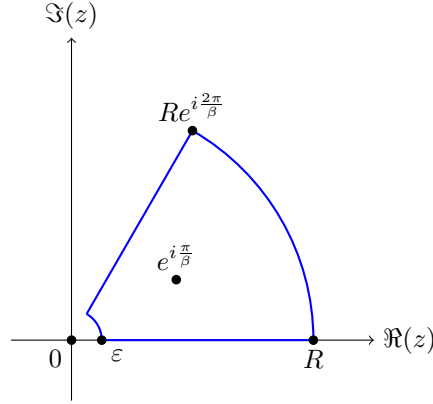
$$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{\alpha-\beta},$$

donc $\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ converge si et seulement si $\beta > \alpha + 1$. Ainsi $I(\alpha, \beta)$ converge si et seulement si $\beta > \alpha + 1 > 0$.

On considère Log la détermination principale du logarithme complexe sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et l'on définit f sur U par :

$$\forall z \in U, \quad f(z) = \frac{z^\alpha}{1+z^\beta},$$

avec $z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(z))$ et $z^\beta = \exp(\beta \operatorname{Log}(z))$. La fonction f est méromorphe sur U , on va utiliser le théorème des résidus sur le contour $\gamma_{\varepsilon, R}$ suivant :



Le seul pôle de f à l'intérieur du contour est en $e^{i\frac{\pi}{\beta}}$. Le théorème des résidus donne donc :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = 2i\pi \operatorname{Res}\left(f(z), z = e^{i\frac{\pi}{\beta}}\right). \quad (\star)$$

Comme c'est un pôle simple, le résidu est simple à calculer :

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z = e^{i\frac{\pi}{\beta}}\right) = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{\beta}}} \frac{(z - e^{i\frac{\pi}{\beta}})z^\alpha}{1 + z^\beta} = \frac{e^{i\frac{\pi\alpha}{\beta}}}{\beta(e^{i\frac{\pi}{\beta}})^{\beta-1}} = -\frac{e^{i\frac{\pi(\alpha+1)}{\beta}}}{\beta}.$$

On a bien $(e^{i\frac{\pi}{\beta}})^\alpha = e^{i\frac{\pi\alpha}{\beta}}$ car :

$$(e^{i\frac{\pi}{\beta}})^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(e^{i\frac{\pi}{\beta}})) = \exp\left(\alpha \frac{i\pi}{\beta}\right).$$

On découpe maintenant l'intégrale précédente en 4 morceaux :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_0^R \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx + \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \frac{iRe^{it}(Re^{it})^\alpha}{1+R^\beta e^{i\beta t}} dt + \int_R^\varepsilon \frac{e^{\frac{2i\pi}{\beta}}(e^{\frac{2i\pi}{\beta}})^\alpha x^\alpha}{1+(xe^{\frac{2i\pi}{\beta}})^\beta} dx + \int_{\frac{2\pi}{\beta}}^0 \frac{i\varepsilon e^{it}(\varepsilon e^{it})^\alpha}{1+\varepsilon^\beta e^{i\beta t}} dt.$$

On a,

$$\int_0^R \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} I(\alpha, \beta)$$

et,

$$\int_R^\varepsilon \frac{(e^{\frac{2i\pi}{\beta}})^{\alpha+1} x^\alpha}{1+(xe^{\frac{2i\pi}{\beta}})^\beta} dx = -\int_\varepsilon^R \frac{(e^{\frac{2i\pi}{\beta}})^{\alpha+1} x^\alpha}{1+x^\beta} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} -e^{\frac{2i\pi(\alpha+1)}{\beta}} I(\alpha, \beta).$$

On montre enfin que les deux dernières intégrales tendent vers 0, en effet, pour $R > 1$:

$$\left| \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \frac{iRe^{it}(Re^{it})^\alpha}{1+R^\beta e^{i\beta t}} dt \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \frac{R^{\alpha+1}}{|R^\beta e^{i\beta t} - 1|} dt \leq \frac{R^{\alpha+1}}{R^\beta - 1} \frac{2\pi}{\beta} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

car $\beta - \alpha - 1 > 0$. De même,

$$\left| \int_{\frac{2\pi}{\beta}}^0 \frac{i\varepsilon e^{it}(\varepsilon e^{it})^\alpha}{1+\varepsilon^\beta e^{i\beta t}} dt \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{|1-\varepsilon^\beta e^{i\beta t}|} dt \leq 2\varepsilon^{\alpha+1} \frac{2\pi}{\beta} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$$

car $\alpha + 1 > 0$. En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $R \rightarrow +\infty$ dans (\star) il vient :

$$I(\alpha, \beta) \left(1 - e^{\frac{2i\pi(\alpha+1)}{\beta}}\right) = -\frac{1}{\beta} 2i\pi e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{\beta}},$$

ce qui donne finalement,

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} \frac{2i\pi e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{\beta}}}{e^{\frac{2i\pi(\alpha+1)}{\beta}} - 1} = \frac{\pi}{\beta \sin\left(\frac{\pi(\alpha+1)}{\beta}\right)}.$$

Remarque : En faisant le changement de variable $u = x^{\alpha+1}$ dans $I(\alpha, \beta)$, il vient :

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha+1} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} u^{\frac{1}{\alpha+1}-1}}{1+u^{\frac{\beta}{\alpha+1}}} du = \frac{1}{\alpha+1} I\left(0, \frac{\beta}{\alpha+1}\right).$$

On pouvait alors supposer $\alpha = 0$ et utiliser le contour de l'exercice 18 (avec $n = \frac{\beta}{\alpha+1}$) pour calculer $I\left(0, \frac{\beta}{\alpha+1}\right)$.

Remarque On a pas en règle générale $(zz')^\alpha = z^\alpha z'^\alpha$ ou $\text{Log}(zz') = \text{Log}(z) + \text{Log}(z')$, il faut y être attentif même si ici tout se passe bien.