

Questions et Exercices sur la leçon 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

LAURENT MONTAIGU

Ce document vise à regrouper quelques questions qui peuvent être posées par le jury pour la leçon 243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications. Il y a aussi des exercices.

1 Questions

Voici une liste de questions auxquelles il faudrait être capable de répondre (relativement) rapidement :

- Donner les développements en séries entières (exp, cos, sin, $\log(1+x)$, ...) usuels ainsi que leurs rayon de convergence.
- Donner l'exemple d'une série entière de rayon 1 qui converge en tout point du cercle unité.
- Donner l'exemple d'une série entière de rayon 1 qui diverge en tout point du cercle unité.
- Donner l'exemple d'une série entière de rayon 1 qui diverge en 1 et converge en tout autre point du cercle unité.
- Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Y a-t-il convergence normale sur $D(0, R)$? Et convergence uniforme ?
- Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$, que vaut a_n en fonction des dérivées de f ?
- Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ qui n'est pas développable en série entière en 0.
- Enoncer et démontrer la formule de CAUCHY pour $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$.
- Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon 1. On suppose que $\lim_{z \rightarrow 1^-} f(z)$ existe, est-ce que $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et vaut $f(1)$? (Bonus : Connaissez-vous une condition suffisante pour que cela soit le cas ?)

et un VRAI/FAUX :

- Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon 1, alors $(a_n)_n$ est bornée.
- Si R et R' sont les rayons de convergences des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$, alors le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ est $\min(R, R')$.
- Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique n'est pas développable en série entière.
- Si le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est R , alors le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}$ est \sqrt{R} .

2 Exercices

Exercice 1 (Solution)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ suivantes, où :

$$1. a_n = n^{\ln(n)}, \quad 2. a_n = e^{\sqrt{n}}, \quad 3. a_n = \tau(n) \ (n \geq 1), \quad 4. a_n = \binom{kn}{n} \text{ pour } k \geq 2.$$

où $\tau(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n .

Exercice 2 (Solution)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$1. \sum_{n \geq 0} a_n^2 z^n, \quad 2. \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n, \quad 3. \sum_{n \geq 0} \frac{n! a_n}{n^n} z^n.$$

Exercice 3 (Solution)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum_{n \geq 1} n! z^{n^2}$.

Exercice 4 (Solution)

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ et f sa somme sur $] -R, R[$.

1. Déterminer R et étudier la convergence pour $x = \pm R$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow R^-} f(x)$.

Exercice 5 (Solution)

On note pour $n \geq 0$, u_n le nombre de solutions (k, m) dans \mathbb{N}^2 de l'équation :

$$2k + m = n.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ vaut exactement 1. On note f sa somme.
2. Montrer que :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x}.$$

3. En déduire une expression de u_n en fonction de n .

Exercice 6 (Solution)

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$.

Exercice 7 Résolution d'une équation différentielle par séries entières (Solution)

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation :

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0. \tag{E}$$

En cherchant des solutions développables en séries entières.

Exercice 8 (Solution)

Soit f une fonction développable en série entière en 0 de rayon de convergence 1. Montrer que f est développable en série entière en $\frac{1}{2}$ et déterminer le rayon de convergence.

Exercice 9 Identité de Wald (Solution)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{N} et $(X_i)_{i \geq 1}$ un suite de variables aléatoires définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{N} , qui sont de même loi, indépendantes, et indépendantes de N . On pose $S = \sum_{i=1}^N X_i$ (on convient que $S = 0$ si $N = 0$).

1. Montrer que S est une variable aléatoire.
2. Déterminer sa fonction génératrice G_S en fonction des fonctions génératrices de N et X_1 .
3. On suppose N et X_1 d'espérances finies, montrer que S est d'espérance finie et l'exprimer en fonction de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X_1)$.

Exercice 10 *Points singulier d'une série entière* (Solution)

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon 1. Un point $z_0 \in \mathbb{C}$ de module 1 est dit point régulier s'il existe un prolongement holomorphe à f au disque $D(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ pour un $\varepsilon > 0$. Un point est dit singulier s'il n'est pas régulier. Montrer qu'il existe toujours un point singulier.

On pourra raisonner par l'absurde et utiliser un argument de compacité.

Exercice 11 (Solution)

Soit $(a_n)_n$ une suite de complexes et $(b_n)_n$ une suite strictement positive. On suppose que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ vaut 1 et que $\sum_{n \geq 0} b_n$ diverge. On suppose de plus que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Exercice 12 (Solution)

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 13 (Solution)

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n+in^2} x^n$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} mais n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 14 *Nombre d'involutions de \mathfrak{S}_n* (Solution)

Soit I_n le nombre d'involutions de \mathfrak{S}_n , c'est à dire le nombre de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui vérifient $\sigma^2 = \text{Id}_{\llbracket 1;n \rrbracket}$, on convient que $I_0 = 1$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ et f la somme de cette série entière.

1. Montrer que $R \geq 1$.
2. Montrer que pour $n \geq 0$, $I_{n+2} = (n+1)I_n + I_{n+1}$.
3. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, $f(z) = \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right)$. En déduire que $R = +\infty$.
4. En déduire une expression de I_n sous la forme d'une somme.

Exercice 15 (Solution)

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

On pourra faire une comparaison série/intégrale.

3 Solutions

Solution 1. (Enoncé)

1. Par la règle de CAUCHY-HADAMARD :

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n^{\ln(n)}}} = \frac{1}{\limsup n^{\frac{\ln(n)}{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

2. Par la règle de CAUCHY-HADAMARD :

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{e\sqrt{n}}} = \frac{1}{\limsup e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

3. De l'inégalité $1 \leq \tau(n) \leq n$, on en déduit que le rayon de convergence recherché vaut 1.

4. On utilise la formule de STIRLING pour obtenir un équivalent de a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(kn)!}{n!(n(k-1))!} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi kn} k^{kn} e^{-kn}}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n(k-1)} (k-1)^{n(k-1)} n^{n(k-1)} e^{-n(k-1)}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi(k-1)}} \left(\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Donc le rayon de convergence vaut $\frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}$. On pouvait aussi utiliser la règle de d'ALEMBERT ou CAUCHY-HADAMARD après avoir vérifié que $\frac{((kn)!)^{\frac{1}{n}}}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k k^k e^{-k}$.

Solution 2. (Enoncé)

1. On utilise par exemple la formule de CAUCHY-HADAMARD :

$$R_1 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n^2|}} = \left(\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \right)^2 = R^2.$$

2. On peut aussi utiliser la formule de CAUCHY-HADAMARD, ou alors faire autrement. Soit $z \in \mathbb{C}$ montrons que $(\frac{a_n}{n!} z^n)_{n \geq 0}$ est bornée, on sait que la suite $(a_n (\frac{R}{2})^n)_{n \geq 0}$ est bornée. De plus :

$$\frac{a_n}{n!} z^n = a_n \left(\frac{R}{2} \right)^n \frac{(\frac{2z}{R})^n}{n!},$$

donc comme la suite $(\frac{2z}{R})^n_{n \geq 0}$ est bornée (elle tend vers 0 par croissances comparées), la suite $(\frac{a_n z^n}{n!})_{n \geq 0}$ est bornée et ce pour tout $z \in \mathbb{C}$ et donc $R_2 = +\infty$.

3. On a l'équivalent suivant, par la formule de STIRLING :

$$\frac{n! a_n}{n^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_n \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n}{n^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} a_n e^{-n}$$

et donc $R_3 = eR$.

Solution 3. (Enoncé)

Notons R le rayon de convergence recherché. On peut procéder de plusieurs façons.

Si $z = 1$, alors $n! z^{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc $R \leq 1$. Enfin, si $0 < |z| < 1$, alors :

$$|n! z^{n^2}| \leq |n^n z^{n^2}| = e^{n \ln(n) + \ln(|z|) n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

et donc $R = 1$. On peut aussi utiliser la formule de CAUCHY-HADAMARD. On écrit $\sum_{n \geq 1} n! z^{n^2} = \sum_{n \leq 1} a_n z^n$ avec :

$$a_n = \begin{cases} (\sqrt{n})! & \text{si } n \text{ carré parfait} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où,

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n^2]{n!} = 1$$

car $\frac{1}{n^2} \ln(n!) \leq \frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ d'où le résultat en prenant l'exponentielle.

