Questions et Exercices sur la leçon 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Laurent Montaigu

Ce document vise à regrouper quelques questions qui peuvent être posées par le jury pour la leçon 243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications. Il y a aussi des exercices. Le niveau de difficulté donné (de 1 à 5 étoiles) est subjectif.

Contents

1 **Questions** 3

2 **Exercices** 4

3 **Solutions** 7

1 Questions

Voici une liste de questions auxquelles il faudrait être capable de répondre (relativement) rapidement :

- Donner les développements en séries entières $(\exp, \cos, \sin, \log(1+x), \dots)$ usuels ainsi que leurs rayon de convergence.

- Donner l'exemple d'une série entière de rayon 1 qui converge en tout point du cercle unité.

- Donner l'exemple d'une série entière de rayon 1 qui diverge en tout point du cercle unité.

- Donner l'exemple d'une série entière de rayon 1 qui diverge en 1 et converge en tout autre point du cercle unité.

- Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Y a-t-il convergence normale sur $D(0, R)$? Et convergence uniforme ?

- Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$, que vaut a_n en fonction des dérivées de f ?

- Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui n'est pas développable en série entière en 0.

- Enoncer et démontrer la formule de Cauchy pour $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$.

- Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon 1. On suppose que $\lim_{z\to 1^-} f(z)$ existe, est-ce que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et vaut $f(1)$? (Bonus : Connaissez-vous une condition suffisante pour que cela soit le cas ?)

et un VRAI/FAUX :

- Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon 1, alors $(a_n)_n$ est bornée.

- Si R et R' sont les rayons de convergences des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$, alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ est $\min(R, R')$.

- Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique n'est pas développable en série entière.

- Si le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est $R \geq 0$, alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n}$ est $\sqrt{R}$.

2 Exercices

Exercice 1 ★☆☆☆☆ (Solution)
Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ suivantes, où :

$$1.\ a_n = n^{\ln(n)}, \quad 2.\ a_n = e^{\sqrt{n}}, \quad 3.\ a_n = \tau(n)\ (n \geq 1), \quad 4.\ a_n = \binom{kn}{n} \text{ pour } k \geq 2.$$

où $\tau(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n.

Exercice 2 ★☆☆☆☆ (Solution)
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$1.\ \sum_{n\geq 0} a_n^2 z^n, \quad 2.\ \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n, \quad 3.\ \sum_{n\geq 0} \frac{n! a_n}{n^n} z^n.$$

Exercice 3 ★★☆☆☆ (Solution)
Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum_{n\geq 1} n! z^{n^2}$.

Exercice 4 ★★☆☆☆ (Solution)
Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ et f sa somme sur $]-R, R[$.

1. Déterminer R et étudier la convergence pour $x = \pm R$.
2. Déterminer $\lim_{x\to R^-} f(x)$.

Exercice 5 ★★☆☆☆ (Solution)
Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 *Résolution d'une équation différentielle par séries entières* ★★☆☆☆ (Solution)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0. \qquad (E)$$

En cherchant des solutions développables en séries entières.

Exercice 7 ★★★☆☆ (Solution)
Soit f une fonction développable en série entière en 0 de rayon de convergence 1. Montrer que f est développable en série entière en $\frac{1}{2}$ et déterminer le rayon de convergence.

Exercice 8 *Identité de Wald* ★★★☆☆ (Solution)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ un suite de variables aléatoires définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui sont de même loi, indépendantes, et indépendantes de N. On pose $S = \sum_{i=1}^N X_i$ (on convient que $S = 0$ si $N = 0$).

1. Montrer que S est une variable aléatoire.
2. Déterminer sa fonction génératrice G_S en fonction des fonctions génératrices de N et X_1.
3. On suppose N et X_1 d'espérances finies, montrer que S est d'espérance finie et l'exprimer en fonction de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X_1)$.

