Théorème 1. Soit G un sous-groupe d'exposant fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors G est fini.

***Preuve*.**

On note $\mathcal{M} = \{\mathrm{tr}(g) \mid g \in G\}$, montrons dans un premier temps que $\mathcal{M}$ est fini.
Soit q l'exposant de G, pour tout $M \in G, M^q = I_n$ donc tous les éléments de G sont diagonalisables et les valeurs propres sont des racines q-ème de l'unité. Donc l'ensemble des valeurs propres des éléments de G est fini, donc $\mathcal{M}$ est fini.

L'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(G)$ engendré par G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc est de dimension finie d. Comme G est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(G)$, on peut trouver une base $(G_1, \dots, G_d) \in G^d$ une base de $\mathrm{Vect}(G)$. On considère alors l'application suivante : $\phi : G \longrightarrow \mathcal{M}^d$ définie par :

$$\forall A \in G, \quad \phi(A) = (\mathrm{tr}(AG_i))_{1 \leq i \leq d}$$

Montrons que ϕ est injective, comme $\mathcal{M}^d$ est fini on pourra conclure que G est fini.

Soit $(A, B) \in G^2$ tels que $\phi(A) = \phi(B)$. On a pour tout $i \in [\![1; d]\!]$, $\mathrm{tr}(AG_i) = \mathrm{tr}(BG_i)$ et donc par linéarité, $\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(BM)$ pour tout $M \in \mathrm{vect}(G)$.

Soit $D = AB^{-1} - I_n$, Comme $(A, B) \in G^2$, $AB^{-1} \in G$ car G est un groupe donc est diagonalisable, par suite, D est diagonalisable. De plus pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{tr}\big((AB^{-1})^{k+1}\big) = \mathrm{tr}\big(AB^{-1}(AB^{-1})^k\big) = \mathrm{tr}\big(BB^{-1}(AB^{-1})^k\big) = \mathrm{tr}\big((AB^{-1})^k\big)$$

car $B^{-1}(AB^{-1})^k \in \mathrm{vect}(G)$.
Donc pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{tr}\big((AB^{-1})^k\big) = \mathrm{tr}\big(AB^{-1}\big) = n$$

et donc

$$\mathrm{tr}\big(D^k\big) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{tr}\big((AB^{-1})^i\big)(-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n(-1)^{k-i} = 0$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\mathrm{tr}\big(D^k\big) = 0$ donc D est nilpotente par le lemme suivant. Comme elle est diagonalisable, D est nulle et donc $A = B$ et cela conclut. □

Lemme 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si pout tout $k \in \mathbb{N}^\star$ $\mathrm{tr}\big(A^k\big) = 0$

***Preuve*.**

Sens direct: Comme A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$, elle est trigonalisable il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$. Comme A est nilpotente les coefficients diagonaux de T sont nuls et c'est aussi le cas de ceux de T^k pour $k \in \mathbb{N}^\star$. Donc $\mathrm{tr}\big(A^k\big) = \mathrm{tr}\big(T^k\big) = 0$.

Sens réciproque: A est trigonalisable donc il suffit de montrer que toutes les valeurs propres de A sont nulles. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres de A distinctes 2 à 2 et non nulles (si de telles valeurs propres n'existent pas on convient que la multiplicité associée vaut 0). L'hypothèse donne : Pour tout $k \in [\![1; r]\!]$, $\sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i^k = 0$ où n_i est la multiplicité de λ_i. On peut alors traduire ça en un système linéaire : $V \times N = 0$ avec

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix}$$

Comme les $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r}$ sont non nuls et disctincts 2 à 2, la matrice V est inversible et donc $N = 0$. Finalement, la seule valeur propre de A est 0 et donc A est nilpotente car A est trigonalisable. $\square$

Remarque 1. On peut même donner une majoration du cardinal de G, comme pour $A \in G$, $\mathrm{tr}(A)$ est somme de n racines $q$ème de l'unité et que $d \leq n^2$ on a $|G| \leq q^{n^3}$.

Remarque 2. Le résultat est faux en caractéristique strictement positive. Soit $K = \mathbb{F}_2(X)$, alors le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(K)$ formé des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \in K$$

est infini mais d'exposant 2. On peut cependant remarquer qu'en caractéristique strictement positive, le résultat reste vrai si $n < \mathrm{car}(K)$.

Remarque 3. Le lemme et le théorème se trouvent dans "Oraux X-ENS Algèbre 2" de Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas.