

Questions et exercices sur la leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

LAURENT MONTAIGU

1 Questions

Voici une liste de questions auxquelles il faudrait être capable de répondre (relativement) rapidement :

- Donner une suite de fonctions bornées qui converge simplement vers une fonction non bornée.
- Donner un exemple d'une suite de fonctions qui converge simplement mais pas uniformément.
- Donner un exemple d'une série de fonctions qui converge uniformément mais pas normalement.
- Donner une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 qui converge uniformément vers une fonction qui n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .

et un VRAI/FAUX :

- Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment d'un intervalle I , alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur I .
- Si $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent uniformément, respectivement vers f et g , alors $(f_n + g_n)_n$ converge uniformément vers $f + g$.
- Si $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent uniformément, respectivement vers f et g , alors $(f_n g_n)_n$ converge uniformément vers $f g$.
- Si $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent uniformément, respectivement vers f et g , alors $(f_n \circ g_n)_n$ converge uniformément vers $f \circ g$.
- Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge uniformément sur $] - R; R[$.
- Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement sur $] - R; R[$.
- Une limite simple de fonctions croissantes est croissante.
- Une limite simple de fonctions convexes est convexe.
- Une limite simple de fonctions bornées est bornée.
- Une limite simple de fonctions périodiques est périodique.
- Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dérivables. Si $(f'_n)_n$ converge uniformément sur un intervalle I , alors $(f_n)_n$ converge simplement sur I .
- Soit f une fonction continue. La suite de fonctions $(x \mapsto f(x)\mathbb{1}_{|x| \leq n})_n$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .
- Soit f une fonction continue. La suite de fonctions $(f(\frac{x}{n}))_n$ converge uniformément vers $f(0)$ sur \mathbb{R} .
- La suite de fonctions $(x \mapsto (1 + \frac{x}{n})^n)_n$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur \mathbb{R} .

2 Exercices

Exercice 1 (Solution)

Soit I un intervalle et $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur I qui converge uniformément vers f sur I . Soit $x \in I$ et $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x . Montrer que

$$f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

Exercice 2 (Solution)

Soit I un intervalle et $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I . On suppose que chaque fonction f_n est uniformément continue et converge uniformément vers f . Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 3 (Solution)

Etudier la convergence simple et uniforme de $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ sur $[0, 1]$

Exercice 4 (Solution)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la convergence simple et uniforme de $f_n(x) = n^\alpha x(1 - x)^n$ sur $[0, 1]$

Exercice 5 (Solution)

On note f_n la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ . Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f_n(x) dx$$

et faire un commentaire.

Exercice 6 (Solution)

Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers f , soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $g \circ f_n$ converge uniformément vers $g \circ f$ et que la continuité de g ne suffit pas.

Exercice 7 (Solution)

On définit pour $n \geq 1$, la fonction f_n suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}.$$

Montrer que $\sum_{n \geq 1} (-1)^n f_n$ converge uniformément mais pas normalement sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 8 (Solution)

On pose pour $x > 0$,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

1. Montrer que F est bien définie et qu'elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} .
2. En simplifiant pour $x > 0$, $F(x) + F(x+1)$, déterminer un équivalent de F en 0^+ .
3. Montrer que pour $x > 0$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt,$$

après avoir justifié l'existence de l'intégrale.

4. Déterminer un équivalent de F en $+\infty$ (si possible de deux manières différentes).

Exercice 9 (Solution)

Soit pour $x \geq 0$,

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}.$$

Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ mais n'est pas dérivable à droite en 0.

Exercice 10 (Solution)

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, où $A = [0; 1] \cup [2; 3]$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes P_n qui converge uniformément vers f sur A .

Exercice 11 (Solution)

Que dire de la limite uniforme d'une suite de polynômes sur \mathbb{R} ?

Exercice 12 (Solution)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que f est nulle.

Le but de la suite de cet exercice est de donner un contre-exemple quand on remplace $[0; 1]$ par $[0; +\infty[$. On note pour $n \geq 0$

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x(1-i)} dx.$$

2. Montrer que pour $n \geq 0$

$$I_{n+1} = \frac{n+1}{1-i} I_n.$$

3. En déduire la valeur de I_n , puis que pour $n \geq 0$

$$\int_0^{\infty} x^{4n+3} \sin(x) e^{-x} dx = 0$$

4. Conclure.

Exercice 13 (Solution)

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n+in^2x}.$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} mais n'est pas développable en série entière en 0.

3 Solutions

Solution 1. (Enoncé)

Notons déjà que f est continue. Soit $n \geq 0$, alors

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x)|.$$

Il suffit maintenant de voir que le premier terme tend vers 0 par hypothèse, et le deuxième tend vers 0 par continuité de f .

Solution 2. (Enoncé)

La démonstration est identique à celle montrant que la convergence uniforme préserve la continuité. Soit $\varepsilon > 0$, par convergence uniforme, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$

$$\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

La fonction f_{n_0} est uniformément continue sur I , donc il existe $\delta > 0$ tel que pour $(x, y) \in I^2$ avec $|x - y| < \delta$

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon.$$

On a alors pour $(x, y) \in I^2$ avec $|x - y| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + \|f - f_{n_0}\|_\infty \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

et cela conclut.

Solution 3. (Enoncé)

Il est facile de vérifier que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$. De plus pour $x \in [0, 1]$

$$f'_n(x) = nx^{n-1}(1 - x^n) - nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n).$$

La fonction f_n atteint son maximum en $\frac{1}{2^n}$ et vaut $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ qui ne tend pas vers 0 et donc il n'y a pas convergence uniforme.

Solution 4. (Enoncé)

Pour tout $n \geq 0$, $f_n(0) = 0$ donc $(f_n(0))_n$ converge vers 0. Si $x \in]0, 1]$ alors $(f_n(x))_n$ tend vers 0, finalement $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.

Pour la convergence uniforme on cherche $\|f_n\|_\infty$, on a pour $n \geq 0$, $x \in [0, 1]$

$$f'_n(x) = n^\alpha(1 - x)^n - n^{\alpha+1}x(1 - x)^{n-1} = n^\alpha(1 - x)^{n-1}(1 - x - nx),$$

donc $|f_n| = f_n$ atteint son maximum en $\frac{1}{n+1}$. On en déduit alors

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^\alpha}{(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Comme

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1},$$

la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle ssi $\alpha < 1$.

Solution 5. (Enoncé)

Il est clair par croissances comparées que f_n converge simplement vers la fonction nulle. Pour montrer la convergence uniforme, il faut montrer que

$$\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme f_n est positive, il suffit d'étudier son maximum. On a pour $x \geq 0$ et $n \geq 0$

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n!} e^{-x} (n-x).$$

Ainsi f_n est maximale en $x = n$ et son maximum vaut

$$\|f_n\|_\infty = f_n(n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n}.$$

La formule de Stirling donne $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ et donc

$$\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle. Soit maintenant $n \geq 0$, alors

$$\int_0^\infty f_n(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1,$$

où $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ est la fonction Γ d'Euler. On a utilisé la relation $\Gamma(n+1) = n!$ qui découle de $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ comme le montre l'intégration par parties suivantes

$$\Gamma(z+1) = [-t^z e^{-t}]_0^\infty + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

On en déduit donc que

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f_n(x) dx \neq \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 0.$$

C'est un contre exemple au résultat suivant : soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions convergent uniformément vers f sur I alors pour un *segment* $[a; b] \subset I$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

Solution 6. (Enoncé)

Soit $\varepsilon > 0$, par uniforme continuité de g , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $|x-y| < \eta$, $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Soit alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < \eta$. Soit $n \geq n_0$ et $x \in I$.

Comme

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \eta,$$

on en déduit

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon.$$

On a donc pour $n \geq n_0$,

$$\|g \circ f_n - g \circ f\|_\infty < \varepsilon$$

et $(g \circ f_n)_n$ converge uniformément vers $g \circ f$.

Si g n'est pas supposée uniformément continue, le résultat est faux, en effet prenons $g(x) = x^2$ et $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. f_n converge uniformément vers $x \mapsto x$ mais :

$$\left\| \left(x + \frac{1}{n} \right)^2 - x^2 \right\|_\infty = \left\| \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \right\|_\infty = +\infty$$

Donc $(g \circ f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers $g \circ f$.