Exercice 9 *Points singulier d'une série entière* ★★★☆☆ (Solution)
Soit $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon 1. Un point $z_0 \in \mathbb{C}$ de module 1 est dit point régulier s'il existe un prolongement holomorphe à f au disque $D(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ pour un $\varepsilon > 0$. Un point est dit singulier s'il n'est pas régulier. Montrer qu'il existe toujours un point singulier.
On pourra raisonner par l'absurde et utiliser un argument de compacité.

Exercice 10 ★★★☆☆ (Solution)
Soit $(a_n)_n$ une suite de complexes et $(b_n)_n$ une suite strictement positive. On suppose que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ vaut 1 et que $\sum_{n\geq 0} b_n$ diverge. On suppose de plus que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Exercice 11 ★★★☆☆ (Solution)
Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 12 ★★★☆☆ (Solution)
Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n+in^2x}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 13 *Nombre d'involutions de $\mathfrak{S}_n$* ★★★☆☆ (Solution)
Soit I_n le nombre d'involutions de $\mathfrak{S}_n$, c'est à dire le nombre de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui vérifient $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{[\![1;n]\!]}$, on convient que $I_0 = 1$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!}$ et f la somme de cette série entière.

1. Montrer que $R \geq 1$.
2. Montrer que pour $n \geq 0$, $I_{n+2} = (n+1)I_n + I_{n+1}$.
3. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, $f(z) = \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right)$. En déduire que $R = +\infty$.
4. En déduire une expression de I_n sous la forme d'une somme.
5. ★★★★★ Montrer que $I_n = O\left(n^{\frac{n+1}{2}} \exp\left(-\frac{n}{2} + \sqrt{n}\right)\right)$. On utilisera la formule de Cauchy sur le cercle de centre 0 et de rayon r_n, où r_n vérifie $r_n + r_n^2 = n$.

Exercice 14 ★★★★☆ (Solution)
Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

On pourra faire une comparaison série/intégrale.

Exercice 15 ★★★★☆ (Solution)
Soit f une fonction entière, on suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $n \geq 0$ tel que $f^{(n)}(z) = 0$. Montrer que f est un polynôme. *On pourra appliquer le théorème de* Baire *aux* $F_n = \{n \geq 0 \mid f^{(n)}(z) = 0\}$.

Exercice 16 ★★★★★ (Solution)
(Les questions 2 et 3 de cet exercice nécessitent des connaissances sur la fonction de Möbius). On note φ l'indicatrice d'Euler et μ la fonction de Möbius.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \varphi(n)x^n$.
2. Montrer que $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}$.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{\pi^2}n^2$.
4. En déduire un équivalent de $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)x^n$ en 1^-, on utilisera l'exercice 10.

Exercice 17 ★★★★★ (Solution)

Soit $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et injective sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon $R > 0$, montrer que f' ne s'annule pas.

On pourra utiliser le théorème de Rouché.

3 Solutions

Solution 1. (Enoncé)
1. Par la règle de Cauchy-Hadamard :

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n^{\ln(n)}}} = \frac{1}{\limsup n^{\frac{\ln(n)}{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

2. Par la règle de Cauchy-Hadamard :

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{e^{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\limsup e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

3. De l'inégalité $1 \leq \tau(n) \leq n$, on en déduit que le rayon de convergence recherché vaut 1.
4. On utilise la formule de Stirling pour obtenir un équivalent de a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(kn)!}{n!(n(k-1))!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi nk}n^{kn}k^{kn}e^{-kn}}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n(k-1)}(k-1)^{n(k-1)}n^{n(k-1)}e^{-n(k-1)}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi(k-1)}}\left(\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Donc le rayon de convergence vaut $\frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}$. On pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert ou Cauchy-Hadamard après avoir vérifié que $((kn)!)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k k^k e^{-k}$.

