Décomposition de Dunford effective par la méthode de Newton

Laurent Dietrich *

18 mai 2011

Réf. : Boyer-Risler, algèbre pour la licence 3

Théorème. *Soit $A \in M_n(K)$ une matrice dont le polynôme caractéristique $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{n_i}$ est scindé. On pose $P = \prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)$. Alors la suite définie par* $\begin{cases} A_0 := A \\ A_{n+1} := A_n - P(A_n)P'(A_n)^{-1} \end{cases}$ *converge en un certain sens quadratiquement en un nombre fini d'étapes vers la partie diagonale D de la décomposition de Dunford de A. De plus D est un polynôme en A, et la suite se calcule sans avoir besoin des valeurs propres de A.*

Démonstration. Montrons en premier lieu que P, et donc la suite, se calcule sans faire appel aux valeurs propres de A. Il suffit de remarquer que $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'}$: en effet λ_i est racine de multiplicité $n_i - 1$ de χ_A' donc 1 du membre de droite. De plus ce membre de droite n'a aucune autre racine que les λ_i, c'est donc bien P. Ainsi on peut calculer P par un simple calcul de pgcd à partir de χ_A, par exemple avec l'algorithme d'Euclide.

1. Montrons par récurrence que la suite est bien définie et qu'elle est constituée de polynômes en A, c'est-à-dire que (pour tout n, A_n est un polynôme en A et $P'(A_n)$ est inversible). Pour cela on a besoin d'un lemme, qui montre aussi l'initialisation.

   Lemme. *Soit U une matrice inversible et N une matrice nilpotente qui commutent, alors $U - N$ est inversible.*

   Démonstration. Soit $k+1$ l'ordre de nilpotence de N, alors $(U^{-1}N)^{k+1} = 0$ par commutation, donc $U^{-1}N$ est nilpotente et on a l'identité $(I - U^{-1}N)(I + U^{-1}N \cdots + U^{-k}N^k) = I$. En multipliant à gauche par U et à droite par U^{-1} (et en commutant N et U^{-1} qui est un polynôme en U [1]) il vient

   $$(U - N)(U^{-1} + U^{-2}N \cdots + U^{-k-1}N^k) = I$$

   □

   Maintenant comme P est à racines simples, $P \wedge P' = 1$ et par le théorème de Bézout il existe des polynômes U et V tels que $UP' + VP = 1$ donc $U(A)P'(A) = I - V(A)P(A)$. Or $V(A)P(A)$ est nilpotente car ces deux facteurs commutent et que $P(A)$ est nilpotente : $P(A)^r = 0$ pour $r \geqslant \max(n_i)$. Ainsi par le lemme $U(A)P'(A)$ est inversible donc $P'(A)$

*http://perso.eleves.bretagne.ens-cachan.fr/∼ldiet783

1. c'est classique, utiliser par exemple Cailey-Hamilton, mettre le terme constant d'un côté de l'égalité et factoriser par U...

aussi et l'initialisation est prouvée. Supposons (pour tout $k \leqslant n$, A_k est un polynôme en A et $P'(A_k)$ est inversible). Alors A_{n+1} est un polynôme en A par hypothèse de récurrence et parce que l'inverse d'une matrice est un polynôme en la matrice. Reste seulement à prouver que $P'(A_{n+1})$ est inversible pour conclure la récurrence.
Par la formule de Taylor $P'(A_{n+1})-P'(A_n) = (A_{n+1}-A_n)Q(A_n)$ pour un certain polynôme Q soit

$$P'(A_{n+1}) = P'(A_n) - P(A_n)P'(A_n)^{-1}Q(A_n)$$

Dans le membre de droite, le premier terme est inversible par hypothèse de récurrence. Dans le deuxième terme les trois facteurs sont des polynômes en A car en A_n (qui est polynôme en A par hypothèse de récurrence) donc commutent. On aimerait que ce terme soit nilpotent en invoquant P^r pour $r \geqslant \max(n_i)$. Mais pour cela il faudrait avoir un $P(A)$. Qu'à cela ne tienne, mettons cette récurrence en pause pour le moment et montrons par une autre récurrence que

$$P(A_n) \in P(A)^{2^n} K[A]$$

C'est vrai au rang 0 ($P(A) \in K[A]$) et si c'est vrai aux rangs $\leqslant n$, le lemme abstrait suivant permet de conclure :

Lemme. *Pour tout polynôme P, il existe un polynôme $Q \in K[X,Y]$ tel que $P(X+Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2Q(X,Y)$.*

Démonstration. Par linéarité on se permet de le vérifier seulement sur les monômes, où c'est donné par la formule du binôme : $(X+Y)^m = X^m + YmX^{m-1} + Y^2 \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} Y^{k-2}X^{m-k}$ □

En appliquant le lemme il vient : $P(A_{n+1}) = P(A_n + Y) = Y^2Q(A_n, Y)$ pour un certain polynôme Q, car justement $P(A_n) + YP'(A_n) = 0$ par définition de Y. Ainsi $P(A_{n+1}) = P(A_n)^2P'(A_n)^{-2}Q(A_n,Y) = (P(A)^{2^n})^2S(A)$ pour un certain polynôme S par hypothèse de récurrence, soit $P(A_{n+1}) \in P(A)^{2^{n+1}}K[A]$ ce qui conclut la récurrence.

On peut maintenant conclure la première récurrence : $P(A_n)P'(A_n)^{-1}Q(A_n)$ est bien nilpotent puisqu'il est nul élevé à toute puissance r telle que $r2^n \geqslant \max(n_i)$. Le premier lemme montre donc que $P'(A_{n+1})$ est inversible.

2. Montrons que la suite converge bien vers le D de Dunford. Par ce qu'on vient de montrer, la suite est stationnaire dès A_n avec n tel que $2^n \geqslant \max(n_i)$. Ainsi la suite converge en un nombre fini d'étapes, et il en faut seulement $E(\frac{\log(\max(n_i))}{\log(2)}) + 1$. De plus la limite $An =: D$ vérifie $P(D)P'(D)^{-1} = 0$ donc $P(D) = 0$ donc est diagonalisable car P est scindé à racines simples. Reste à calculer

$$N := A - D = A_0 - A_n = (A_0 - A_1) + \cdots + (A_{n-1} - A_n)$$

est une somme de nilpotents (comme on l'a vu lors de l'hérédité pour la première récurrence) donc est nilpotent (formule du binôme). De plus c'est un polynôme en A car D l'est, donc N commute avec D. On conclut par l'unicité dans la décomposition de Dunford. [2]

□

2. qui se démontre comme suit : on montre d'abord l'existence de D en la définissant comme il le faut par restriction à chaque sous-espace caractéristique (comme $\lambda_i Id_{N_i}$ sur N_i). À partir de là si (D', N') convient aussi, en montrant que D et D' commutent sur les sous-espaces caractéristiques donc commutent, on obtient que N et N' commutent et ainsi $N - N' = D' - D$ est diagonalisable nilpotente donc nulle.