Solution 4. (Enoncé)

1. On a l'équivalent suivant : $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, or la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est de rayon 1 (par exemple par la règle de d'ALEMBERT ou de CAUCHY-HADAMARD) donc $R = 1$.

2. Pour $x = 1$, $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc la série diverge en 1.

Pour $x = -1$, on a $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Or pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et \sin est positive croissante sur cet intervalle, donc la suite $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est positive et décroissante et donc $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge par le critère spécial des séries alternées.

3. Pour avoir une idée de la limite, on peut faire le raisonnement heuristique suivant :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty.$$

Montrons le maintenant de manière rigoureuse. Par positivité de $n x^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ pour $x \geq 0$, la fonction f est croissante sur $[0, 1]$ donc admet, quand x tend vers 1^- , une limite l dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Soit $N \geq 1$ et $x > 0$, alors :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \sum_{n=1}^N x^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

en passant à la limite $x \rightarrow 1^-$ dans l'inégalité précédente il vient :

$$\forall N \geq 1, \quad l \geq \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Donc en passant à la limite $N \rightarrow +\infty$, il vient finalement :

$$l \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty.$$

Donc $l = +\infty$ et cela conclut.

Solution 5. (Enoncé)

1. Il est clair que $u_n \geq 1$ car $(k, m) = (0, n)$ est toujours solution de l'équation $2k + m = n$, donc le rayon de convergence vaut au plus 1. De même, pour un couple (k, m) solution, on a :

$$0 \leq k \leq n,$$

et une fois la valeur de k fixée, il y a au plus 1 valeur de m qui convient, et donc :

$$u_n \leq n + 1,$$

et donc finalement le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n x^n$ vaut 1.

2. Soit $x \in]-1, 1[$, partons du membre droit de l'équation que l'on va développer en série entière :

$$\frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m \right) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} x^{2k+m},$$

la dernière somme ayant un sens car la famille $(x^{2k+m})_{k,m \geq 0}$ est sommable.

On va maintenant utiliser le théorème de sommation par paquets. Notons pour $n \geq 0$:

$$I_n = \{(k, m) \in \mathbb{N}^2 \mid 2k + m = n\}.$$

Alors la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est une partition de \mathbb{N}^2 donc d'après le théorème de sommation par paquets :

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} x^{2k+m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(k,m) \in I_n} x^{2k+m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(k,m) \in \mathbb{N}^2} x^{2k+m} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{(k,m) \in \mathbb{N}^2} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

3. On va calculer d'une autre manière le développement en série entière de $\frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x}$, en faisant d'abord une décomposition en élément simple :

$$G := \frac{1}{1-X^2} \frac{1}{1-X} = \frac{1}{1+X} \frac{1}{(1-X)^2} = \frac{a}{1+X} + \frac{b}{1-X} + \frac{c}{(1-X)^2}.$$

On trouve a en multipliant G par $1+X$ et en évaluant en -1 pour obtenir $a = \frac{1}{4}$. En multipliant G par $(1-X)^2$ et en évaluant en 1 on trouve $c = \frac{1}{2}$. Enfin, en multipliant G par $(1-X)$ et "en faisant tendre X vers $+\infty$ " on trouve $a - b = 0$ et donc $b = \frac{1}{4}$. Finalement,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2}.$$

On développe ensuite chaque terme en série entière :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2} x^{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{4} + \frac{1}{4} + \frac{n+1}{2} \right) x^n. \end{aligned}$$

On en déduit par unicité des coefficients d'une série entière :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1 + (-1)^n}{4} + \frac{n+1}{2}.$$

Solution 6. (Énoncé)

Montrons que l'intégrale est bien convergente, notons $f : t \mapsto \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$ définie sur $]0, 1[$. Alors f est continue sur $]0, 1[$ et se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$ car :

$$f(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \ln(t) \ln(1-t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (t-1) \ln(1-t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 0.$$

De plus,

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(t),$$

et comme $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(t) dt$ converge, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$ converge et finalement $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

On sait que pour $t \in [0, 1[$,

$$\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}.$$

D'où

$$\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt = - \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(t) t^{n-1}}{n} dt.$$

Or, par intégration par parties

$$\int_0^1 t^{n-1} \ln(t) dt = \left[\frac{t^n}{n} \ln(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{n} dt = -\frac{1}{n^2}.$$