Solution 2. (Enoncé)
1. On utilise par exemple la formule de Cauchy-Hadamard :

$$R_1 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n^2|}} = \left(\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}\right)^2 = R^2.$$

2. On peut aussi utiliser la formule de Cauchy-Hadamard, ou alors faire autrement. Soit $z \in \mathbb{C}$ montrons que $(\frac{a_n}{n!}z^n)_{n\geq 0}$ est bornée, on sait que la suite $(a_n\left(\frac{R}{2}\right)^n)_{n\geq 0}$ est bornée. De plus :

$$\frac{a_n}{n!}z^n = a_n\left(\frac{R}{2}\right)^n \frac{\left(\frac{2z}{R}\right)^n}{n!},$$

donc comme la suite $(\frac{\left(\frac{2z}{R}\right)^n}{n!})_{n\geq 0}$ est bornée (elle tend vers 0 par croissances comparées), la suite $(\frac{a_n z^n}{n!})_{n\geq 0}$ est bornée et ce pour tout $z \in \mathbb{C}$ et donc $R_2 = +\infty$.
3. On a l'équivalent suivant, par la formule de Stirling :

$$\frac{n!a_n}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}a_n e^{-n}$$

et donc $R_3 = eR$.

Solution 3. (Enoncé)
Notons R le rayon de convergence recherché. On peut procéder de plusieurs façons.
Si $z = 1$, alors $n!z^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $R \leq 1$. Enfin, si $0 < |z| < 1$, alors :

$$|n!z^{n^2}| \leq |n^n z^{n^2}| = e^{n\ln(n)+\ln(|z|)n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc $R = 1$. On peut aussi utiliser la formule de Cauchy-Hadamard. On écrit $\sum_{n\geq 1} n!z^{n^2} = \sum_{n\leq 1} a_n z^n$ avec :

$$a_n = \begin{cases} (\sqrt{n})! & \text{si } n \text{ carré parfait} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où,
$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n^2]{n!} = 1$$
car $\frac{1}{n^2}\ln(n!) \leq \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où le résultat en prenant l'exponentielle.

Solution 4. (Enoncé)
1. On a l'équivalent suivant : $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, or la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est de rayon 1 (par exemple par le règle de d'ALEMBERT ou de CAUCHY-HADAMARD) donc $R = 1$.
2. Pour $x = 1$, $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc la série diverge en 1.
Pour $x = -1$, on a $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Or pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et sin est positive croissante sur cet intervalle, donc la suite $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est positive est décroissante et donc $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge par le critère spécial des séries alternées.
3. Pour avoir une idée de la limite, on peut faire le raisonnement heuristique suivant :
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 1^-} x^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty.$$
Montrons le maintenant de manière rigoureuse. Par positivité de $nx^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ pour $x \geq 0$, la fonction f est croissante sur $[0,1]$ donc admet, quand x tend vers 1^-, une limite l dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Soit $N \geq 1$ et $x > 0$, alors :
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \sum_{n=1}^{N} x^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
en passant à la limite $x \to 1^-$ dans l'inégalité précédente il vient :
$$\forall N \geq 1, \quad l \geq \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$
Donc en passant à la limite $N \to +\infty$, il vient finalement :
$$l \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty.$$
Donc $l = +\infty$ et cela conclut.

Solution 5. (Enoncé)
Montrons que l'intégrale est bien convergente, notons $f : t \mapsto \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ définie sur $]0,1[$. Alors f est continue sur $]0,1[$ et se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$ car :
$$f(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \ln(t)\ln(1-t) \underset{t\to 1^-}{\sim} (t-1)\ln(1-t) \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 0.$$
De plus,
$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -\ln(t),$$
et comme $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et finalement $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
On sait que pour $t \in [0,1[$,
$$\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}.$$
D'où
$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(t)t^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t.$$

Or, par intégration par parties

$$\int_0^1 t^{n-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^n}{n}\ln(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n^2}.$$

Comme,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \left|\frac{\ln(t)t^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty.$$

on peut donc intervertir série et intégrale et cela donne :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(t)t^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3).$$

Solution 6. (Enoncé)
On cherche $R > 0$ et des coefficients $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que la fonction $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ soit de rayon de convergence R et solution de (E) sur $]-R,R[$. On a pour $x \in]-R,R[$,