Solution 7. (Enoncé)

La convergence n'est pas normale car :

$$\|(-1)^n f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty \geq f(n) = \frac{1}{2n}$$

Et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Étudions maintenant la convergence uniforme. Soit $u_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$, la suite $(u_n(x))_n$ est décroissante et tend vers 0, on a donc par application du critère spécial des séries alternées

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x}{x^2+k^2} \right| \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n}.$$

La dernière inégalité venant de l'étude de la fonction $x \mapsto u_n(x)$. On en déduit finalement la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x}{x^2+n^2}$ sur \mathbb{R}^+

Solution 8. (Enoncé)

1. La suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_n$ est décroissante et de limite nulle donc par le critère spécial des séries alternées, la fonction F est bien définie. On peut écrire pour $x > 0$

$$F(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

avec $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$. Pour montrer que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} , il suffit de montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} . Chaque fonction f_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} , il suffit donc de montrer que pour tout $k \geq 1$, $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement sur \mathbb{R}^{+*} pour conclure. Soit $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$|f_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{(n+x)^{k+1}} \leq \frac{k!}{n^{k+1}}.$$

Donc $\|f_n\|_\infty \leq k!n^{-k-1}$ et comme $\sum_{n \geq 1} k!n^{-k-1}$ converge (car $k \geq 1$), on en déduit que $\sum_{n \geq 1} f_n$ est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \geq 1$, donc est de classe \mathcal{C}^∞ .

2. Soit $x > 0$. On a

$$F(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+x}.$$

On en déduit

$$F(x+1) + F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+x} = \frac{1}{x}.$$

Comme F est continue en 1, il vient $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} F(1)$. Donc :

$$F(x) = \frac{1}{x} - F(x+1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

3. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $]0; 1]$. De plus,

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

et $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ converge car $1-x < 1$.

Pour montrer que l'intégrale vaut $F(x)$, on a envie d'écrire

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{x+n-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{x-1+n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

Il reste à justifier la deuxième égalité. Soit $f_n(t) = (-1)^n t^{x-1+n}$, la deuxième égalité se résume à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^n f_k(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(t) dt,$$

on va utiliser le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions

$$(g_n)_{n \geq 0} = \left(\sum_{k=0}^n f_k \right)_n$$

pour justifier cette égalité. Il est clair que $(g_n)_n$ converge simplement vers $t \mapsto t^{x-1}(1+t)^{-1}$, il reste à montrer la domination. La suite $((-1)^n t^{x+n-1})_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées donc

$$\forall n \geq 0, \forall t \in [0; 1], \quad |g_n(t)| = \left| \sum_{k=0}^n f_k(t) \right| \leq |f_0(t)| = t^{1-x}.$$

Or $t \mapsto t^{1-x}$ est intégrable sur $[0; 1]$ donc on peut bien appliquer le théorème de convergence dominée.

4. On va présenter deux méthodes, la première utilise la représentation intégrale de la question 3. Le changement de variable $u = t^x$ donne

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{1}{1+u^{\frac{1}{x}}}$$

Une application immédiate du théorème de convergence dominée montre que

$$\int_0^1 \frac{du}{1+u^{\frac{1}{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

et donc

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

La seconde méthode utilise à nouveau la relation de la question 2. et le fait que F soit décroissante. En effet, pour $x > 0$

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

par le critère spécial des séries alternées, le signe de cette somme est celui de son premier terme, qui est négatif. Donc $F'(x) \leq 0$ et F est décroissante. On déduit alors de la question 2 que pour $x > 1$

$$2F(x+1) \leq \frac{1}{x} \leq 2F(x).$$

Soit encore

$$\frac{1}{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2(x-1)}$$

et à partir de cet encadrement on prouve facilement que $2xF(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ c'est-à-dire

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Solution 9. (Enoncé)

Soit $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$ alors chaque f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et pour $x > 0$ $f'_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} - \frac{nx e^{-nx}}{\ln(n)}$. Soit alors $b > a > 0$, on a pour $x \in [a; b]$

$$|f'_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{\ln(n)} + \frac{nbe^{-na}}{\ln(n)}$$

et donc

$$\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{e^{-an}}{\ln(n)} + \frac{nRe^{-an}}{\ln(n)}$$

Donc $\sum_{n \geq 2} f'_n$ converge normalement sur tout segment de $]0, +\infty[$ et donc S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
 Montrons maintenant que S n'est pas dérivable à droite en 0. On a $S(0) = 0$ et donc pour $x > 0$

$$\frac{S(x) - S(0)}{x - 0} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}.$$

La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$ est décroissante donc admet une limite (éventuellement infinie) en 0^+ . Soit $N \geq 2$ un entier, on a

$$\frac{S(x)}{x} \geq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}.$$

Donc en passant à la limite $x \rightarrow 0^+$ des deux côtés de l'inégalité il vient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln(n)}$$

On fait enfin tend N vers $+\infty$ et l'on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x)}{x} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} = +\infty$$

car $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge. Finalement, la fonction S n'est pas dérivable à droite en 0.