Comme,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left| \frac{\ln(t) t^{n-1}}{n} \right| dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

on peut donc intervertir série et intégrale et cela donne :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(t) t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3).$$

Solution 7. (Enoncé)

On cherche $R > 0$ et des coefficients $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que la fonction $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ soit de rayon de convergence R et solution de (E) sur $] -R, R[$. On a pour $x \in] -R, R[$,

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

donc pour $x \in] -R, R[$,

$$(1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)(a_{n+2} + a_n)x^n$$

donc y est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall n \geq 0, \quad a_{n+2} = -a_n,$$

ce qui donne :

$$\forall n \geq 0, \quad a_{2n} = (-1)^n a_0 \text{ et } a_{2n+1} = (-1)^n a_1.$$

Donc $R \geq 1 > 0$ et y est de la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} + a_1 x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \\ &= \frac{a_0 + a_1 x}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

On obtient donc un système fondamental de solution sur $] -1, 1[$, mais un calcul immédiat montre que les solutions sont aussi valables sur \mathbb{R} . Or l'équation (E) est une équation homogène de second degré donc l'espace des solutions est de dimension 2. On en déduit alors que les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont :

$$\left\{ x \mapsto \frac{a_0 + a_1 x}{1 + x^2} \mid (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Solution 8. (Énoncé)

Posons $g(z) = f(z + \frac{1}{2})$, il s'agit de déterminer si g est développable en série entière en 0. La fonction $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est développable en série entière en 0 de rayon de convergence 1, donc f est holomorphe sur $D(0, 1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Donc la fonction g est holomorphe sur $D(0, \frac{1}{2})$ donc y est développable en série entière avec un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

Si on avait $R > \frac{1}{2}$, alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + \frac{1}{2})^n$ serait absolument convergente en $z = \frac{1}{2} + \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ et donc la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ convergerait pour un $z = 1 + \varepsilon > 1$ ce qui contredit qu'elle soit de rayon de convergence 1, d'où $R = \frac{1}{2}$.

Solution 9. (Énoncé)

1. La variable aléatoire S est à valeurs dans \mathbb{N} , de plus pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(S = n) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (N = k) \cap \left(\sum_{i=1}^k X_i = n \right) \in \mathcal{F}$$

donc S est bien une variable aléatoire discrète.

2. Soit $t \in]-1, 1[$, alors les fonctions génératrices sont bien définies. On a $G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$. Soit $n \geq 0$, alors en utilisant l'égalité de la question précédente et la σ -additivité de \mathbb{P} :

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P} \left(N = k, \sum_{i=1}^k X_i = n \right)$$

ce qui par indépendance donne :

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^k X_i = n \right).$$

Donc,

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = n)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^k X_i = n \right) t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^k X_i = n \right) t^n \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) G_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) (G_{X_1}(t))^k \\ &= G_N(G_{X_1}(t)) \end{aligned}$$

l'interversion des symboles sommes (ligne 2) est justifiée car :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^k X_i = n \right) t^n \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \sum_{n=0}^{\infty} |t|^n \leq \frac{1}{1-t} < +\infty$$

et l'égalité $G_{\sum_{i=1}^k X_i} = G_{X_1}^k$ vient de l'indépendance des $(X_i)_{i \geq 0}$ et le fait qu'ils suivent la même loi.

3. Si X_1 et N sont d'espérances finies, alors G_{X_1} et G_N sont dérivables en 1^- , donc G_S aussi par composition, donc S est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(S) = G'_S(1) = G'_{X_1}(1) G'_N(G_{X_1}(1)) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(N),$$

car $G_{X_1}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = n) = 1$.

Solution 10. (Enoncé)

Supposons par l'absurde que tous les points soient réguliers. Alors pour tout $z \in \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, il existe $\varepsilon_z > 0$ et une fonction holomorphe f_z sur $D(z, \varepsilon)$ qui prolonge f . Comme $\mathbb{S} \subset \cup_{z \in \mathbb{S}} D(z, \varepsilon_z)$, par compacité de \mathbb{S} , on peut écrire :

$$\mathbb{S} \subset \cup_{i=1}^n D(z_i, \varepsilon_{z_i})$$

avec $z_i \in \mathbb{S}$. Soit alors $\varepsilon := \min_{i=1}^n \varepsilon_{z_i} > 0$, la fonction f est prolongeable en une fonction holomorphe sur l'ensemble :

$$D(0, 1) \cup \cup_{i=1}^n D(z_i, \varepsilon_{z_i}).$$

Mais cet ensemble contient le disque $D(0, 1 + \varepsilon)$, en notant g le prolongement de f , g est holomorphe sur $D(0, 1 + \varepsilon)$ donc y est développable en série entière. En écrivant $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ avec un rayon de convergence $R \geq 1 + \varepsilon > 1$, l'unicité du développement en série entière donne $a_n = b_n$ pour tout n , ce qui contredit le fait que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ soit 1.

Solution 11. (Enoncé)

Montrons d'abord que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$. En effet, comme $(b_n)_n$ est strictement positive, la quantité de gauche admet une limite S (éventuellement infinie) en 1^- . On a pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \geq \sum_{n=0}^N b_n x^n.$$

Donc en passant à la limite en x , on a pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S \geq \sum_{n=0}^N b_n$ et donc $S = +\infty$.

Soit maintenant $\epsilon > 0$ et $x \in]0, 1[$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|a_n - b_n| < \epsilon b_n$. On a donc pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} - 1 \right| &\leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - b_n| x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} + \frac{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n - b_n| x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \\ &\leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - b_n| x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} + \epsilon \\ &\leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - b_n|}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} + \epsilon \end{aligned}$$

Le premier terme est plus petit que ϵ pour x assez proche de 1 et cela conclut.

Solution 12. (Enoncé)

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$. La fonction f est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1, donc est définie sur $] -1, 1[$. De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge par le critère spécial des séries alternées donc $f(1)$ est bien défini. Soit $x \in]0, 1[$, alors la suite $\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ est décroissante de limite nulle donc par le critère spécial des séries alternées :

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1} x^{3k+1} \right| \leq \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \leq \frac{1}{3n+1}.$$

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ donc f est continue sur $[0, 1]$. Il suffit alors de calculer $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$ et de prendre la limite quand $x \rightarrow 1^-$ pour avoir le résultat. La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - 1, 1[$ et pour $x \in] - 1, 1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{-x^3}{1+x^3} = \frac{1}{1+x^3} - 1.$$

La décomposition en élément simple de $\frac{1}{X^3+1}$ dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme :

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$

en multipliant par $X+1$ et en évaluant en -1 il vient : $a = \frac{1}{3}$. En multipliant par X et en regardant en $+\infty$ il vient $b = -a = -\frac{1}{3}$. Enfin, en évaluant en $X=0$ il vient $c = 1 - a = \frac{2}{3}$. Donc pour $x \in] - 1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt \\ &= -x + \int_0^x \frac{dt}{3(t+1)} + \frac{1}{3} \int_0^x \frac{-t+2}{t^2-t+1} dt \\ &= -x + \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \left(\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt - 3 \int_0^x \frac{dt}{t^2-t+1} \right) \\ &= -x + \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= -x + \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\arctan \left(\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \right) - \arctan \left(\frac{2(0-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \right) \right) \\ &= -x + \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \left(\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Donc en prenant la limite quand $x \rightarrow 1^-$, il vient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 + \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = -1 + \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Solution 13. (Enoncé)

On va montrer que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} pour tout $k \geq 1$. Chaque f_n est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} et $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . De plus, pour $k \geq 1$, $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n^{(k)}(x)| = |e^{-n} (in^2)^k e^{in^2 x}| = n^{2k} e^{-n},$$

donc $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement sur \mathbb{R} (donc uniformément car \mathbb{R} est de dimension finie en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel) et le théorème de dérivation termes à termes des séries de fonctions permet de conclure que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Soit $k \geq 0$, alors :

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} e^{-n} \geq k^{2k} e^{-k}.$$

Donc si f était développable en série entière en 0, alors la série $\sum_{k \geq 1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ aurait un rayon de convergence non nul. Or pour tout $x > 0$,

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \geq \frac{k^{2k} e^{-k}}{k!} x^k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^{2k} x^k e^{-k}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^k e^{-2k} x^k}{\sqrt{2\pi k}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$$

et donc la série $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ diverge et f n'est pas développable en série entière en 0.