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

donc pour $x \in]-R,R[$,

$$(1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)(a_{n+2}+a_n)x^n$$

donc y est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall n \geq 0, \quad a_{n+2} = -a_n,$$

ce qui donne :

$$\forall n \geq 0, \quad a_{2n} = (-1)^n a_0 \text{ et } a_{2n+1} = (-1)^n a_1.$$

Donc $R \geq 1 > 0$ et y est de la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} \\ &= a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} + a_1 x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \\ &= \frac{a_0+a_1x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

On obtient donc un système fondamental de solution sur $]-1,1[$, mais un calcul immédiat montre que les solutions sont aussi valables sur $\mathbb{R}$. Or l'équation (E) est une équation homogène de second degré donc l'espace des solutions est de dimension 2. On en déduit alors que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\left\{x \mapsto \frac{a_0+a_1x}{1+x^2} \mid (a_0,a_1) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Solution 7. (Enoncé)
Posons $g(z) = f(z + \frac{1}{2})$, il s'agit de déterminer si g est développable en série entière en 0. La fonction $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est développable en série entière en 0 de rayon de convergence 1, donc f est holomorphe sur $D(0,1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Donc la fonction g est holomorphe sur $D(0, \frac{1}{2})$ donc y est développable en série entière avec un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.
Si on avait $R > \frac{1}{2}$, alors la série entière $\sum_{n=0} a_n (z + \frac{1}{2})^n$ serait absolument convergente en $z = \frac{1}{2} + \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ et donc la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ convergerait pour un $z = 1 + \varepsilon > 1$ ce qui contredit qu'elle soit de rayon de convergence 1, d'où $R = \frac{1}{2}$.

Solution 8. (Enoncé)
1. La variable aléatoire S est à valeurs dans $\mathbb{N}$, de plus pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(S = n) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (N = k) \bigcap \left(\sum_{i=1}^{k} X_i = n \right) \in \mathcal{F}$$

donc S est bien une variable aléatoire discrète.
2. Soit $t \in]-1, 1[$, alors les fonctions génératrices sont bien définies. On a $G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n$. Soit $n \geq 0$, alors en utilisant l'égalité de la question précédente et la σ-additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(N = k, \sum_{i=1}^{k} X_i = n \right)$$

ce qui par indépendance donne :

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = n \right).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
G_S(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = n) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = n \right) t^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = n \right) t^n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) G_{\sum_{i=1}^{k} X_i}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) (G_{X_1}(t))^k \\
&= G_N(G_{X_1}(t))
\end{aligned}$$

l'interversion des symboles sommes (ligne 2) est justifiée car :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = n \right) t^n \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \sum_{n=0}^{\infty} |t|^n \leq \frac{1}{1-t} < +\infty$$

et l'égalité $G_{\sum_{i=1}^{k} X_i} = G_{X_1}^k$ vient de l'indépendance des $(X_i)_{i \geq 0}$ et le fait qu'ils suivent la même loi.
3. Si X_1 et N sont d'espérances finies, alors G_{X_1} et G_N sont dérivables en 1^-, donc G_S aussi par composition, donc S est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(S) = G'_S(1) = G'_{X_1}(1) G'_N(G_{X_1}(1)) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N),$$

car $G_{X_1}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = n) = 1$.

Solution 9. (Enoncé)
Supposons par l'absurde que tous les points soient réguliers. Alors pour tout $z \in \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, il existe $\varepsilon_z > 0$ et une fonction holomorphe f_z sur $D(z, \varepsilon)$ qui prolonge f. Comme $\mathbb{S} \subset \cup_{z\in\mathbb{S}} D(z, \varepsilon_z)$, par compacité de $\mathbb{S}$, on peut écrire :

$$\mathbb{S} \subset \cup_{i=1}^n D(z_i, \varepsilon_{z_i})$$

avec $z_i \in \mathbb{S}$. Soit alors $\varepsilon := \min_{i=1}^n \varepsilon_{z_i} > 0$, la fonction f est prolongeable en une fonction holomorphe sur l'ensemble :

