Théorème 1. Soit G un groupe simple d'ordre 60, alors $G \cong \mathfrak{A}_5$.

Preuve.

Comme G est un groupe simple et 60 non premier, G n'est pas abélien. Comme $Z(G) \lhd G$, et $Z(G) \neq G$, $Z(G) = \{e\}$. Il suffit de montrer que G admet un sous-groupe d'indice 5, en effet si l'on dispose d'un tel sous groupe H, alors en faisant agir G sur G/H par translation on a un morphisme

$$\varphi : G \to S_{G/H} \cong S_5$$

Comme φ non trivial et $\mathrm{Ker}(\varphi) \lhd G$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e\}$ et donc φ injective. Le groupe G s'identifie donc à un sous-groupe d'indice de S_5 donc (fait classique) $G \cong \mathfrak{A}_5$. Remarquons qu'on a de plus montré que tous les sous-groupes propres de G sont d'indice ≥ 5.

Supposons par l'absurde que G n'admet pas de sous-groupe d'indice 5. Remarquons que $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et on va s'intéresser aux p-sylow de G, on note n_p le nombre de p-sylow de G et pour un P un p-sylow, on note

$$N_G(P) := \left\{g \in G \mid gPg^{-1} = P\right\}$$

son normalisateur, c'est un sous-groupe de G. Comme G simple, il ne peut posséder qu'un seul p-sylow car sinon il serait distingué (et G n'est pas un p-groupe) donc pour $p \in \{2, 3, 5\}$, $n_p > 1$. De plus, $n_p = [G : N_G(P)] > 5$ par hypothèse.
Soit S_1, S_2 deux 2-sylow de G, supposons $S_1 \cap S_2 \neq \{e\}$ et soit $g \neq e$ dans cette intersection. Alors $Z_G(g) := \{h \in G \mid gh = hg\}$ est un sous-groupe de G de cardinal > 4 car il contient $S_1 \cup S_2$ car S_1, S_2 sont des groupes de cardial 4 donc abélien et $|S_1 \cup S_2| > 4$ car $S_1 \neq S_4$.

De plus, comme $S_1 < Z_G(g)$, $4 \mid |Z_G(g)|$ et de plus $Z_G(g) < G$ donc $|Z_G(g)| \mid 60$ et finalement $|Z_G(g)| \geq 12$ ie $[G : Z_G(g)] \leq 5$ donc $Z_G(g) = G$ ie $g \in Z(G)$: contradiction.

Donc tous les 2-sylows ont une intersection deux à deux triviales. C'est aussi le cas des 3 et 5-sylows car cycliques d'ordre premier. Déterminons maintenant la valeur de n_p pour $p \in \{2, 3, 5\}$.

- $n_2 \mid 15$ et $n_2 > 5$ donc $n_2 = 15$.
- $n_3 \mid 20$, $n_3 \equiv 1[3]$ et $n_3 > 5$ donc $n_3 = 10$.
- $n_5 \mid 12$, $n_5 \equiv 1[5]$ et $n_5 > 5$ donc $n_5 = 6$.

Mais alors G possède :

- $(4-1) \times n_2 = 3 \times 15 = 45$ éléments d'ordre 2 ou 4.
- $(3-1) \times n_3 = 2 \times 10 = 20$ éléments d'ordre 3.
- $(5-1) \times n_5 = 4 \times 6 = 24$ éléments d'ordre 5

Donc,

$$|G| \geq 45 + 20 + 24 > 60$$

Ce qui donne la contradiction voulue.

$\square$

Théorème 2. Le groupe $\mathfrak{A}_5$ est simple.

Preuve.

Dénombrons les éléments de $\mathfrak{A}_5$ par leurs ordres. Le groupe $\mathfrak{A}_5$ possède :

- 1 élément d'ordre 1 (le neutre).

- $\binom{5}{4} \times \binom{3}{2} = 15$ éléments d'ordre 2 (les produits de deux transpositions à supports disjoints).
- $(3-1)!\binom{5}{3} = 20$ éléments d'ordre 3 (les 3-cycles).
- $(5-1)!\binom{5}{5} = 24$ éléments d'ordre 5 (les 5-cycles).

Soit maintenant $H \lhd \mathfrak{A}_5$, $H \neq \{e\}$ et montrons que $H = \mathfrak{A}_5$. Si H contient un élément d'ordre 2 ou 3 il les contient tous car ils sont conjugués dans $\mathfrak{A}_5$. Si H contient un 5-cycle alors il contient le 5-sylow qu'il engendre et donc tous les 5-sylow car les 5-sylow sont conjugués et finalement H contient tous les éléments d'ordre 5.
Comme ni $20+1$ ni $15+1$ et $24+1$ ne divise 60, H contient au moins deux des trois types mais dans ce cas $|H| > 30$ et $H = \mathfrak{A}_5$ et cela conclut. $\square$

Remarque 1. On peut montrer que $\mathfrak{A}_6$ est le seul groupe simple d'ordre 360.

Remarque 2. Le premier théorème est fait dans "Théorie des groupes" de Félix Ulmer ou alors "Algèbre : groupes" de Aviva Szpirglas. Le second théorème est fait dans "Cours d'algèbre" de Daniel Perrin.