Remarque : On aurait pu aussi utiliser la règle de CAUCHY-HADAMARD et montrer que :

$$\limsup \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = +\infty$$

Remarque : On peut montrer que f n'est développable en série entière en aucun point de \mathbb{R} .

Solution 14. (Enoncé)

1. Comme \mathfrak{S}_n est de cardinal $n!$, il est clair que $I_n \leq n!$ et donc $\frac{I_n}{n!} \leq 1$ et donc $R \geq 1$.

2. Soit σ une involution de \mathfrak{S}_{n+2} . Si $\sigma(n+2) = n+2$, alors σ restreinte à $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ est une involution et il y a I_{n+1} choix pour σ . Si $\sigma(n+2) \neq n+2$, alors il y a $(n+1)$ choix pour $\sigma(n+2)$ (tous les entiers de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$). Si $\sigma(n+1) = k$, alors nécessairement $\sigma(k) = n+1$ car σ est une involution. Il reste alors à choisir les n autres valeurs de σ , ce qui revient à choisir une involution d'un ensemble à n éléments : il y en a I_n . Finalement on a bien la formule attendue.

3. D'après la question précédente, pour tout $n \geq 0$ et $z \in D(0, R)$:

$$\frac{I_{n+2}}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{I_n}{n!} z^{n+1} + \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}$$

ce qui en sommant de $n = 0$ à $+\infty$ donne :

$$f'(z) - 1 = z f(z) + (f(z) - 1)$$

i.e.

$$f'(z) = (1+z)f(z).$$

En résolvant cette équation différentielle sur $] -R, R[$, il vient :

$$\forall x \in] -R, R[, \quad f(x) = \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$$

car $f(0) = 1$. Or les fonctions $z \mapsto \exp(z + \frac{z^2}{2})$ et $z \mapsto f(z)$ sont holomorphes sur $D(0, R)$ et coïncident sur $] -R, R[$ donc sont égales sur $D(0, R)$ par le principe des zéros isolés. Mais $z \mapsto \exp(z + \frac{z^2}{2})$ est entière donc développable en série entière sur \mathbb{C} , par unicité du développement en série entière, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} z^n$ est $+\infty$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$, alors :

$$\begin{aligned} \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right) &= \exp(z) \exp\left(\frac{z^2}{2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^k k!} \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{z^{n+2k}}{n! k! 2^k} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n+2k=p} \frac{z^{n+2k}}{n! k! 2^k} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n+2k=p} \frac{1}{n! k! 2^k} \right) z^p \end{aligned}$$

donc par unicité du développement en série entière :

$$\forall p \geq 0, \quad I_p = p! \sum_{n+2k=p} \frac{1}{n! k! 2^k}.$$

Solution 15. (Énoncé)

Soit $0 < x < 1$ fixé. La fonction $t \mapsto x^{t^2}$ est décroissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} x^{t^2} dt \leq x^{n^2} \leq \int_{n-1}^n x^{t^2} dt.$$

Soit en sommant :

$$\int_1^\infty x^{t^2} dt \leq f(x) \leq \int_0^\infty x^{t^2} dt$$

Or $\int_1^\infty x^{t^2} dt \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \int_0^\infty x^{t^2} dt$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \int_0^\infty x^{t^2} dt$. Il reste donc à évaluer cette dernière intégrale, on fait pour cela le changement de variable $u = \sqrt{-\log(x)}t$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{t^2} dt &= \frac{1}{\sqrt{-\log(x)}} \int_0^\infty e^{-u^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\log(x)}} \int_0^\infty e^{-u^2} du \\ &\underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la valeur de l'intégrale de GAUSS : $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Remarque : On peut procéder autrement. En notant $\theta(t) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}$, alors $\sum_{n=1}^\infty x^{n^2} = \theta\left(-\frac{\ln(x)}{\pi}\right)$. La formule sommatoire de POISSON donne $\theta(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(2\theta\left(\frac{1}{t}\right) + 1\right) - \frac{1}{2}$. Donc :

$$\sum_{n=1}^\infty x^{n^2} = \theta\left(-\frac{\ln(x)}{\pi}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln(x)}} \left(2\theta\left(-\frac{\pi}{\ln(x)}\right) + 1\right) - \frac{1}{2} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$