$$D(0,1) \cup \subset \cup_{i=1}^n D(z_i, \varepsilon_{z_i}).$$

Mais cet ensemble contient le disque $D(0, 1+\varepsilon)$, en notant g le prolongement de f, g est holomorphe sur $D(0, 1+\varepsilon)$ donc y est développable en série entière. En écrivant $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ avec un rayon de convergence $R \geq 1 + \varepsilon > 1$, l'unicité du développement en série entière donne $a_n = b_n$ pour tout n, ce qui contredit le fait que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ soit 1.

Solution 10. (Enoncé)
Montrons d'abord que $\sum_{n=0}^\infty b_n x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$. En effet, comme $(b_n)_n$ est strictement positive, la quantité de gauche admet une limite S (éventuellement infinie) en 1^-. On a pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \geq \sum_{n=0}^{N} b_n x^n.$$

Donc en passant à la limite en x, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S \geq \sum_{n=0}^N b_n$ et donc $S = +\infty$.

Soit maintenant $\epsilon > 0$ et $x \in]0,1[$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|a_n - b_n| < \epsilon b_n$. On a donc pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} - 1 \right| &\leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - b_n| x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} + \frac{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n - b_n| x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \\
&\leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - b_n| x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} + \epsilon \\
&\leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - b_n|}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} + \epsilon
\end{aligned}$$

Le premier terme est plus petit que ϵ pour x assez proche de 1 et cela conclut.

Solution 11. (Enoncé)
Soit $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$. La fonction f est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1, donc est définie sur $]-1, 1[$. De plus, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge par le critère spécial des séries alternées donc $f(1)$ est bien défini. Soit $x \in]0,1[$, alors la suite $\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ est décroissante de limite nulle donc par le critère spécial des séries alternées :

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1} \right| \leq \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \leq \frac{1}{3n+1}.$$

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ donc f est continue sur $[0,1]$. Il suffit alors de calculer $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$ et de prendre la limite quand $x \to 1^-$ pour avoir le résultat.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{-x^3}{1+x^3} = \frac{1}{1+x^3} - 1.$$

La décomposition en élément simple de $\frac{1}{X^3+1}$ dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme :

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$

en multipliant par $X+1$ et en évaluant en -1 il vient : $a = \frac{1}{3}$. En multipliant par X et en regardant en $+\infty$ il vient $b = -a = -\frac{1}{3}$. Enfin, en évaluant en $X = 0$ il vient $c = 1 - a = \frac{2}{3}$. Donc pour $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -x + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{3(t+1)} + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= -x + \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\left(\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t - 3\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1}\right) \\
&= -x + \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\
&= -x + \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{2(0-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= -x + \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

Donc en prenant la limite quand $x \to 1^-$, il vient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 + \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = -1 + \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Solution 12. (Enoncé)
On va montrer que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \geq 1$. Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et$\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $k \geq 1$, $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n^{(k)}(x)| = |e^{-n}(in^2)^k e^{in^2 x}| = n^{2k}e^{-n},$$

donc $\sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (donc uniformément car $\mathbb{R}$ est de dimension finie en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel) et le théorème de dérivation termes à termes des séries de fonctions permet de conclure que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $k \geq 0$, alors :

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k}e^{-n} \geq k^{2k}e^{-k}.$$

Donc si f était développable en série entière en 0, alors la série $\sum_{k\geq 1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ aurait un rayon de convergence non nul. Or pour tout $x > 0$,

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \geq \frac{k^{2k}e^{-k}}{k!} x^k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^{2k}x^k e^{-k}}{\sqrt{2\pi k}k^k e^{-k}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^k e^{-2k} x^k}{\sqrt{2\pi k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et donc la série $\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ diverge et f n'est pas développable en série entière en 0.

Remarque : On aurait pu aussi utiliser la règle de CAUCHY-HADAMARD et montrer que :

$$\limsup \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = +\infty$$

Remarque : On peut montrer que f n'est développable en série entière en aucun point de $\mathbb{R}$.

Solution 13. (Enoncé)
1. Comme $\mathfrak{S}_n$ est de cardinal $n!$, il est clair que $I_n \leq n!$ et donc $\frac{I_n}{n!} \leq 1$ et donc $R \geq 1$.
2. Soit σ une involution de $\mathfrak{S}_{n+2}$. Si $\sigma(n+2) = n+2$, alors σ restreinte à $[\![1; n+1]\!]$ est une involution et il y a I_{n+1} choix pour σ. Si $\sigma(n+2) \neq n+2$, alors il y a $(n+1)$ choix pour $\sigma(n+2)$ (tous les entiers de $[\![1; n+1]\!]$). Si $\sigma(n+1) = k$, alors nécessairement $\sigma(k) = n+1$ car σ est une involution. Il reste alors a choisir les n autres valeurs de σ, ce qui revient à choisir une involution d'un ensemble à n éléments : il y en a I_n. Finalement on a bien la formule attendue.
3. D'après la question précédente, pour tout $n \geq 0$ et $z \in D(0, R)$:

$$\frac{I_{n+2}}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{I_n}{n!} z^{n+1} + \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}$$

ce qui en sommant de $n = 0$ à $+\infty$ donne :

$$f'(z) - 1 = zf(z) + (f(z) - 1)$$

i.e.

$$f'(z) = (1+z)f(z).$$

En résolvant cette équation différentielle sur $]-R, R[$, il vient :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$$

car $f(0) = 1$. Or les fonctions $z \mapsto \exp(z + \frac{z^2}{2})$ et $z \mapsto f(z)$ sont holomorphes sur $D(0, R)$ et coïncident sur $]-R, R[$ donc sont égales sur $D(0, R)$ par le principe des zéros isolés. Mais $z \mapsto \exp(z + \frac{z^2}{2})$ est entière donc développable en série entière sur $\mathbb{C}$, par unicité du développement en série entière, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} z^n$ est $+\infty$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$, alors :

$$\begin{aligned}
\exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right) &= \exp(z) \exp\left(\frac{z^2}{2}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^k k!} \\
&= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{z^{n+2k}}{n!k!2^k} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n+2k=p} \frac{z^{n+2k}}{n!k!2^k} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n+2k=p} \frac{1}{n!k!2^k} \right) z^p
\end{aligned}$$

donc par unicité du développement en série entière :

$$\forall p \geq 0, \quad I_p = p! \sum_{n+2k=p} \frac{1}{n!k!2^k}.$$

5. La formule de CAUCHY donne pour $r > 0$ et $n \geq 1$:

$$I_n = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(re^{it} + \frac{r^2}{2} e^{2it}\right) e^{-int} \, \mathrm{d}t.$$

Soit $n \geq 0$, alors il existe un unique $r_n \geq 0$ tel que $r_n + r_n^2 = n$, en effet en résolvant l'équation du second degré en r_n on a $r_n = \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$. On applique la formule de Cauchy à $r = r_n$, alors :

$$\begin{aligned} I_n &= |I_n| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi r_n^n} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \exp\left(r_n e^{int} + \frac{r_n^2}{2} e^{2int} \right) e^{-int} \right| \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{n!}{r_n^n} \exp\left(r_n + \frac{r_n^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Or, en utilisant le développement asymptotique $r_n = \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$:

$$\begin{aligned} r_n^n &= \exp(n \log(r_n)) \\ &= \exp\left(n \ln\left(\sqrt{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \right) \\ &= \exp\left(n \ln(\sqrt{n}) - \frac{\sqrt{n}}{2} + o(1) \right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{n}{2}} \exp(-\frac{\sqrt{n}}{2}) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \exp(r_n + \frac{r_n^2}{2}) &= \exp\left(\frac{n}{2} + \frac{r_n}{2} \right) \\ &= \exp\left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{4} + o(1) \right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne bien :

$$I_n = O\left(\frac{n!}{r_n^n} \exp\left(r_n + \frac{r_n^2}{2} \right) \right) = O\left(n^{\frac{n+1}{2}} \exp\left(-\frac{n}{2} + \sqrt{n} \right) \right)$$

Remarque : On pourrait se demander pourquoi ne pas choisir que $r_n + r_n^2 = n$, choix *a priori* plus simple, avec un tel choix de r_n, la borne obtenue sur I_n est moins bonne.
Remarque : On peut montrer l'équivalent suivant :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} n^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{n}{2} + \sqrt{n} \right),$$

avec par exemple la méthode du col, c'est aussi fait dans *Topologie et analyse fonctionnelle - Thèmes d'analyse pour l'agrégation* de Stephane GONNORD et Nicolas TOSEL avec une analyse qualitative d'équations différentielles mais dans les deux cas, c'est très largement hors-programme pour l'agrégation.

Solution 14. (Enoncé)
Soit $0 < x < 1$ fixé. La fonction $t \mapsto x^{t^2}$ est décroissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} x^{t^2} \, \mathrm{d}t \leq x^{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} x^{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Soit en sommant :

$$\int_1^{\infty} x^{t^2} \, \mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_0^{\infty} x^{t^2} \, \mathrm{d}t$$

Or $\int_1^{\infty} x^{t^2} \, \mathrm{d}t \underset{x\to1^-}{\sim} \int_0^{\infty} x^{t^2} \, \mathrm{d}t$ donc $f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \int_0^{\infty} x^{t^2} \, \mathrm{d}t$. Il reste donc à évaluer cette dernière intégrale, on fait pour cela le changement de variable $u = \sqrt{-\log(x)}t$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\sqrt{-\log(x)}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{-\log(x)}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&\underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé la valeur de l'intégrale de GAUSS : $\int_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Remarque : On peut procéder autrement. En notant $\theta(t) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}$, alors $\sum_{n=1}^\infty x^{n^2} = \theta\left(-\frac{\ln(x)}{\pi}\right)$. La formule sommatoire de POISSON donne $\theta(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(2\theta\left(\frac{1}{t}\right)+1\right) - \frac{1}{2}$. Donc :

$$
\sum_{n=1}^\infty x^{n^2} = \theta\left(-\frac{\ln(x)}{\pi}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln(x)}}\left(2\theta\left(\frac{\pi}{-\ln(x)}\right)+1\right) - \frac{1}{2} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.
$$

Solution 15. (Enoncé)
On note pour $n \geq 0$ un entier, $F_n = \{z \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(z) = 0\}$. Les ensembles F_n sont des fermés de $\mathbb{C}$ par image réciproque d'un fermé par une application continue, par hypothèse leur réunion vaut $\mathbb{C}$. Donc par le théorème de BAIRE il existe un $n \geq 0$ tel que F_n soit d'intérieur non vide, la fonction holomorphe $f^{(n)}$ s'annule donc en un ensemble avec un point d'accumulation, donc est nulle par le principe des zéros isolés, et f est bien un polynôme.

Solution 16. (Enoncé)
1. De l'inégalité $1 \leq \varphi(n) \leq n$, on en déduit que le rayon de convergence recherché vaut 1.
2. On peut utiliser l'inversion de MÖBIUS et l'égalité $n = \sum_{d|n}\varphi(d)$. On peut aussi faire un calcul direct, si $n=1$ le résultat est immédiat. Si $n \geq 2$, on écrit $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premiers. Les diviseurs d de n sont de la forme $d = \prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i}$ avec $\beta_i \leq \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$. De plus, $\mu(d) = 0$ s'il existe $i \in [\![1;k]\!]$ tel que $\beta_i > 1$. On peut alors écrire :

$$
\begin{aligned}
\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d} &= \sum_{\beta_1=0}^{1}\cdots\sum_{\beta_k=0}^{1}\mu(p_1^{\beta_1})p_1^{\alpha_1-\beta_1}\dots p_k^{\alpha_k-\beta_k} \\
&= \left(\sum_{\beta_1=0}^{1}\mu(p_1^{\beta_1})p_1^{\alpha_1-\beta_1}\right)\dots\left(\sum_{\beta_k=0}^{1}\mu(p_k^{\beta_k})p_k^{\alpha_k-\beta_k}\right) \\
&= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right)\dots\left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right) \\
&= \varphi(n).
\end{aligned}
$$

