Théorème 1 (Formule des compléments)**.**

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Preuve.

Les deux membres de cette égalité étant analytiques sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, qui est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, il suffit de prouver l'égalité sur $]0,1[$, car $]0,1[$ a un point d'accumulation dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Soit donc $\alpha \in]0,1[$, on a:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \int_0^{\infty} u^{-\alpha}e^{-u}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\left(\int_0^{\infty} u^{-\alpha}e^{-u}\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\
&\underset{u=tv}{=} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\int_0^{\infty} t^{-\alpha}v^{-\alpha}e^{-tv}\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} v^{-\alpha}\left(\int_0^{\infty} e^{-(1+v)t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}v \quad \text{(Fubini-Tonelli)} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{v^{-\alpha}}{1+v}\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Comme le membre de gauche est symétrique $\alpha \longleftrightarrow 1-\alpha$, le membre de droite aussi et donc:

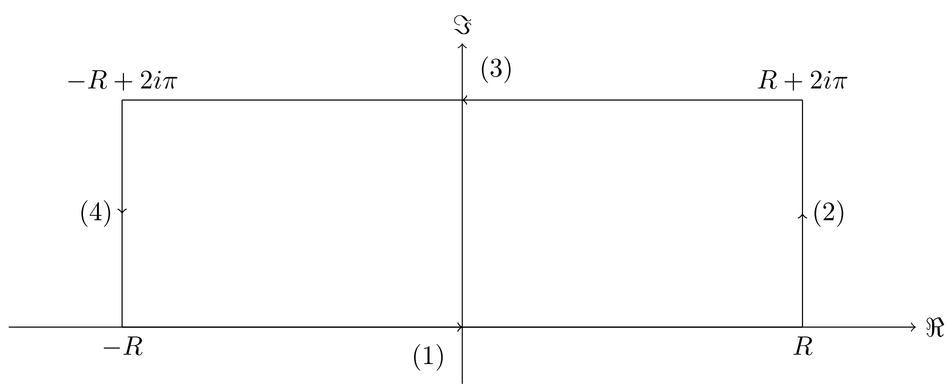
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{v^{\alpha-1}}{1+v}\,\mathrm{d}v$$

Enfin, le changement de variable $v = e^x$ donne:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x =: I(\alpha)$$

On va calculer cette dernière intégrale par la méthode des résidus.
On considère la fonction $f(z) = \dfrac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$. Cette fonction est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet des pôles simples en $i\pi + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Soit $R > 0$, on applique le théorème des résidus au rectangle γ_R dont les sommets sont $-R, R, R+2i\pi, -R+2i\pi$.

Le rectangle γ_R



Le seul pôle de f dans le rectangle est $i\pi$. Comme c'est un pôle simple, on a:

$$\mathrm{Res}(f(z), z = i\pi) = \lim_{z\to i\pi} f(z)(z-i\pi) = \lim_{z\to i\pi} e^{\alpha z}\frac{z-i\pi}{e^z - e^{i\pi}} = -e^{i\alpha\pi}$$

D'après le théorème des résidus, on a:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \mathrm{Res}(f(z), z = i\pi) = -2i\pi e^{-i\alpha\pi} \quad (\star)$$

On sépare le rectangle en 4 chemins et on étudie la contribution de l'intégrale sur ces 4 chemins.
Pour le chemin (1), on a:

$$\int_{(1)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} I(\alpha)$$

Le chemin (3) donne:

$$\int_{(3)} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{-R}^{R} e^{2i\alpha\pi} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} -e^{2i\alpha\pi} I(\alpha)$$

Le chemin (2) se majore par:

$$\left|\int_{(2)} f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha R + i\alpha t}}{1+e^{R+it}} i\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1}\,\mathrm{d}t = 2\pi \frac{e^{\alpha R}}{e^R-1} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\alpha < 1)$$

Le chemin (4) se majore par:

$$\left|\int_{(4)} f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha R + i\alpha t}}{1+e^{-R+it}} i\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha R}}{1 - e^{-R}}\,\mathrm{d}t = 2\pi \frac{e^{-\alpha R}}{1-e^{-R}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\alpha > 0)$$

Le passage à la limite $R \to +\infty$ dans $(\star)$ fournit:

$$(1 - e^{2i\pi\alpha}) I(\alpha) = -e^{i\pi\alpha}$$

ce qui, après simplification, donne:

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

$\square$