Solution 10. (Enoncé)

Le théorème d'approximation de Weierstrass ne fonctionne que sur un segment, ce qui n'est pas le cas ici. On s'en sort en considérant \tilde{f} un prolongement continue de f sur $I = [0; 3]$ (par exemple en reliant $f(1)$ et $f(2)$ par une fonction affine), on applique ensuite le théorème d'approximation de Weierstrass à \tilde{f} sur I .

Solution 11. (Enoncé)

C'est un polynôme. En effet, soit $(P_n)_n$ une suite de polynôme qui converge uniformément vers f sur \mathbb{R} , la suite $(P_n)_n$ est alors de Cauchy, *i.e.*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n, m \geq n_0, \quad \|P_n - P_m\|_{\infty} \leq 1.$$

Donc pour $n, m \geq n_0$, $P_n - P_m$ est un polynôme borné sur \mathbb{R} donc est constant :

$$P_n = P_m + \alpha_{n,m}, \quad \alpha_{n,m} = P_n(0) - P_m(0).$$

Soit $m \geq n_0$ fixé, alors $\alpha_{n,m} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(0) - P_m(0)$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = P_m(x) + f(0) - P_m(0)$ *i.e.* f est un polynôme.

Solution 12. (Enoncé)

Par linéarité, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 P(x)f(x) dx = 0$. Comme f est continue, d'après le théorème de Weierstrass il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[0; 1]$. Comme f bornée, $P_n f$ converge uniformément vers f^2 , on a alors :

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(x)f(x) \cdot dx = \int_0^1 f(x)^2 dx$$

D'où $f = 0$ par continuité de f .

2. Soit $n \geq 0$, on fait une intégration par parties en intégrant $x \mapsto e^{-x(1-i)}$ et en dérivant $x \mapsto x^{n+1}$. On obtient

$$I_{n+1} = \left[\frac{x^{n+1}}{1-i} e^{-x(1-i)} \right]_0^{\infty} + \frac{n+1}{1-i} \int_0^{\infty} x^n e^{-x(1-i)} dx = \frac{n+1}{1-i} I_n.$$

3. On en déduit donc que pour $n \geq 0$

$$I_n = \frac{n!}{(1-i)^n} I_0 = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}.$$

Donc pour tout $n \geq 0$, $I_{4n+3} \in \mathbb{R}$ i.e. $\text{Im}(I_{4n+3}) = 0$ et finalement

$$\int_0^{+\infty} x^{4n+3} \sin(x) e^{-x} dx = 0.$$

4. Le changement de variable $u = x^4$ dans l'intégrale précédente donne

$$\int_0^{\infty} u^n \sin\left(u^{\frac{1}{4}}\right) e^{-u^{\frac{1}{4}}} du = 0.$$

Donc $f(u) = \sin(u^{\frac{1}{4}}) e^{-u^{\frac{1}{4}}}$ vérifie $\int_0^{\infty} u^n f(u) du = 0$ pour tout $n \geq 0$ mais f n'est pas nulle.

Solution 13. (Enoncé)

On va montrer que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} pour tout $k \geq 1$. Chaque f_n est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} et $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . De plus, pour $k \geq 1$, $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n^{(k)}(x)| = |e^{-n} (in^2)^k e^{in^2 x}| = n^{2k} e^{-n},$$

donc $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement sur \mathbb{R} (donc uniformément car \mathbb{R} est de dimension finie en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel) et le théorème de dérivation termes à termes des séries de fonctions permet de conclure que f est de classe \mathcal{C}^{∞} sur \mathbb{R} .

Soit $k \geq 0$, alors

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} e^{-n} \geq k^{2k} e^{-k}.$$

Donc si f était développable en série entière en 0, alors la série $\sum_{k \geq 1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ aurait un rayon de convergence non nul. Or pour tout $x > 0$,

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \geq \frac{k^{2k} e^{-k}}{k!} x^k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^{2k} x^k e^{-k}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^k e^{-2k} x^k}{\sqrt{2\pi k}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

et donc la série $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ diverge et f n'est pas développable en série entière en 0.

Remarque : On aurait pu aussi utiliser la règle de CAUCHY-HADAMARD et montrer que :

$$\limsup \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = +\infty$$

Remarque : On peut montrer que f n'est développable en série entière en aucun point de \mathbb{R} .