3. On utilise la question précédente et on intervertit les sommes :

$$
\sum_{k=1}^n \varphi(k) = \sum_{k=1}^n\sum_{d|k}\mu(d)\frac{k}{d} = \sum_{d=1}^n\sum_{d|k}\mu(d)\frac{k}{d} = \sum_{d=1}^n \mu(d)\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{d}\rfloor} l = \sum_{d=1}^n \frac{\mu(d)}{2}\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor+1\right)\right)
$$

En écrivant $\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor = \frac{n}{d} + O(1)$ il vient :

$$
\sum_{k=1}^n \varphi(k) = \sum_{d=1}^n \frac{\mu(d)}{2}\left(\frac{n}{d}+O(1)\right)^2 = \frac{n^2}{2}\sum_{d=1}^n\frac{\mu(d)}{d^2} + nO\left(\sum_{d=1}^n\frac{\mu(d)}{d}\right) = \frac{3}{\pi^2}n^2 + O\left(n\ln(n)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{\pi^2}n^2
$$

4. Soit $0 < x < 1$, alors

$$
\frac{x}{1-x}f(x) = \sum_{n=1}^\infty\left(\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(k)\right)x^n.
$$

Donc en utilisant l'exercice 10 (pour les deux premiers équivalents), il vient :

$$\frac{x}{1-x}f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\pi^2}n^2x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{3}{\pi^2}\frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

et donc,

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Solution 17. (Enoncé)
Comme f est holomorphe sur $D(0,R)$, on peut écrire $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ où la série entière est de rayon de convergence au moins $R > 0$. Supposons que f' s'annule en $z_0 \in \mathbb{C}$, quitte à considérer $z \mapsto f(z+z_0) - f(z_0)$ qui est holomorphe sur $D(0,R')$ avec $0 < R' < R$ on peut supposer $z_0 = 0$ et $f(0) = 0$, on a donc $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Montrons que f ne peut être injective, on utilise pour cela le théorème de Rouché. Soit $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\} \geq 2$, alors :

$$f(z) = a_k z^k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n = a_k z^k + g(z)$$

avec $g(z) = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n$ qui est une fonction holomorphe sur $D(0,R)$. Comme f n'est pas constante, les zéros de f' sont isolés : il existe donc $r > 0$ tel que $f'(z) \neq 0$ pour $z \in D(0,r) \setminus \{0\}$. Soit $w \in \mathbb{C}^*$ un complexe dont on précisera certaines conditions sur lui plus tard. On écrit :

$$f(z) - f(w) = F(z) + g(z)$$

avec $F(z) = a_k z^k - f(w)$. Il existe $r_1 \in]0,r[$ indépendant de w tel que pour tout $z \in D(0,r_1)$,

$$|g(z)| < |F(z)|$$

On choisit maintenant w assez petit pour avoir $0 < |f(w)| < |a_k||r|^k$ (possible par continuité de f) et $|w| \in]0,r_1[$. Donc par le théorème de Rouché, les fonctions $F+g$ et F ont autant de zéros dans $D(0,r_1)$, or F a k zéros dans $D(0,r_1)$ (car $|f(w)| < |a_k||r|^k$), donc $z \mapsto F(z)+g(z) = f(z)-f(w)$ a $k \geq 2$ zéros dans $D(0,r_1)$, mais comme $f'(z) \neq 0$ pour $z \in D(0,r_1) \setminus \{0\}$, ces zéros sont forcément distincts, ce qui contredit l'injectivité de f, donc f' ne s'annule pas.